ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 2 2016
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 519.216+517.518.8

Л. А. ЯНОВИЧ[1], *И. Н. ГУЛО*[2]

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ЗАДАВАЕМЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОТ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

[1]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,*
e-mail: yanovich@im.bas-net.by
[2]*Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка, Минск, Беларусь,*
e-mail: gulo_irina@mail.ru

Для случайных процессов, задаваемых как функционал от квадратичного многочлена броуновского движения, были предложены некоторые аппроксимации. Проведен вычислительный эксперимент для нахождения погрешностей математических ожиданий для случая тригонометрических функций.

Ключевые слова: квадратурные формулы, случайные процессы, стандартный винеровский процесс, математическое ожидание, моменты случайных процессов.

L. A. YANOVICH[1], *I. N. GULO*[2]

CALCULATION OF MOMENTS OF STOCHASTIC PROCESSES DEFINED BY TRIGONOMETRIC FUNCTIONS OF BROWNIAN MOTION

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,*
e-mail: yanovich@im.bas-net.by
[2]*Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus,*
e-mail: gulo_irina@mail.ru

Some approximations for stochastic processes defined as a functional of quadratic polynomials of Brownian motion were proposed. For finding errors of the mathematical expectations in the case of trigonometric functions, computational experiment was conducted.

Keywords: quadrature formulas, stochastic processes, standard Wiener process, mathematical expectation, moments of random processes.

Введение. Вычисление средних значений и других вероятностных характеристик случайных процессов, определяемых посредством функций от некоторых заданных процессов, относится к широко распространенной задаче. В большинстве случаев это сводится к вычислению интегралов, общий вид которых определяется вероятностными характеристиками исходного случайного процесса. Точное вычисление таких интегралов обычно возможно для незначительного числа специальных видов подынтегральных функций, поэтому основными способами приближенного вычисления вероятностных характеристик такого класса процессов являются квадратурные формулы.

Ранее в статье [1] были предложены некоторые способы приближения случайных процессов вида $\xi(t) = F(W(t))$, где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, а также рассмотрены квадратурные формулы для вычисления центральных моментов таких процессов. Данная работа является продолжением [1]. В ней рассмотрены аналогичные задачи для процессов вида

$$\xi(t) = F\left(\alpha W^2(t) + \beta W(t) + \gamma\right), \qquad (1)$$

где $F(x)$ – заданная непрерывная на R функция, $W(t)$ – также стандартный винеровский процесс, т. е. гауссовский случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией $B(t,s) = \min(t,s)$ $(t, s \in [0;1])$; α, β, γ – действительные числа или независимые случайные величины.

1. Кадратурные формулы для вычисления математического ожидания. Воспользуемся известной формулой (см. напр., [2]) для вычисления k-х моментов случайного процесса (1):

$$m_k(t) = E\left\{\xi^k(t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} F^k\left(2\alpha t x^2 + \beta\sqrt{2t}x + \gamma\right)dx, \tag{2}$$

($k = 0,1, 2…$), функция $F(x)$ и параметры α, β, γ таковы, что интеграл (2) сходится.

Для приближенного вычисления интеграла (2), как и в [1], воспользуемся квадратурной формулой [3] наивысшей алгебраической степени точности для интегралов по числовой оси с весовой функцией $p(x) = e^{-x^2}$:

$$m_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu F^k\left(2\alpha t x_\nu^{\ 2} + \beta\sqrt{2t}x_\nu + \gamma\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} r_n\left(F^k\right), \tag{3}$$

где x_ν – корни многочлена Эрмита n-й степени $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$, A_ν – коэффициенты квадратурной формулы, а $r_n\left(F^k\right)$ – ее остаточный член. Коэффициенты A_ν могут задаваться аналитически разными способами. Мы будем использовать следующее представление для A_ν:

$$A_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} l_{n\nu}(x)dx,$$

где $l_{n\nu}(x) = \dfrac{\left(x - x_1\right)\cdots\left(x - x_{\nu-1}\right)\left(x - x_{\nu+1}\right)\cdots\left(x - x_n\right)}{\left(x_\nu - x_1\right)\cdots\left(x_\nu - x_{\nu-1}\right)\left(x_\nu - x_{\nu+1}\right)\cdots\left(x_\nu - x_n\right)}$.

