ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 2016
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

ФІЗІКА

УДК 530.12

Ю. А. КУРОЧКИН

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОРИСФЕР ТРЕХМЕРНОГО РАСШИРЕННОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by

Показано, что стационарная группа изотропного вектора четырехмерного псевдоевклидового пространства – подгруппа группы вращений $SO(3.1)$ данного пространства является группой движений орисфер первого и второго рода в трехмерном расширенном пространстве Лобачевского и действует на орисферах транзитивно.

Ключевые слова: орисфера, изотропный вектор, пространство Лобачевского, псевдоевклидово пространство, группа, преобразование, бикватернион.

Yu. A. KUROCHKIN

GROUP-THEORETICAL INTERPRETATION OF THE HOROSPHERES OF THE THREE-DIMENSIONAL EXTENDED LOBACHEVSKY SPACE

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by

We have shown that the stationary group of the isotropic vector of the four- dimensional pseudo-Euclidean space, which is the subgroup of the rotation group $SO(3.1)$ of this space, is the group of motion of the first- and second-kind horospheres in the three-dimensional extended Lobachevsky space and act transitively on horospheres.

Keywords: horosphere, isotropic vector, Lobachevsky space, pseudo-Euclidean space, group, transformation, biquaternion.

Введение. Геометрия пространства Лобачевского и связанные с ней теоретико-групповые, алгебраические и аналитические методы находят широкое применение в теоретической физике, а именно: в релятивистской кинематике, квантовой механике, классической и квантовой теории поля (см., напр., [1, 2]).

В работах [3, 4] нами было показано, что новые возможности для моделирования физических систем и процессов открывают подходы, основанные на применении методов, связанных с геометрией орисфер трехмерного пространства Лобачевского, на которых, как известно, реализуется геометрия евклидовой плоскости.

Поскольку, по определению, орисферой трехмерного пространства Лобачевского является поверхность, ортогональная пучку параллельных прямых данного пространства, а пучок параллельных задается точкой их пересечения (общей точкой прямых, лежащей на абсолюте трехмерного пространства Лобачевского), то заданная фиксированная точка полностью определяет орисферу.

Если воспользоваться стандартной, наиболее часто используемой в физике реализацией геометрии трехмерного пространства Лобачевского на верхней поле двухполостного гиперболоида в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, то точкой, определяющей орисферу (задающей пучок параллельных прямых пространства Лобачевского) является точка изотропного конуса данного пространства, координаты которой выступают компонентами четырехмерного изотропного (светоподобного) вектора. Поэтому естественно, что с точки зрения теории группы движений псевдоеклидова пространства, подгруппой которой является группа $SO(3.1)$, изоморфная группе Лоренца, для теоретико-группового определения орисфер важна роль стационарной группы изотропного 4-вектора.

Задача настоящей работы – установление связи вектор-параметра стационарной группы изотропного 4-вектора псевдоевклидова пространства, введенного Ф. И. Федоровым [5, 6], с геометрией орисферы.

Основные определения. В терминах объемлющего псевдоевклидова пространства вещественное пространство Лобачевского реализуется на верхней поле гиперболоида

$$X\overline{X} = -\underline{X}\underline{X} - X_0 X_0 = X_1{}^2 + X_2{}^2 + X_3{}^2 - X_0{}^2 = -\rho^2. \tag{1}$$

Здесь используются бикватернионы, соответствующие 4-векторам песевдоевклидового пространства, которые вводятся как

$$X = iX_0 + \underline{X}\,,\ (-X^* = \overline{X}), \tag{2}$$

с правилом умножения

$$X'' = (iX'_0 + \underline{X}')(iX_0 + \underline{X}) = -X'_0 X_0 - (\underline{X}'\,\underline{X}) + iX'_0\,\underline{X} + iX_0\underline{X}' + [\underline{X}'\,\underline{X}]. \tag{3}$$

Звездочка (*) обозначает комплексное сопряжение, черта (–) – кватернионное сопряжение, $\overline{X} = iX_0 - \underline{X}$ – бикватернион, сопряженный X. Квадратные скобки в (3) и всегда в дальнейшем обозначают векторное, а круглые – скалярное произведение трехмерных векторов.

