ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 2 2015
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.51

В. Р. МИСЮК[1], *А. А. ПЕКАРСКИЙ*[2]

СОПРЯЖЕННЫЕ ФУКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ И СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ИХ НАИЛУЧШИХ РАВНОМЕРНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

[1]*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы*
[2]*Белорусский государственный университет*

(Поступила в редакцию 10.04.2015)

В теории приближения периодических функций посредством тригонометрических полиномов хорошо известны результаты Н. К. Бари и С. Б. Стечкина (см. [1], а также сформулированную ниже теорему 5) о связи наилучших равномерных приближений самой функции и ее сопряженной. В настоящей статье решена аналогичная задача в случае приближения функций, заданных на отрезке, посредством алгебраических многочленов.

Через $C(I)$ обозначим банахово пространство функций, непрерывных на отрезке $I=[-1,1]$. При этом норма $g\in C(I)$ определяется стандартно, т. е. $\|g\|_{C(I)}=\max\limits_{x\in I}|g(x)|$. $\mathcal{P}_n$ – множество алгебраических многочленов степени не выше n $\left(n\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}\right)$. Для функции $g\in C(I)$ введем

$$E_n(g)=\inf\left\{\|f-p_n\|_{C(I)}: p_n\in\mathcal{P}_n\right\}$$

– наилучшее равномерное приближение множеством $\mathcal{P}_n$.

Пусть функция $g(t)$ определена на отрезке I и интегрируема на нем с весом $1\big/\sqrt{1-t^2}$. Тогда $\hat{g}$ (функция, сопряженная g) определяется следующим образом:

$$\hat{g}(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_I\frac{g(t)}{t-x}\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad x\in I. \tag{1}$$

Как известно, указанный сингулярный интеграл, понимаемый в смысле главного значения по Коши, существует почти всюду на I.

Основными результатами настоящей статьи являются теоремы 1 и 2. При этом через $c, c_1, c_2,\ldots$ мы обозначаем абсолютные положительные постоянные; $c(\ldots)$, $c_1(\ldots)$, $c_2(\ldots)$, ... – некоторые положительные величины, зависящих лишь от указанных в скобках параметров.

Т е о р е м а 1. *Пусть функция $g\in C(I)$ такова, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}E_k(g)<\infty. \tag{2}$$

Тогда $\hat{g}\in C(I)$ и для любого $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$E_n(\hat{g})\le\frac{c_1}{n}\sum_{k=0}^{n}E_k(g)+c_2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}E_k(g).$$

С л е д с т в и е. *Пусть* $g \in C(I)$, $\alpha > 0$ *и* $E_n(g) = O(n^{-\alpha})$ *при* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\hat{g} \in C(I)$ *и при* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *имеет место соотношение*

$$E_n(\hat{g}) = \begin{cases} O\left(1/n^{\alpha}\right), & 0 < \alpha < 1; \\ O\left(\ln n/n\right), & \alpha = 1; \\ O\left(1/n\right), & \alpha > 1. \end{cases}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть* $g \in C(I)$ *и* $s \in \mathbb{N}$. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{s-1} E_k(g)$, *то функция* $\hat{g}$ *непрерывно дифференцируема s раз на интервале* $(-1,1)$ *и*

$$\hat{g}^{(s)}(x) = O\left(1\Big/\left(1 - x^2\right)^{s-1/2}\right) \text{ при } x \in (-1,1). \tag{3}$$

Для обсуждения теорем 1 и 2 отметим равенство

$$\int\limits_I \frac{1}{t - x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 0, \; x \in (-1,1), \tag{4}$$

которое несложно найти, используя определение главного значения несобственного интеграла по Коши. Равенство (4) является также частным случаем формулы (47.28) из [2]. Из (1) и (4) находим, что

$$\hat{g}(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\pi} \int\limits_I \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \; x \in I. \tag{5}$$

Отсюда получаем, что если p_n – алгебраический многочлен степени n, $n \in \mathbb{N}_0$, то $\hat{p}_0(x) = 0$ при $x \in I$. Если же $n \in \mathbb{N}$, то $\hat{p}_n(x) = \sqrt{1 - x^2}\, q_{n-1}(x)$ при $x \in I$, где q_{n-1} – алгебраический многочлен степени $n - 1$. В связи с этим отметим работу [3], в которой изучаются наилучшие равномерные приближения функции $\hat{g}$ посредством функций вида $\sqrt{1 - x^2}\; p_n(x)$, где $p_n \in \mathcal{P}_n$.

Если $g(x) = x$, то из (5) следует, что $\hat{g}(x) = \sqrt{1 - x^2}$. В этом случае $E_0(g) = 1$ и $E_n(g) = 0$ при $n \geq 1$. С другой стороны, из результата С. Н. Бернштейна (см., напр., [1, п. 7.2.1]) о наилучшем приближении функции $|x|$ на I находим, что $E_n(\hat{g}) \sim c / n$ при $n \to \infty$. Этот простой пример показывает следующее. Во-первых, появление переходного показателя $\alpha = 1$ в теореме 1 связано с существом решаемой задачи и, во-вторых, оценка (3) из теоремы 2 является точной.