Обозначим квадратурную сумму в формуле (3) через

$$S_{nk}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu F^k\left(2\alpha t x_\nu^{\ 2} + \beta\sqrt{2t}x_\nu + \gamma\right). \tag{4}$$

Так как рассматриваемая квадратурная формула точна для алгебраических многочленов степени $2n - 1$, то для широкого класса функций $F^k(x)$ последовательность $S_{nk}(t)$ при $n \to \infty$ будет (см. также [3]) сходиться к моменту $m_k(t)$.

Рассмотрим далее последовательность случайных процессов

$$\xi_{nk}(t) = \sum_{\nu=1}^{n} l_{n\nu}\left(\frac{W(t)}{\sqrt{2t}}\right) F^k\left(2t\alpha x_\nu^{\ 2} + \sqrt{2t}\beta x_\nu + \gamma\right) \quad (n,\ k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5}$$

Для вычисления математического ожидания случайного процесса $\eta(t)$ вида $\eta(t) = f\left(W(t)\right)$ воспользуемся [2] формулой

$$E\left\{\eta(t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f\left(\sqrt{2t}x\right)dx, \tag{6}$$

где $y = f(x)$ – функция, для которой несобственный интеграл в правой части (6) сходится.

На основании этой формулы, а также с учетом формул (2) и (3), можно показать, что справедливо равенство $E\left\{\xi_{nk}(t)\right\} = S_{nk}(t)$, где $S_{nk}(t)$ – квадратурная сумма (4). И таким образом среднее значение последовательности случайных процессов (5) будет при $n \to \infty$ сходится к среднему значению исходного процесса (1) для тех функций $F(x)$, для которых имеет место сходимость соответствующего квадратурного процесса.

Рассмотрим примеры случайных процессов вида (1) и для моментов первого порядка приведем результаты вычислительного эксперимента.

Для случайного процесса

$$\xi(t) = \theta\cos\left(\alpha W^2(t) + \beta W(t) + \gamma\right), \tag{7}$$

где θ – произвольная фиксированная константа, используя (2) и формулу для вычисления такого вида интегралов (см. [4 с. 499, формула 3.923.2]), можем вычислить момент первого порядка (математическое ожидание):

$$m_c(t) = E\{\xi(t)\} = \frac{\theta}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos\left(2\alpha t x^2 + \beta\sqrt{2t}x + \gamma\right)dx =$$

$$= \frac{\theta}{\sqrt[4]{1+4\alpha^2t^2}}\exp\left\{-\frac{\beta^2 t}{2\left(1+4\alpha^2t^2\right)}\right\}\cos\left\{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\alpha t) + \frac{\left(4\alpha^2\gamma - \alpha\beta^2\right)t^2 + \gamma}{1+4\alpha^2t^2}\right\},\ t\in[0;1].$$

И, соответственно, приближенный процесс $\xi_{nc}(t)$ для (7), в силу формулы (5), примет следующий вид:

$$\xi_{nc}(t) = \theta\sum_{\nu=1}^{n} l_{n\nu}\left(\frac{W(t)}{\sqrt{2t}}\right)\cos\left(2\alpha t x_\nu^{\ 2} + \beta\sqrt{2t}x_\nu + \gamma\right),$$

а квадратурная сумма (4) $S_{nc}(t)$ будет задаваться, соответственно, формулой

$$S_{nc}(t) = \frac{\theta}{\sqrt{\pi}}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu\cos\left(2\alpha t x_\nu^{\ 2} + \beta\sqrt{2t}x_\nu + \gamma\right),$$

которая является приближением к точному математическому значению $m_c(t)$.

