ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.952
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-176-181

Поступила в редакцию 04.02.2019
Received 04.02.2019

А. К. Деменчук

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Аннотация. Рассматривается линейная система управления с почти периодической матрицей коэффициентов и управлением в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным. Предполагается, что коэффициент обратной связи является почти периодическим и модуль его частот, т. е. наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, включающая все показатели Фурье этого коэффициента, содержится в частотном модуле матрицы коэффициентов.

Формулируется следующая задача: выбрать такое управление из допустимого множества, чтобы у замкнутой управлением системы появились почти периодические решения, спектр частот (множество показателей Фурье) которых содержит наперед заданное подмножество, а пересечение модулей частот решения и матрицы коэффициентов тривиально. Поставленная задача названа задачей управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) с целевым множеством частот.

Цель работы – получить необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем в случае, когда усреднение матрицы коэффициентов является тривиальным. В рассматриваемом случае найдена оценка мощности асинхронного спектра.

Ключевые слова: почти периодические линейные системы, нулевое среднее значение, показатели Фурье, сильно нерегулярные колебания, асинхронный спектр

Для цитирования. Деменчук, А. К. Необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем с нулевым средним матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 176–181. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-176-181

A. K. Demenchuk

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

NECESSARY CONDITION FOR SOLVABILITY OF THE CONTROL PROBLEM OF AN ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF LINEAR ALMOST PERIODIC SYSTEMS WITH TRIVIAL AVERAGING OF THE COEFFICIENT MATRIX

Abstract. We consider a linear control system with an almost periodic matrix of coefficients. The control has a form of feedback and is linear in phase variables. It is assumed that the feedback coefficient is almost periodic and its frequency modulus, i.e. the smallest additive group of real numbers, including all Fourier exponents of this coefficient, is contained in the frequency module of the coefficient matrix.

The following problem is formulated: choose such a control from an admissible set so that the closed system has almost periodic solutions, the frequency spectrum (a set of Fourier exponents) of which contains a predetermined subset, and the intersection of the solution frequency modules and the coefficient matrix is trivial. The problem is called the control problem of the spectrum of irregular oscillations (asynchronous spectrum) with a target set of frequencies.

The aim of the work aws to obtain a necessary solvability condition for the control problem of the asynchronous spectrum of linear almost periodic systems with trivial averaging of coefficient matrix The estimate of the power of the asynchronous spectrum was found in the case of trivial averaging of the coefficient matrix.

Keywords: almost periodic linear systems, trivial averaging, Fourier exponents, strongly irregular oscillations, asynchronous spectrum

For citation. Demenchuk A. K. Necessary condition for solvability of the control problem of an asynchronous spectrum of linear almost periodic systems with trivial averaging of the coefficient matrix. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 176–181 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-176-181

Введение. Большинство различных задач для периодических и почти периодических систем управления касается регулярного случая, при этом вопросы о соотношении частот решений и параметров системы не затрагиваются [1–7] и др. Однако, в частности для прикладных задач, необходимо иметь информацию о том, в какой мере специфика управления влияет на характер частот колебаний системы. Это обусловлено тем, что при изучении периодических решений периодических дифференциальных систем Х. Массера указал на возможность существования решений, период которых несоизмерим с периодом изменения параметров самой системы или с периодом внешнего воздействия [8]. В дальнейшем это направление активно развивалось, а периодические и почти периодические решения такого рода были названы сильно нерегулярными. В техническом аспекте Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси продемонстрировали возможность параметрического воздействия на двухконтурные параметрические системы не только на кратных, но и на несоизмеримых частотах [9].

Условия протекания процесса, когда колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, в приложениях называются асинхронным режимом. Задача конструирования периодических систем, обладающих асинхронным режимом, поставлена в виде задачи управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) [10]. В работе [11] изучался квазипериодический случай. В этом направлении получены достаточные условия разрешимости такой задачи для систем с конечным распределенным спектром. Поставленная задача является вариантом обобщения задачи о назначении спектра для нестационарного случая. В связи с этим представляется актуальным исследование подобных вопросов в гораздо более сложном случае почти периодических систем, поскольку их спектр может быть самым разнообразным, имеющим, например, точки сгущения.

Предварительные сведения. Приведем необходимые понятия и определения из теории почти периодических (по Бору) функций [12]. Пусть $f(t)$ – непрерывная на всей числовой оси вещественная функция.