Наряду с вещественным пространством Лобачевского, реализуемом на (1), будем рассматривать мнимое пространство Лобачевского, реализуемое на однополостном гиперболоиде:

$$X\overline{X} = -\underline{X}\underline{X} - X_0 X_0 = X_1{}^2 + X_2{}^2 + X_3{}^2 - X_0{}^2 = R^2, \tag{4}$$

где $R = i\rho$. В каждом из пространств, реализуемых на поверхностях (1), (4), определены орисферы. Конус псевдоевклидова пространства, точки которого являются бесконечно удаленными как для точек вещественного, так и мнимого пространства Лобачевского, определяется уравнением

$$X\overline{X} = -\underline{X}\underline{X} - X_0 X_0 = X_1{}^2 + X_2{}^2 + X_3{}^2 - X_0{}^2 = 0. \tag{5}$$

Далее, не нарушая общности, примем $\rho = R = 1$.

Отметим, что в проективной схеме все три подпространства (1), (4), (5) четырехмерного псевдоевклидового пространства, которые являются инвариантными относительно действия преобразований группы $SO(3.1)$, объединяются в единое расширенное пространство Лобачевского.

Преобразования группы движений трехмерного пространства Лобачевского, изоморфной группе Лоренца, в бикватернионах задается как [1]:

$$X' = A(\underline{q})XA(-\underline{q}^*), \tag{6}$$

где бикватернионы задаются формулами

$$A(\underline{q})\overline{A}(\underline{q}) = A(\underline{q})A(-\underline{q}) = 1\,,\quad A(\underline{q}^*)\overline{A}(\underline{q}^*) = A(\underline{q}^*)A(-\underline{q}^*) = 1, \tag{7}$$

$$A(\underline{q}) = A_0 + \underline{A} = \frac{1+\underline{q}}{\sqrt{1+(\underline{q}^2)}}\,,\quad A(-\underline{q}^*) = A_0{}^* - \underline{A}^* = \frac{1-\underline{q}^*}{\sqrt{1+(\underline{q}^{*2})}}, \tag{8}$$

$$A(\underline{q}'') = A(\langle \underline{q}', \underline{q}\rangle) = A(\underline{q}')A(\underline{q})\,,\quad A(\underline{q}''^*) = A(\langle \underline{q}'^*, \underline{q}^*\rangle) = A(\underline{q}'^*)A(\underline{q}^*), \tag{9}$$

а

$$\underline{q}'' = \langle \underline{q}', \underline{q}\rangle = \frac{\underline{q}' + \underline{q} + [\underline{q}'\underline{q}]}{1-(\underline{q}'\underline{q})}\,,\ \underline{q}''^* = \langle \underline{q}'^*, \underline{q}^*\rangle = \frac{\underline{q}'^* + \underline{q}^* + [\underline{q}'^*\,\underline{q}^*]}{1-(\underline{q}'^*\,\underline{q}^*)}. \tag{10}$$

Стационарной группой вектора X (малой группой Лоренца по терминологии Ф. И. Федорова) называется подгруппа преобразований из $SO(3.1)$, оставляющих этот вектор неизменным, т. е.

$$X = A(\underline{q})XA(-\underline{q}^*). \tag{11}$$

В формулах (6), (9) $L \sim A \otimes A^* \in SO(3.1)$, а $\underline{q}, \underline{q}^*$ – вектор-параметры Федорова преобразований, образующие группу относительно операции композиции (10).

Вектор-параметры преобразования группы $SO(3.1)$ (6)–(10) удовлетворяют условию

$$1 + \langle \underline{q}, -\underline{q}^* \rangle^2 \neq 0. \tag{12}$$

Выражения (6)–(11), в принципе, являтся справедливыми для вектор-параметров, на которых налагается условие (12), не нарушающее групповых свойств вектор-параметров относительно операции (10). В частности, для преобразований стационарной подгруппы (11), как установлено Ф. И. Федоровым, вектор-параметры имеют вид

$$\underline{q}_v = \underline{c} + i[\underline{v}\ \underline{c}], \tag{13}$$

где $\underline{v} = X/X_0$, $\underline{c}$ – произвольный вещественный трехмерный вектор.

В случае, который нас интересует, 4-вектор $X = iX_0 + \underline{X}$ – изотропный и удовлетворяет условию (5), тогда $X_0 = |\underline{X}|$ и поэтому $|\underline{v}| = 1$.

Будем использовать уравнения орисфер первого рода, которые в кватернионах принимают вид [7]:

$$\frac{1}{2}(X\overline{U} + U\overline{X}) = X_1U_1 + X_2U_2 + X_3U_3 - X_0U_0 = \mp 1, \tag{14}$$

и второго рода

$$\frac{1}{2}(X\overline{U} + U\overline{X}) = X_1U_1 + X_2U_2 + X_3U_3 - X_0U_0 = 0. \tag{15}$$

В формулах (14), (15) 4-векторы (бикватернионы) X псевдоевклидового пространства удовлетворяют условию (1), (4), а бикватернион U – изотропный 4-вектор, удовлетворяет условию (5). Обозначение U используется для того. чтобы различать фиксированный вектор, определяющий стационарную группу, и вектор с компонентами, которые являются текущими координатами точек орисферы. Вышесказанное позволяет сформулировать следующую теорему.