При $n = 9$ численные значения узлов x_ν и коэффициентов A_ν в формуле (4) таковы [3]:

$x_9 = -x_1 = 3{,}190993202$ $\quad A_9 = A_1 = 0{,}0000396069774$
$x_8 = -x_2 = 2{,}266580585$ $\quad A_8 = A_2 = 0{,}0049436242800$
$x_7 = -x_3 = 1{,}468553289$ $\quad A_7 = A_3 = 0{,}0884745274000$
$x_6 = -x_4 = 0{,}723551019$ $\quad A_6 = A_4 = 0{,}4326515590000$
$x_5 = 0$ $\quad A_5 = 0{,}7202352160000$

П р и м е р 1. Для случайного процесса (7) значение погрешности $r_{nc}(t) = m_c(t) - S_{nc}(t)$ вычисления математического ожидания $m_c(t)$ в точках $t_i = \frac{i}{5}\quad (i = 0,1,\ldots,5)$ для α = β = γ = θ = 1 и $n = 9$ приведено в табл. 1.

Таблица 1

t_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$S_{nc}(t_i)$	0,54043931	0,35652498	0,25443564	0,20050560	0,1536785	0,07416710
$m_c(t_i)$	0,54030231	0,356435971	0,254201549	0,195744407	0,1574841	0,13041004
$r_{nc}(t_i)$	–0,00013701	$-8{,}90121\cdot10^{-5}$	–0,00023409	–0,0047612	0,0038057	0,05624294

Для случайного процесса

$$\zeta(t) = \theta\sin\left(\alpha W^2(t) + \beta W(t) + \gamma\right), \tag{8}$$

используя формулу (см. [4. с. 499, формула 3.923.1]), аналогично можно вычислить точное значение момента первого порядка:

$$m_s(t) = E\left\{F(W(t))\right\} = \frac{\theta}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin\left(2\alpha t x^2 + \beta\sqrt{2t}x + \gamma\right)dx =$$

$$= \frac{\theta}{\sqrt[4]{1+4\alpha^2 t^2}}\exp\left\{-\frac{\beta^2 t}{2\left(1+4\alpha^2 t^2\right)}\right\}\sin\left\{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\alpha t\right) + \frac{\left(4\alpha^2\gamma - \alpha\beta^2\right)t^2 + \gamma}{1+4\alpha^2 t^2}\right\}.$$

И, соответственно, приближение $\xi_{ns}(t)$ для процесса (8) будет

$$\xi_{ns}(t) = \theta\sum_{\nu=1}^{n} l_{n\nu}\left(\frac{W(t)}{\sqrt{2t}}\right)\sin\left(2\alpha t x_\nu^{\ 2} + \beta\sqrt{2t}x_\nu + \gamma\right),$$

а $S_{ns}(t)$ будет задаваться формулой

$$S_{ns}(t) = \frac{\theta}{\sqrt{\pi}}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \sin\left(2\alpha t x_\nu^{\ 2} + \beta\sqrt{2t}x_\nu + \gamma\right).$$

Ниже приведем аналогичные численные результаты, используя также квадратурную формулу с девятью узлами.

П р и м е р 2. Для случайного процесса (8) значение погрешности $r_{ns}(t) = m_s(t) - S_{ns}(t)$ вычисления момента первого порядка $m_s(t)$ в точках $t_i = \frac{i}{5}$ (i = 0; 1;…5) для $\alpha = \beta = \gamma = \theta = 1$ и $n = 9$ приведено в табл. 2.