Перейдем к доказательству теорем 1 и 2. В теории функций более известна сопряженная функция на торе $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, чем на отрезке I. Именно, сопряженная функция $\tilde{f}$ для суммируемой на $\mathbb{T}$ функции f определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} f(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \tau}{2} d\tau, \; \theta \in \mathbb{T}.$$

Здесь, как и в (1), сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В следующей лемме 1 устанавливается связь между сопряженными функциями $\hat{g}$ и $\tilde{f}$. При этом для $t \in \mathbb{R}$ мы полагаем $\operatorname{sign} t = 1$ при $t > 0$, $= -1$ при $t < 0$ и $= 0$ при $t = 0$.

Л е м м а 1. *Пусть функция* $g(t)$ *определена на отрезке I, суммируема на нем с весом* $1\Big/\sqrt{1 - t^2}$ *и* $f\left(\theta\right) = g\left(\cos\theta\right)$, $\theta \in \mathbb{T}$. *Тогда почти для всех* $\theta \in \mathbb{T}$ *имеет место равенство*

$$\hat{g}\left(\cos\theta\right) = \tilde{f}\left(\theta\right) \cdot \operatorname{sign}\left(\sin\theta\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о легко осуществить с помощью замены $x = \cos\theta$ и $t = \cos\tau$ в формуле (1) для $\hat{g}\left(x\right)$.

Введем некоторые понятия и сформулируем теоремы 3–5 и лемму 2, необходимые нам для доказательства теоремы 1.

Через $C(\mathbb{T})$ обозначим банахово пространство непрерывных функций на торе $\mathbb{T}$. Для $f \in C(\mathbb{T})$ вводится стандартная норма, т. е. $\|f\|_{C(\mathbb{T})} = \max\limits_{t\in\mathbb{T}} |f(t)|$. Через $\omega(\delta, f)$, $0 \le \delta \le \pi$, обозначим модуль непрерывности функции f. Именно, $\omega(\delta, f) = \sup\left\{ \left|f(\theta_1) - f(\theta_2)\right| : \theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{T},\ |\theta_1 - \theta_2| \le \delta \right\}$. Через $\mathcal{T}_n$ обозначим множество тригонометрических полиномов степени не выше n $(n \in \mathbb{N}_0)$. Для $f \in C(\mathbb{T})$ введем $\mathcal{E}_n(f) = \inf\left\{ \|g - t_n\|_{C(\mathbb{T})} :\ t_n \in \mathcal{T}_n \right\}$ – наилучшее приближение множеством $\mathcal{T}_n$.

Т е о р е м а 3 (Д. Джексон, см. [1, п. 5.5.4]). *Если* $f \in C(\mathbb{T})$, *то*

$$\mathcal{E}_n(f) \le 3\omega\left(\frac{1}{n}, f\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Т е о р е м а 4 (С. Б. Стечкин, см. [1, п. 6.1.1]). *Если* $f \in C(\mathbb{T})$, *то*

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \le \frac{8}{n} \sum_{k=0}^{n} \mathcal{E}_k(f),\ n \in \mathbb{N}.$$

Т е о р е м а 5 (С. Б. Стечкин, см. [1. п. 5.9.2]). *Если* $f \in C(\mathbb{T})$ *и сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{E}_k(f)$, *то* $\tilde{f} \in C(\mathbb{T})$ *и*

$$\mathcal{E}_n(\tilde{f}) \le c_1 \mathcal{E}_n(f) + c_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{E}_k(f),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Л е м м а 2 [4, гл. 3, § 1]. *Пусть* $g \in C(I)$ *и* $f(\theta) = g(\cos\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}$. *Тогда* $\mathcal{E}_n(f) = E_n(g)$ *для любого* $n \in \mathbb{N}_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $g \in C(I)$ и удовлетворяет условию (2). Положим $f(\theta) = g(\cos\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}$. Используя теорему 5 и лемму 2, получаем

$$\mathcal{E}_k(\tilde{f}) \le c_1 E_k(g) + c_2 \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} E_j(g),\ k \in \mathbb{N}_0.$$

На основании теоремы 4 отсюда находим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\omega\left(\frac{1}{n}, \tilde{f}\right) \le \frac{c_3}{n} \sum_{k=0}^{n} E_k(g) + \frac{c_4}{n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} E_j(g).$$

Меняя порядок суммирования в двойной сумме последнего неравенства, убеждаемся, что

$$\omega\left(\frac{1}{n}, \tilde{f}\right) \le \frac{c_3 + c_4}{n} \sum_{k=0}^{n} E_k(g) + \frac{c_4}{n} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} E_j(g). \tag{6}$$

