

ISSN 1561-2430 (Print)  
 ISSN 2524-2415 (Online)  
 УДК 517.977

Поступила в редакцию 22.11.2017  
 Received 22.11.2017

**И. В. Гайшун<sup>1</sup>, В. В. Горячкин<sup>2</sup>, В. В. Крахотко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

<sup>2</sup>*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

## УПРАВЛЕНИЕ АНСАМБЛЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

**Аннотация.** Данная статья посвящена исследованию задачи управляемости дискретной системы с неопределенностями. Введено понятие ансамбля дискретных двухпараметрических линейных систем – как совокупности систем, коэффициенты которых принадлежат некоторым заданным множествам. Рассмотрена задача: для любого начального состояния из наперед заданного множества найти одно и то же управление (универсальное управление) для всех систем ансамбля, переводящее все решения этих систем в минимальную окрестность нуля за конечное время. В случае интервальной неопределенности нахождение управления сведено к решению задачи нелинейного программирования, сформулированной по коэффициентам систем ансамбля и интервальному множеству начальных состояний. Предложен конструктивный алгоритм построения искомого управления, приведен пример.

**Ключевые слова:** двухпараметрическая дискретная линейная система, интервальные матрицы и векторы, управляемость, нелинейное программирование

**Для цитирования.** Гайшун, И. В. Управление ансамблем линейных двухпараметрических дискретных систем / И. В. Гайшун, В. В. Горячкин, В. В. Крахотко // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 20–23.

**I. V. Gaishun<sup>1</sup>, V. V. Goryachkin<sup>2</sup>, V. V. Krakhotko<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

<sup>2</sup>*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## CONTROL OF THE ENSEMBLE OF LINEAR TWO-PARAMETER DISCRETE SYSTEMS

**Abstract.** The controllability of discrete systems with uncertainties is considered in this article. The concept of the ensemble of linear two-parameter discrete systems is introduced as a set of systems, whose coefficients belong to some given sets. The following problem is considered: for any initial state from the pre-assigned sets, one and the same control (universal control) is found for all ensemble systems reducing all solutions of these systems to a minimum zero neighborhood for finite time. In the case of interval uncertainty, finding the control is reduced to solving a nonlinear programming problem formulated in terms of the coefficients of the ensemble systems and the interval set of initial states. A constructive algorithm for building a desired control is proposed, an example is given.

**Keywords:** linear two-parameter discrete system, interval matrices and vectors, controllability, nonlinear programming

**For citation.** Gaishun I. V., Goryachkin V. V., Krakhotko V. V. Control of the ensemble of linear two-parameter discrete systems. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 20–23 (in Russian).

Ансамбль дискретных двухпараметрических линейных систем – это совокупность систем, коэффициенты которых принадлежат некоторым заданным множествам (как правило, некоторым интервалам).

Рассматривается следующая задача: для любого начального состояния из наперед заданного множества определить такое управление (одно и то же для всех систем ансамбля), что в некоторой точке  $(\tau, \sigma)$  сечения  $x(\tau, \sigma)$  решений  $x(t, s)$  каждой из систем попадут в минимальную окрестность нуля за конечное время.

Предложен алгоритм построения указанного решения, в основу которого положена задача нелинейного программирования, сформированная по параметрам исследуемого ансамбля.

**1. Постановка задачи.** Вопросы управляемости линейных дискретных многопараметрических систем исследованы в монографии [1]. Однако часто точные значения коэффициентов и на-

чальных состояний таких систем неизвестны, заданы лишь множества, в которых эти параметры могут изменяться. В связи с этим важное значение имеют задачи управления всеми системами, получаемыми при различных вариациях коэффициентов и начальных состояний.

Пусть  $[A]$ ,  $[D]$ ,  $[B]$  – некоторые множества в пространстве  $n \times n$  и  $n \times m$  действительных матриц. Тогда

$$x(t+1, s) = Ax(t, s) + Dx(t, s+1) + Bu(t, s) \quad (1)$$

– ансамбль двухпараметрических систем, когда матрицы  $A$ ,  $D$  и  $B$  принимают (независимо друг от друга) произвольные значения из множеств  $[A]$ ,  $[D]$  и  $[B]$  соответственно. В системах (1) независимые переменные  $t$  и  $s$  изменяются соответственно в множестве  $\mathbf{Z}_+$  – положительных целых чисел и в множестве  $\mathbf{Z}$  – целых чисел. Управление  $u(t, s)$  принимает значения в некотором множестве  $U$ .

Ясно, что при любом начальном условии (состоянии)

$$x(0, s) = \alpha(s) \quad (2)$$

из множества  $[\alpha(s)]$  и при любых фиксированных матрицах  $A$ ,  $D$ ,  $B$  и управлении  $u(t, s)$  существует [2] единственное решение

$$x(t, s) = \sum_{j=0}^t G(t, j)\alpha(s+j) + \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{t-i-1} G(t-i-1, j)Bu(i, s+j),$$

где матрицы  $G(i, j)$  находятся из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} G(i+1, j) &= AG(i, j) + DG(i, j-1), \\ G(0, 0) &= E, G(i, j) = 0 \text{ при } j < 0 \text{ или } i < j. \end{aligned} \quad (3)$$

В данной работе исследуются следующие задачи: определить такое управление  $u(t, s)$ ,  $t = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $s = \sigma, \sigma+1, \dots, \sigma+t-1$ , что решение  $x(t, s)$  с любым начальным условием (2) всякой системы (1) удовлетворяет равенству  $x(n, \sigma) = 0$ .