Таблица 2

t_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$S_{ns}(t_i)$	0,8416844	0,80914724	0,73963709	0,68245020	0,65538644	0,61321391
$m_s(t_i)$	0,84147099	0,80894253	0,73975828	0,67993219	0,63129265	0,59088133
$r_{ns}(t_i)$	−0,00021338	−0,00020471	0,00012119	−0,00251801	−0,02409379	−0,02233258

2. О других процессах, аппроксимирующих случайные процессы вида (1). Рассмотрим последовательности процессов $\xi_n(t)\quad (n = 1, 2, ...)$ следющих двух видов:

$$\xi_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\ \sum_{\nu=0}^{n-k} c_{k\nu} W^{2k+2\nu}(t) f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{9}$$

и

$$\xi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(1-t)^{n-k}}{(2k-1)!!} W^{2k}(t) f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{10}$$

где $c_{k\nu} = (-1)^\nu \dfrac{n!}{k!\nu!(n-k-\nu)!(2k+2\nu-1)!!}$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $f(t)$ – любая непрерывная на [0; 1] функция. Нетрудно убедиться, что математические ожидания $E\left\{\xi_n(t)\right\}$ этих процессов совпадают с многочленом Бернштейна n-й степени $B_n(f;t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ для функции $f(t)$, $t \in [0; 1]$.

Если $f(t) = m_c(t)$ или $f(t) = m_s(t)$, то значения математических ожиданий этих процессов будут задаваться соответственно формулами

$$E\left\{\xi_n(t)\right\} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} m_c\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$E\left\{\xi_n(t)\right\} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} m_s\left(\frac{k}{n}\right),$$

и, следовательно, средние значения процессов (9) и (10) при $n \to \infty$ будут стремиться к средним значениям процессов (7) и (8).

П р и м е р 3. Значения математических ожиданий $m_c(t)$ и $m_s(t)$ случайных процессов, рассмотренных в примерах 1 и 2, могут быть также вычислены приближенно с помощью многочленов Бернштейна. Численные значения погрешности $r_{nc}(t) = m_c(t) - B_n(m_c;t)$, где $B_n(m_c;t) = E\left\{\xi_{nc}(t)\right\}$ в точках $t_i = \frac{i}{5}$, $(i = 1,2,3,4)$ для $\alpha = \beta = \gamma = \theta = 1$ и n = 20 для случайного процесса $\xi(t) = \theta\cos\left(\alpha W^2(t) + \beta W(t) + \gamma\right)$ приведены в табл. 3, а для случайного процесса $\zeta(t) = \theta\sin\left(\alpha W^2(t) + \beta W(t) + \gamma\right)$ значения погрешности $r_{ns}(t) = m_s(t) - B_n(m_s;t)$, где $B_n(m_s;t) = E\left\{\xi_{ns}(t)\right\}$, – в табл. 4.

Таблица 3

t_i	0,2	0,4	0,6	0,8
$B_n(m_c; t_i)$	0,364790426	0,260616407	0,198791924	0,15861822
$m_c(t_i)$	0,356435971	0,254201549	0,195744407	0,1574841
$r_{nc}(t_i)$	–0,008354455	–0,006414858	–0,003047517	–0,00113412

Таблица 4

t_i	0,2	0,4	0,6	0,8
$B_n(m_s; t_i)$	0,806119176	0,741247032	0,681612519	0,632124146
$m_s(t_i)$	0,808942529	0,739758284	0,679932185	0,631292646
$r_{ns}(t_i)$	0,002823353	–0,001488748	–0,001680333	–0,000831501

Точность формул, полученных с помощью многочленов Бернштейна, согласуется с теоретическим результатом о невысокой точности положительных линейных операторов.

Приближенные формулы для процессов вида (1) могут быть построены и на основе других линейных положительных операторов [5, 6], определенных на пространстве $C(T)$ – непрерывных на отрезке T функций. Например, можно рассмотреть оператор Г. М. Миракьяна

$$M_n(f;t) = e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k t^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{11}$$

где $f(t) \in C(T)$. Как известно, при $n \to \infty$ он равномерно сходится на конечном отрезке $T = [0; a]$ $(a > 0)$ к непрерывной на этом отрезке функции $f(t)$.

В частности, для случайных процессов (7) и (8) аппроксимирующими процессами будут

$$\tilde{\xi}_n(t) = e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \frac{W^{2k}(t)}{(2k-1)!!} f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{12}$$

где $f(t) = m_c(t)$ и $f(t) = m_s(t)$, $0 \le t \le 1$.