Функция $f(t)$ называется почти периодической (по Бору), если для произвольного положительного ε множество ее ε-почти периодов является относительно плотным.

Модуль (частотный модуль) $\mathrm{Mod}(f)$ почти периодической функции $f(t)$ – это наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, содержащая все показатели Фурье этой функции.

Некоторую матрицу $P(t)$ будем считать почти периодической, если все ее элементы – скалярные почти периодические функции. Для этих функций существует общее множество почти периодов.

Пусть $g(t,x)$ – вектор-функция, почти периодическая по t равномерно относительно x из некоторого компактного множества. Почти периодическое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = g(t,x)$$

называется сильно нерегулярным, если пересечение частотных модулей решения и правой части тривиально, т. е.

$$\mathrm{Mod}\,(x) \cap \mathrm{Mod}\,(g) = \{0\}.$$

Будем говорить, что некоторые столбцы матрицы $P(t)$ линейно независимы над $\mathbb{R}$, если их линейные комбинации с вещественными коэффициентами тождественно равны нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты нулевые. Через $\mathrm{rank}_{\,\mathrm{col}}\, P$ обозначим столбцовый ранг матрицы $P(t)$, т. е. наибольшее число ее линейно независимых над $\mathbb{R}$ столбцов.

Постановка задачи. Будем считать, что система управления является линейной

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \ge 2, \tag{1}$$

где B – постоянная $n{\times}n$-матрица, $A(t)$ – непрерывная почти периодическая $n{\times}n$-матрица с модулем частот $\mathrm{Mod}(A)$ и нулевым средним значением, т. е.

$$\hat{A} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A(t)dt = 0.$$

Предположим, что управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным:

$$u = U(t)x \tag{2}$$

с непрерывной почти периодической $n\times n$-матрицей $U(t)$, $\mathrm{Mod}\,(U) \subseteq \mathrm{Mod}\,(A)$. Требуется выбрать такую матрицу $U(t)$ (коэффициент обратной связи), чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = \big(A(t) + BU(t)\big)x \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное почти периодическое решение $x(t)$, спектр частот которого содержит заданное подмножество L.

Основной результат. Предварительно заметим, что даже если свободная система

$$\dot{x} = A(t)x$$

имеет сильно нерегулярные почти периодические решения, то задача управления спектром сильно нерегулярных колебаний остается содержательной в силу открытости вопроса о мощности спектра.

Укажем общую структуру спектра сильно нерегулярных почти периодических колебаний системы (3). Пусть $\mathrm{rank}\, B = r \ (1 \le r \le n)$, причем без ограничения общности будем считать, что первые $n - r$ строк матрицы B нулевые, так как в противном случае этого можно добиться линейным невырожденным преобразованием. Обозначим $r\times n$-матрицу, составленную из остальных строк матрицы B, через $B_{r,n}$. Ранг матрицы $B_{r,n}$ также равен r. Пусть $A^{(12)}_{n-r,r}(t)$ – матрица размерности $(n - r)\times r$, стоящая на пересечении первых $n - r$ строк и последних r столбцов матрицы коэффициентов $A(t)$, и $\mathrm{rank}_{\,\mathrm{col}}\,(A^{(12)}_{n-r,r}) = q$. Отметим, что в случае нулевого среднего значения матрицы коэффициентов ее осциллирующая часть совпадает с самой матрицей. Справедлива

Т е о р е м а. *Мощность асинхронного спектра системы* (3) *с нулевым средним значением матрицы коэффициентов не превосходит величины* $[(r-q)/2]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. ***1. Случай невырожденной матрицы B.*** В таком случае $r = n$. При $r = n$ считаем, что $A_{n-r,n}(t) \equiv 0$, поэтому $q = 0$ и искомая оценка сводится к величине $[n/2]$. Выбором коэффициента обратной связи из допустимого множества управлением (2) система (1) приводится к однородной системе

$$\dot{x} = A_1(t)x$$

с почти периодической матрицей коэффициентов $A_1(t)$ с любыми наперед заданными свойствами, включая и сильную нерегулярность периодических решений. В таком случае согласно [13, с. 21] $\mathrm{Mod}\,(A_1) \subseteq \mathrm{Mod}\,(A)$. Из [13, с. 68] вытекает, что сильно нерегулярное почти периодическое решение $x^{(1)}(t)$ этой системы удовлетворяет, в частности, стационарной системе

$$\dot{x} = A(t_0)x, \quad t_0 \in R.$$

Поэтому мощность спектра частот решения $x^{(1)}(t)$ не превосходит половины размерности системы.