Очевидно, что так поставленная задача имеет решение лишь в исключительных случаях. Поэтому модернизируем ее следующим образом: построить такое управление  $u(t, s)$ ,  $t = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $s = \sigma, \sigma+1, \dots, \sigma+t-1$ , что каждое решение  $x(t, s)$  подчиняется неравенству

$$|x(n, \sigma)| \leq \varepsilon, \quad (4)$$

где  $|x(n, \sigma)|$  – вектор, составленный из модулей компонент вектора  $x(n, \sigma)$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ , причем величина  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$  является минимальной (неравенство (4) понимается покомпонентно). Таким образом, управление  $u(t, s)$  должно приводить все траектории  $x(n, \sigma)$  в минимальную окрестность нуля за время  $t = n$ . Управления, обладающие такими свойствами (следуя [3]), будем называть универсальными.

**2. Сведение к задаче нелинейного программирования.** Обозначим через  $[L]$  и  $[M]$  совокупность матриц:

$$L = (G(n, 0), G(n, 1), \dots, G(n, n)),$$

$$M = (G(n-1, 0)B, \dots, G(n-1, n-1)B, G(n-2, 0)B, \dots, G(0, 0)B),$$

когда  $A$ ,  $D$ ,  $B$  пробегают независимо друг от друга множества  $[A]$ ,  $[D]$ ,  $[B]$  соответственно. Пусть, кроме того,

$$[f] = \{f = -L\alpha, L \in [L], \alpha = (\alpha(\sigma), \alpha(\sigma+1), \dots, \alpha(\sigma+n)) \in [\alpha] = ([\alpha(\sigma)], [\alpha(\sigma+1)], \dots, [\alpha(\sigma+n)])\}.$$

Тогда семейство  $\{x(n, \sigma)\}$  сечений [2]  $x(t, s)$  всех решений систем (1)–(2) в точке  $(n, \sigma)$  описывается соотношением

$$x(n, \sigma) = Mu - f, \\ u = (u(0, \sigma), u(0, \sigma + 1), \dots, u(0, \sigma + n - 1), u(1, \sigma), \dots, u(n - 1, \sigma)),$$

где элементы  $M \in [M]$ ,  $f \in [f]$  вычислены на одной и той же реализации

$$(A, D, B, \alpha(s)) \in ([A], [D], [B], [\alpha(s)]).$$

Значит, попадание семейства  $x(n, \sigma)$  в  $\varepsilon$ -окрестность нуля эквивалентно неравенству

$$-\varepsilon \leq Mu - f \leq \varepsilon, \tag{5}$$

понимаемому покомпонентно.

Минимальная  $\varepsilon$ -окрестность может быть найдена как решение задачи

$$e' \varepsilon \rightarrow \min, \quad e = (1, 1, \dots, 1), \\ -\varepsilon \leq Mu - f \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0, \\ u \in U. \tag{6}$$

Далее считаем, что  $[A]$ ,  $[D]$ ,  $[B]$  – интервальные матрицы,  $[\alpha]$  – интервальный вектор-столбец.

Обозначим  $A_0, \Delta A, |[A]|$ ;  $D_0, \Delta D, |[D]|$ ;  $B_0, \Delta B, |[B]|$ ;  $\alpha_0, \Delta \alpha, |[\alpha]|$  центр, радиус и модуль соответствующего интервального объекта [4].

Пусть  $G_0(i, j)$ ,  $G_{| \bullet |}(i, j)$ ,  $G_{[ \bullet ]}(i, j)$  – матрицы, полученные из (3) при  $A = A_0$ ,  $D = D_0$ ;  $A = |A_0|$ ,  $D = |D_0|$ ;  $A = [A]$ ,  $D = [D]$ . Множества  $[M]$ ,  $[L]$ ,  $[f]$  также считаем интервальными объектами с центрами и радиусами  $M_0, L_0, f_0$  и  $\Delta M, \Delta L, \Delta f$ . Воспользовавшись результатами работы [2], легко установить, что

$$M_0 = (G_0(n-1, 0)B_0, \dots, G_0(n-1, n-1)B_0, G_0(n-2, 0)B_0, \dots, G_0(0, 0)B_0), \\ L_0 = (G_0(n, 0), \dots, G_0(n, 1), \dots, G_0(n, n)), \\ \Delta M = (C(n-1, 0), \dots, C(n-1, n-1), C(n-2, 0), \dots, C(0, 0)), \\ \Delta L = (V(n, 0), \dots, V(n, 1), \dots, V_0(n, n)), \\ \Delta f = \Delta L |[\alpha]| + |L_0| \Delta \alpha,$$

где  $V[i, j] = G_{[ \bullet ]}(i, j) - G_{| \bullet |}(i, j)$ ,  $C(i, j) = V(i, j) |[B]| + |G_0(i, j)| \Delta B$ .