Основная теорема. Стационарная группа фиксированного бикватерниона U, удовлетворяющего условию (5), подгруппа группы движений трехмерного пространства Лобачевского, является группой движений каждой из орисфер (14), (15) и действует на орисферах фиксированного U транзитивно.

Выражения (14) и (15) инвариантны относительно преобразований группы движений трехмерного пространства Лобачевского (6) и, следовательно, инвариантны относительно преобразований стационарной группы 4-вектора $U = iU_0 + \underline{U} = i + \underline{v}$, т. е. инвариантны относительно преобразований (11) с вектор-параметром (13) с $\underline{v} = U/U_0$. Тогда при преобразовании малой группы выражение (14) примет вид

$$\frac{1}{2}[(A(\underline{q}_v)XA(-\underline{q}_v^*)\overline{U} + UA(\underline{q}_v^*)\overline{X}A(-\underline{q}_v)] = \frac{1}{2}(X'\overline{U} + U\overline{X}') = \mp 1, \tag{16}$$

а (15), соответственно, –

$$\frac{1}{2}(A(\underline{q}_v)XA(-\underline{q}_v^*)\overline{U} + UA(\underline{q}_v^*)\overline{X}A(-\underline{q}_v) = 0. \tag{17}$$

Теперь покажем, что любой 4-вектор X, удовлетворяющий условиям (14), (15), может быть преобразован в любой другой вектор, удовлетворяющий этим же условиям преобразованием (11) с вектор-параметром (13). То есть любая точка каждой из орисфер (14), (15) может быть преобразована в любую другую точку этой же орисферы таким преобразованием.

Общая схема доказательства проста. Выбираем некоторый стандартный 4-вектор (бикватернион) $\dot{X}$, принадлежащий фиксированной орисфере, разный для каждого из трех случаев (14), (15). Предполагаем, что преобразование от стандартного 4-вектора к любому произвольному 4-вектору на орисфере в каждом из указанных случаев известно. То есть для двух произвольных 4-векторов имеет место представление

$$X' = A(\underline{q}_{\underline{v}}')\dot{X}A(-\underline{q}_{\underline{v}}'^{*}), \quad X'' = A(\underline{q}_{\underline{v}}'')\dot{X}A(-\underline{q}_{\underline{v}}''^{*}). \tag{18}$$

В выражениях (18) вектор-параметры $\underline{q}_{\underline{v}}'$ и $\underline{q}_{\underline{v}}''$ (13) задаются некоторыми векторами $\underline{c}'$ и $\underline{c}''$ соответственно. Тогда преобразование от произвольного вектора X' к вектору X'' определяется из (18):

$$X'' = A(\underline{q}_{\underline{v}}'')\dot{X}A(-\underline{q}_{\underline{v}}''^{*}) = A(\underline{q}_{\underline{v}}'')A(-\underline{q}_{\underline{v}}')A(\underline{q}_{\underline{v}}')\dot{X}A(-\underline{q}_{\underline{v}}'^{*})A(\underline{q}_{\underline{v}}'^{*})A(-\underline{q}_{\underline{v}}''^{*}) =$$
$$= A(\underline{q}_{\underline{v}}'')A(-\underline{q}_{\underline{v}}')X'A(\underline{q}_{\underline{v}}'^{*})A(-\underline{q}_{\underline{v}}''^{*}) = A(\langle \underline{q}_{\underline{v}}'', -\underline{q}_{\underline{v}}'\rangle)X'A(\langle \underline{q}_{\underline{v}}'^{*}, -\underline{q}_{\underline{v}}''^{*}\rangle). \tag{19}$$

Таким образом, искомое преобразование, представляющее собой композицию преобразований (19),

$$A(\langle \underline{q}_{\underline{v}}'', -\underline{q}_{\underline{v}}'\rangle) = A(\underline{q}_{\underline{v}}')A(-\underline{q}_{\underline{v}}''), \tag{20}$$

обеспечивает преобразование произвольного 4-вектора с координатами точки на орисфере в другой 4-вектор любой другой точки на орисфере. Это означает транзитивность преобразований малой (стационарной) группы.