Поскольку функция $f(\theta) = g(\cos\theta)$ четная, то $\tilde{f}(\theta)$ – нечетная и, значит, $\lambda(\theta) := \tilde{f}(\theta) \cdot \operatorname{sign}(\sin\theta)$ – четная функция. Используя это, несложно найти, что $\omega(\delta, \lambda) \le 2\omega(\delta, \tilde{f})$ при $0 \le \delta \le \pi$. Поэтому из (6) и теоремы 3 немедленно следует, что

$$\mathcal{E}_n(\lambda) \le \frac{c_5}{n} \sum_{k=0}^{n} E_k(g) + c_6 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(g). \tag{7}$$

Ввиду леммы 1 имеем $\lambda(\theta) = \hat{g}(\cos\theta)$ при $\theta \in [0, \pi]$ и, согласно лемме 2, $\mathcal{E}_n(\lambda) = E_n(\hat{g})$. Поэтому из (7) вытекает утверждение теоремы 1.

Следующая теорема 6 дает неравенство типа Сегё для производных сопряженного алгебраического многочлена. Доказательство теоремы 2 основано на теореме 6, и мы его не излагаем, так как оно проводится хорошо известным методом С. Н. Бернштейна доказательства обратных теорем теории аппроксимации.

Т е о р е м а 6. *Пусть* $p_n \in \mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, *и* $s \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого* $x \in (-1,1)$ *имеет место неравенство*

$$\left|\hat{p}_n^{(s)}(x)\right| \le c(s) \max\left\{\frac{n^s}{\left(1-x^2\right)^{s/2}}, \frac{n}{\left(1-x^2\right)^{s-1/2}}\right\} \cdot \|p_n\|_{C(I)} .$$

Для доказательства теоремы 6 нам понадобятся следующие теорема 7 и лемма 3.

Т е о р е м а 7 (Г. Сегё, [1, п. 4.8.22]). *Пусть* $t_n \in \mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ *и* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\left\|\tilde{t}_n^{(k)}\right\|_{C(\mathbb{T})} \le n^k \|t_n\|_{C(\mathbb{T})} .$$

Л е м м а 3 [5, с. 50]. *Пусть функция* $y = \omega(x)$ *непрерывно дифференцируема* s *раз* $(s \in \mathbb{N})$ *на интервале* $X \subset \mathbb{R}$, *а функция* $z = \varphi(y)$ *непрерывно дифференцируема* s *раз на некотором интервале, содержащем* $\omega(X)$. *Тогда сложная функция* $x \mapsto (\varphi \circ \omega)(x)$ *непрерывно дифференцируема* s *раз на* X *и имеет место равенство*

$$(\varphi \circ \omega)^{(s)} = \sum \frac{s!}{m_1!\, m_2! \ldots m_s!} \cdot \left(\varphi^{(m_1+m_2+\ldots+m_s)} \circ \omega\right) \cdot \left(\frac{\omega'}{1!}\right)^{m_1} \left(\frac{\omega''}{2!}\right)^{m_2} \ldots \left(\frac{\omega^{(s)}}{s!}\right)^{m_s} ,$$

где суммирование распространяется по всем наборам неотрицательных целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$, *удовлетворяющих условию* $1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \ldots + s \cdot m_s = s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6. Пусть $p_n \in \mathcal{P}_n$ и $t_n(\theta) := p_n(\cos\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}$. Тогда, согласно лемме 1, $\hat{p}_n(x) = \tilde{t}_n(\arccos x)$, $x \in I$. Поскольку $\|t_n\|_{C(\mathbb{T})} = \|p_n\|_{C(I)}$, то, используя теорему 7 и лемму 3, находим

$$\left|\hat{p}_n^{(s)}(x)\right| \le c_1(s) \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{n^k}{\left(1-x^2\right)^{s-k/2}}\right) \cdot \|p_n\|_{C(I)} , \ x \in (-1,1).$$

При фиксированном $x \in (-1,1)$ слагаемые в скобках монотонны относительно k, поэтому из последнего неравенства следует теорема 6.

В заключение отметим, что аналоги проблем, рассмотренных в данной работе, в монографии [6] и статье [7], изучаются для равномерных рациональных приближений функций.

Работа выполнена в соответствии с программой ГПНИ «Конвергенция», 2011–2015 гг.

Литература

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., 1977.
3. *Моторный В. П.* // Тр. МИ РАН. 2001. Т. 232. С. 268–285.
4. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. Л., 1977.
5. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. М., 1965.
6. *Lorentz G. G., Golitschek M. v., Makovoz Y.* Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin, 1996.
7. *Пекарский А. А.* // Мат. сб. 1987. Т. 133, № 1. С. 86–102.

V. R. MISIUK, A. A. PEKARSKII

CONJUGATE FUNCTIONS ON A SEGMENT AND RELATIONS FOR THEIR BEST UNIFORM POLYNOMIAL APPROXIMATIONS

Summary

A relation between the best polynomial approximations of the function assigned on a segment and the function conjugated to it is found. In the periodic case, a similar relation is obtained by S. B. Stechkin. The inequality of G. Szegö type is also proved for the derivatives of an algebraic polynomial.