2. Случай вырожденной матрицы B. Пусть

$$\mathrm{rank}\, B = r < n. \tag{4}$$

Допустим, что задача управления асинхронным спектром системы (1) разрешима, т. е. найдется почти периодический коэффициент обратной связи $U(t)$, $\mathrm{Mod}\,(U) \subseteq \mathrm{Mod}\,(A)$ такой, что замкнутая управлением (2) система (3) имеет сильно нерегулярное почти периодическое решение $x(t)$, спектр которого содержит целевое множество ненулевых частот $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots\}$, $s \ge 1$. В таком случае частотные базисы целевого множества L и матрицы коэффициентов $A(t) + BU(t)$ замкнутой системы (3) будут рационально линейно независимыми. Поэтому согласно [13, с. 40] вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет также и системе

$$\dot{x} = (\hat{A} + B\hat{U})x, \quad \Big(A(t) - \hat{A} + B(U(t) - \hat{U})\Big)x = 0, \quad \hat{U} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T U(t)dt = 0,$$

откуда в силу тривиальности среднего значения матрицы коэффициентов имеем

$$\dot{x} = B\hat{U}x, \quad \left(A(t) + B(U(t) - \hat{U})\right)x = 0.$$

Поскольку первые $n - r$ строк матрицы B нулевые, то последняя система примет вид

$$\dot{x}' = 0, \quad \dot{x}'' = B_{r,n}\hat{U}_{n,n-r}x' + B_{r,n}\hat{U}_{n,r}x'', \quad A^{(11)}_{n-r,n-r}(t)x' + A^{(12)}_{n-r,r}(t)x'' = 0.$$

$$\left(A^{(21)}_{r,n-r}(t) + B_{r,n}\tilde{U}_{n,n-r}(t)\right)x' + \left(A^{(22)}_{r,r}(t) + B_{r,n}\tilde{U}_{n,r}(t)\right)x'' = 0,$$

где $x' = \operatorname{col}(x_1,\dots,x_{n-r})$, $x'' = \operatorname{col}(x_{n-r+1},\dots,x_n)$, матрицы $\hat{U}_{n,n-r}$ и $U_{n,r}$ составлены соответственно из $n - r$ первых и r последних столбцов среднего значения коэффициента обратной связи $\hat{U}$, а матрицы $\tilde{U}_{n,n-r}(t)$ и $\tilde{U}_{n,r}(t)$ – соответственно из $n - r$ первых и r последних столбцов его осциллирующей части, т. е. $\tilde{U}(t) = U(t) - \hat{U}$.

Так как частоты целевого множества нетривиальны, то из уравнения $\dot{x}' = 0$ следует, что $x = 0$. Положим $B_{r,n}\hat{U}_{n,r} = C_{r,r}$. Тогда полученная система запишется в следующей форме:

$$A^{(12)}_{n-r,r}(t)x'' = 0, \quad \dot{x}'' = C_{r,r}x'', \quad x' = 0, \quad \left(A^{(22)}_{r,r}(t) + B_{r,n}\tilde{U}_{n,r}(t)\right)x'' = 0. \tag{5}$$

В силу того, что $\operatorname{Mod}(A^{(12)}_{n-r,r}) \cap \operatorname{Mod}(x) = \{0\}$, то $x(t)$ – сильно нерегулярное почти периодическое решение первого уравнения системы (5). Заметим, что если все столбцы матрицы $A^{(12)}_{n-r,n}(t)$ линейно независимы, то из [13, с. 43] вытекает, что и вторая часть компонент почти периодического решения $x(t)$ нулевая, т. е. $x'' = 0$. Однако это противоречит допущению о нетривиальности этого решения. Поэтому матрица $A^{(12)}_{n-r,r}(t)$ имеет неполный столбцовый ранг, т. е.