Если сумму ряда в операторе Г. М. Миракьяна (11) заменить на N-ю частичную сумму $M_N(f;t) = e^{-Nt} \sum_{k=0}^{N} \frac{N^k t^k}{k!} f\left(\frac{k}{N}\right)$, а сумму ряда в правой части (12) на соответствующую частичную сумму $\tilde{\xi}_N(t) = e^{-Nt} \sum_{k=0}^{N} \frac{N^k}{k!} \frac{W^{2k}(t)}{(2k-1)!!} f\left(\frac{k}{N}\right)$, то для случайного процесса $\xi(t) = \theta\cos\left(\alpha W^2(t) + \beta W(t) + \gamma\right)$

верно $M_N(m_c;t) \approx E\left\{\tilde{\xi}_{Nc}(t)\right\}$. При $N = 50$ получены численные значения погрешности $r_{Nc}(t) = m_c(t) - M_N(m_c;t)$.в точках $t_i = \frac{i}{5}$, $(i = 1,2,3,4)$ для $\alpha = \beta = \gamma = \theta = 1$, которые приведены в табл. 5.

Таблица 5

t_i	0,2	0,4	0,6	0,8
$M_N(m_c;\, t_i)$	0,360715921	0,258361488	0,198650001	0,153222897
$m_c(t_i)$	0,356435971	0,254201549	0,195744407	0,1574841
$r_{Nc}(t_i)$	–0,00427995	–0,004159939	–0,002905594	0,004261203

Аналогично, для случайного процесса $\zeta(t) = \theta\sin\left(\alpha W^2(t) + \beta W(t) + \gamma\right)$ значения погрешности $r_{Ns}(t) = m_s(t) - M_N(m_s;t)$ приближения математического ожидания $m_s(t)$ N-й частичной суммой $M_N(m_s;t) \approx E\left\{\tilde{\xi}_{Ns}(t)\right\}$ оператора Г. М. Миракьяна (11), в тех же точках $t_i = \frac{i}{5}$, $(i = 1,2,3,4)$ и при тех же значениях параметров $\alpha = \beta = \gamma = \theta = 1$, приведены в табл. 6.

Таблица 6

t_i	0,2	0,4	0,6	0,8
$M_N(m_s;\, t_i)$	0,807594304	0,74085296	0,681421411	0,602473111
$m_s(t_i)$	0,808942529	0,739758284	0,679932185	0,631292646
$r_{Ns}(t_i)$	0,001348225	–0,00109468	–0,001489226	0,028819535

Заключение. В данной статье для случайных процессов вида (1) построены последовательности приближений (5), средние значения которых при $n \to \infty$ сходятся к среднему значению исходных процессов (1). Аналогичные приближения построены и для процессов гармонического типа видов (7) и (8), для которых проведен вычислительный эксперимент при определенных численных значениях параметров, входящих в эти процессы.

Аналогичные результаты могут быть получены для дисперсии и других вероятностных характеристик, рассматриваемых в данной работе случайных процессов, при незначительных изменениях в описанных здесь методах приближения.

Работа выполнена в рамках проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (№ Ф14Д–002).

Список использованной литературы

1. *Янович, Л. А.* О приближенном вычислении функций от процесса броуновского движения / Л. А. Янович, И. Н. Гуло // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 5–10.

2. *Янович, Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам / Л. А. Янович. − Минск: Наука и техника, 1976.

3. *Крылов, В. И.* Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967.

4. *Градштейн, И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963.

5. *Коровкин, П. П.* Линейные операторы и теория приближения / П. П. Коровкин. – М.: Физматлит, 1959. (*Korovkin, P. P.* Linear operators and approximation theory / P. P. Korovkin. – Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1960.)

6. *Altomare, F.* Korovkin-type Approximation Theory and its Applications / F. Altomare, M. Campiti. – Berlin; New York: de Gruyter, 1994.

Поступила в редакцию 20.05.2016