Связь вектор-параметров малой группы с компонентами преобразуемых 4-векторов. Приведем выражения для возможных стандартных 4-векторов, соответствующих трем случаям (14), (15). Во всех трех случаях бикватернион U будем представлять в виде $U = i + \underline{v}$. В качестве стандартных 4-векторов примем для трех случаев (14), (15) соответственно:

$$\dot{X} = i, \ \dot{X} = \underline{v}, \ \dot{X} = [\underline{v}\underline{c}]. \tag{21}$$

Теперь дадим примеры конкретных преобразований для различных стандартных 4-векторов (21). Будем опираться на формулу, дающую параметризацию 4-векторов, удовлетворяющих (1), (4), (14), (15) параметрами $\underline{c}$ преобразований стационарной подгруппы (11). Для 4-вектора, соответствующего условиям (14) со знаком минус, такая параметризация в общем случае имеет вид

$$X = i\frac{1 + \underline{c}^2 + [\underline{v}\underline{c}]^2 + 2i\{[\underline{v}\underline{c}] + [\underline{c}[\underline{v}\underline{c}]]\}}{\sqrt{(1 + \underline{c}^2 + [\underline{v}\underline{c}]^2)^2 - 4([\underline{v}\underline{c}]^2 + [\underline{c}[\underline{v}\underline{c}]]^2)}}. \tag{22}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в выполнении для X (22) условия (14) со знаком минус. Однако параметризация (22) избыточна в том смысле, что в силу условий (1), (4), (14), (15) X является функцией только двух независимых переменных, а $\underline{c}$ исходно зависит от трех произвольных переменных. Используя произвол в задании $\underline{c}$, примем, что $(\underline{v}\underline{c}) = 0$, тогда

$$X = i(1 + 2\underline{c}^2) - 2[\underline{v}\underline{c}] - 2\underline{v}\underline{c}^2. \tag{23}$$

Здесь также учтено, что $(\underline{v}^2) = 1$. Тогда в качестве независимых переменных естественным образом выступают

$$2c_2 = X_1 \text{ и } -2c_1 = X_2. \tag{24}$$

При тех же условиях на $\underline{c}$ для однополостного гиперболоида (знак «+» в выражении (14)) имеем

$$X = -2i\underline{c}^2 - 2[\underline{v}\underline{c}] + \underline{v}(1 - 2\underline{c}^2), \tag{25}$$

при этом $2c_2 = X_1$ и $-2c_1 = X_2$, а для (15)

$$X = -2ic + [\underline{v}\hat{\underline{c}}] + 2\underline{v}c. \tag{26}$$

Здесь $\hat{\underline{c}} = \underline{c} / c$ – единичный вектор по направлению $\underline{c}$. Однако легко проверить, что не вектор (26), а вектор

$$X = 2ic + [\underline{v}\hat{\underline{c}}] + 2\underline{v}c$$

удовлетворяет условиям (5), (15), т. е. его конец лежит на орисфере второго рода.

Заключение. Таким образом, нами показано, что преобразования стационарной группы изотропного вектора четырехмерного псевдоевклидового пространства образуют группу движений орисфер трехмерного расширенного пространства Лобачевского, реализуемого в данном псевдоевклидовом пространстве. Установлена связь составляющих 4-векторов, являющихся радиус-векторами точек орисфер с вектор-параметрами Федорова малой группы Лоренца изотропного 4-вектора.

Список использованной литературы

1. *Березин, А. В.* Кватернионы в релятивистской физике / А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев. – М.: УРСС, 2003.
2. *Овсиюк, Е. М.* Точно решаемые задачи квантовой механики и классической теории поля в пространствах с неевклидовой геометрией / Е. М. Овсиюк. – Минск: РИВШ, 2013.
3. *Курочкин, Ю. А.* Когерентные состояния на орисфере пространства Лобачевского / Ю. А. Курочкин, И. Ю. Рыбак, Д. В. Шелковый / Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 5. – С. 44–48.
4. Hadron as Coherent State on the Horosphere of the Lobachevsky Momentum Space / Y. Kurochkin [et al.] / Physics of the Particles and Nuclei Letters. – 2016. – Vol. 13, no 3. – P. 285–288.
5. *Федоров, Ф. И.* Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – М.: Наука, 1979.
6. *Федоров, Ф. И.* Некоторые методы релятивистской кинематики / Ф. И. Федоров // Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий, Гомель, 1971. – Дубна, 1972. – С. 3–35.
7. *Гельфанд, И. М.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин. – М.: Физматгиз, 1962. – (Обобщенные функции; вып. 5).

Поступила в редакцию 16.06.2016