$$\operatorname{rank}_{\text{col}}(A^{(12)}_{n-r,r}) = q < r. \tag{6}$$

В таком случае найдется постоянная неособенная $r{\times}r$-матрица Q, такая что у матрицы $A^{(12)}_{n-r,r}(t)Q$ первые $n - q$ столбцов нулевые, а остальные q столбцов линейно независимы. Тогда линейное неособенное стационарное преобразование

$$x'' = Qy'', \quad x' = y' \tag{7}$$

приводит систему (5) к системе

$$\begin{gathered} A^{(12)}_{n-r,r}(t)Qy'' = 0, \quad \dot{y}'' = Q^{-1}C_{r,r}Qy'' = Dy'', \quad y' = 0, \\ \left(A^{(22)}_{r,r}(t) + B_{r,n}\tilde{U}_{n,r}(t)\right)Qy'' = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Отметим, что согласно исходному предположению первое уравнение системы (8) имеет почти периодическое решение $y''(t) = Q^{-1}x''(t)$, где Q – матрица преобразования (7). Поскольку матрица Q невырожденная, то справедливы следующие соотношения частотных модулей компонент решений и коэффициентов системы:

$$\operatorname{Mod}(y'') = \operatorname{Mod}(x''), \quad \operatorname{Mod}(A^{(12)}_{n-r,r}) = \operatorname{Mod}(A^{(12)}_{n-r,r}Q), \quad \operatorname{Mod}(y'') \cap \operatorname{Mod}(A^{(12)}_{n-r,r}Q) = \{0\}.$$

Это означает, что почти периодическое решение $y''(t)$ первого уравнения системы (8) сильно нерегулярно. Так как последние q столбцов матрицы $A^{(12)}_{n-r,n}(t)Q$ линейно независимы, то из [13, с. 43] вытекает, что последние q компонент этого решения нулевые, т. е. $y''(t)$ имеет следующую структуру:

$$y''(t) = \operatorname{col}\left(y_1(t),\dots,y_{r-q}(t),0,\dots,0\right) = \operatorname{col}\left(y^{[r-q]}(t),0,\dots,0\right).$$

Подставляя вектор $y''(t)$ во второе уравнение системы (8), получим, в частности, тождество

$$\dot{y}^{[r-q]}(t) \equiv D^{(11)}_{r-q,r-q}y^{[r-q]}(t), \tag{9}$$

где $D^{(11)}_{r-q,r-q}$ – левый верхний блок указанной нижними индексами размерности матрицы D.

Как видим, вектор $y^{[r-q]}(t)$ удовлетворяет стационарному уравнению размерности $r - q$. Поэтому спектр частот вектор-функции $y^{[r-q]}(t)$ является конечным и его мощность не превосходит величины $[(r-q)/2]$. В силу указанного выше строения векторов $y''(t)$ и $y'(t)$ спектр решения $x(t)$ системы (3) полностью определяется спектром вектор-функции $y^{[r-q]}(t)$. Следовательно, для мощности асинхронного спектра L системы (3) также имеет место оценка $|L| \leq [(r-q)/2]$. Теорема доказана.

С помощью теоремы можно указать признак неразрешимости поставленной задачи. Справедливо

Следствие. *Если все столбцы блока размерности* $(n-r)\times r$, *расположенного в правом верхнем углу матрицы коэффициентов* $A(t)$, *линейно независимы, то задача управления асинхронным спектром системы* (1) *неразрешима.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. матрица $A^{(12)}_{n-r,r}(t)$ имеет полный столбцовый ранг $q = \text{rank}_{\text{col}}(A^{(12)}_{n-r,r}) = r$ и существует коэффициент обратной связи из допустимого множества такой, что замкнутая управлением (2) система (3) имеет сильно нерегулярное почти периодическое решение $x(t)$, спектр частот которого содержит заданное подмножество $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$, $\lambda_s \neq 0$, $s = 1, 2, \ldots$. Тогда, как показано в теореме, это почти периодическое решение должно удовлетворять и системе (5), где $x'(t) \equiv 0$. Из уравнения $A^{(12)}_{n-r,r}(t)x'' = 0$ системы (5) в силу линейной независимости столбцов его матричного коэффициента и тривиальности пересечения частотных модулей уравнения и искомого почти периодического решения следует, что $x''(t) \equiv 0$. Следовательно, $x(t) \equiv 0$, что означает вырождение целевого множества частот L. Полученное противоречие завершает доказательство следствия.

Вывод. Необходимым условием разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных почти периодических систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов являентся конечность спектра целевого множества.

Благодарности. Работа выполнена в Институте математики Национальной академии наук Беларуси при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект № Ф18Р-014 «Робастность и потеря устойчивости динамических систем».

Acknowledgements. The work was carried out at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, project No. Ф18Р-014 “Robustness and stability loss of dynamic systems”.

Список использованных источников

1. Тонков, Е. Л. Периодическая краевая задача и свойства периодических решений линейных дифференциальных уравнений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е. Л. Тонков; АН БССР. Отд-ние физ.-мат. наук. – Минск, 1969. – 12 с.

2. Тонков, Е. Л. Линейная задача оптимального управления периодическими решениями / Е. Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 6. – С. 1007–1011.

3. Тонков, Е. Л. Некоторые свойства линейных периодических систем / Е. Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 4. – С. 756–757.

4. Иванов, А. Г. Оптимальное управление почти периодическими движениями / А. Г. Иванов // Приклад. математика и механика. – 1992. – Т. 56, вып. 5. – С. 837–846.

5. Иванов, А. Г. Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. I / А. Г. Иванов // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. – 2002. – Вып. 1. – С. 3–100.

6. Попова, С. Н. Управление асимптотическими инвариантами систем с почти периодическими коэффициентами / С. Н. Попова // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. – 2008. – Вып. 2. – С. 1–2.

7. Лаптинский, В. Н. К теории стабилизации линейных периодических систем управления / В. Н. Лаптинский // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 12. – С. 2163–2164.

8. Massera, J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J. L. Massera // Bul. de la Facultad de Ingenieria Montevideo. – 1950. – Vol. 4, № 1. – P. 37–45.

9. Папалекси, Н. Д. Об одном случае параметрически связанных систем / Н. Д. Папалекси // Изв. Акад. наук СССР. Сер. физ. – 1939. – Т. 1. – С. 373–379.

10. Деменчук, А. К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний / А. К. Деменчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 4. – С. 37–42.

11. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных квазипериодических систем с тривиальным усреднением матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 2.– С. 281–283.

12. Левитан, Б. М. Почти периодические функции / Б. М. Левитан. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.

13. Деменчук, А. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление / А. Деменчук. – Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2012. – 186 с.

References

1. Tonkov E. L. *Periodic Boundary Value Problem and Properties of Periodic Solutions of Linear Differential Equations*. Minsk, 1969. 12 p. (in Russian).

2. Tonkov E. L. Linear optimal control problem for periodic solutions. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1976, vol. 12, no. 6, pp. 1007–1011 (in Russian).

3. Tonkov E. L. Some properties of linear periodic systems. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1980, vol. 16, no. 4, pp. 756–757 (in Russian).

4. Ivanov A. G. Optimal control of almost periodic motions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, vol. 56, no. 5, pp. 737–746. https://doi.org/10.1016/0021-8928(92)90059-h

5. Ivanov A. G. Elements of the mathematical apparatus of problems of almost periodic optimization. I. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta = Proceedings of the Institute of Mathematics and Computer Science of the Ukrainian State University*, 2002, iss. 1, pp. 3–100 (in Russian).

6. Popova S. N. Control of asymptotic invariants of systems with almost periodic coefficients. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki = The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2008, iss. 2, pp. 1–2 (in Russian).

7. Laptinskii V. N. On the theory of stabilization of linear periodic control systems. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 12, pp. 2163–2164 (in Russian).

8. Massera J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Bul. de la Facultad de Ingenieria Montevideo*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45.

9. Papaleksi N. D. On one case of parametrically coupled systems. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Physical series*, 1939, vol. 1, pp. 373–379 (in Russian).

10. Demenchuk A. K. The control problem of the spectrum of strongly irregular periodic oscillations, *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2009, vol. 53, no. 4, pp. 37–42 (in Russian).

11. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear quasiperiodic systems with trivial averaging of the coefficient matrix. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 281–283 (in Russian).

12. Levitan B. M. *Almost Periodic Functions.* Moscow, Gostekhizdat Publ., 1953. 396 p. (in Russian).

13. Demenchuk A. *Asynchronous Oscillations in Differential Systems. Conditions of Existence and Control.* Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2012. 186 p. (in Russian).

Информация об авторе

Деменчук Александр Константинович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by

Information about the author

Aleksandr K. Demenchuk – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Leading Researcher of the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by