Поэтому из результатов работ [3, 4] следует, что задача (6) эквивалентна следующей задаче нелинейного программирования:

$$e' \varepsilon \rightarrow \min, \\ M_0 u + \Delta M |u| \leq f_0 - \Delta f + \varepsilon, \\ M_0 u - \Delta M |u| \geq f_0 + \Delta f - \varepsilon, \\ \varepsilon \geq 0, \quad u \in U. \tag{7}$$

**З а м е ч а н и е.** Если  $U$  – многогранник, то согласно [3] задача (7) эквивалентна задаче линейного программирования

$$e' \varepsilon \rightarrow \min, \\ M_0 u + \Delta M |w| - \varepsilon \leq f_0 - \Delta f, \\ -M_0 u + \Delta M |w| - \varepsilon \leq -f_0 - \Delta f, \\ -w \leq u \leq w, \quad \varepsilon \geq 0. \tag{8}$$

Эта задача (8), очевидно, всегда разрешима, при этом, если  $\varepsilon^*$ ,  $u^*$ ,  $w^*$  – ее решение, то  $\varepsilon = \varepsilon^*$  определяет минимальную окрестность, куда попадут все векторы  $x(n, \sigma)$ , а  $u(t, s) = u^*(t, s)$  – универсальное управление [3].

Таким образом, если  $U$  – многогранник, то управление, решающее поставленную задачу, находится из решения задачи линейного программирования (8). Когда множество  $U$  произвольно, следует использовать задачу нелинейного программирования (7).

Пример. Пусть

$$[A] = \begin{pmatrix} [-1,75; -0,25] & [0,88; 2,13] \\ [0,00; 0,00] & [2,25; 3,75] \end{pmatrix}, [D] = \begin{pmatrix} [0,00; 0,00] & [0,75; 1,25] \\ [-1,50; -0,50] & [-3,75; -2,25] \end{pmatrix},$$

$$[B] = \begin{pmatrix} [-3,50; -2,50] \\ [2,75; 3,25] \end{pmatrix}, [\alpha(\sigma)] = \begin{pmatrix} [0,50; 1,50] \\ [-1,25; -0,75] \end{pmatrix}, [\alpha(\sigma+1)] = \begin{pmatrix} [0,38; 0,63] \\ [1,75; 2,25] \end{pmatrix},$$

$$[\alpha(\sigma+2)] = \begin{pmatrix} [0,50; 1,90] \\ [-4,75; -3,25] \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрицы  $M_0$ ,  $\Delta M$  и векторы  $f_0$ ,  $\Delta f$  равны

$$M_0 = \begin{pmatrix} 7,50 & 3,00 & 3,00 \\ 9,00 & -6,00 & 3,00 \end{pmatrix}, \Delta M = \begin{pmatrix} 5,53 & 1,06 & 0,50 \\ 3,19 & 5,44 & 0,25 \end{pmatrix},$$

$$f_0 = \begin{pmatrix} -3,05 \\ 77,40 \end{pmatrix}, \Delta f = \begin{pmatrix} 40,22 \\ 84,23 \end{pmatrix}.$$

Решая задачу (8), находим универсальное управление  $u = (u(0, \sigma), u(0, \sigma + 1), u(1, \sigma)) = (4,50606; 0; 12,2818)$ , при этом  $e'\varepsilon = 172,954$  и  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (71,2794; 101,675)$  определяет окрестность нуля, куда попадут все векторы  $x(2, \sigma)$ .

Если  $u = 0$ , то  $e'\varepsilon = 204,9$  ( $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (43,27; 161,63)$ ), т. е. с помощью ненулевого универсального управления по сумме невязок добились более приемлемого результата.

#### Список использованных источников

1. Гайшун, И. В. Многопараметрические системы управления / И. В. Гайшун. – Минск: Наука і тэхніка, 1996. – 200 с.
2. Гайшун, И. В. Оценка решений двухпараметрической дискретной системы с интервальными коэффициентами / И. В. Гайшун, В. В. Горячкин, В. В. Крахотко // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 3. – С. 5–8.
3. Ащепков, Л. Т. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления / Л. Т. Ащепков, Д. А. Давыдов. – М.: Наука, 2006. – 151 с.
4. Алефельд, Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 360 с.

#### References

1. Gaichun I. V. *Multivariable control system*. Minsk, Navuka i tehnika Publ, 1996. 200 p. (in Russian).
2. Gaichun I. V., Goryachkin V. V., Krakhotko V. V. Estimate solutions to two-parameter discrete systems with interval coefficients. *Vestsi Natsional'nai akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2014, no. 3, pp. 5–8 (in Russian).
3. Aschepkov L. T. Davydov D. A. *Universal solutions of interval problems of optimization and control*. Moscow, Nauka Publ, 2006. 151 p. (in Russian).
4. Alefeld G., Herzberger J. *Introduction to interval computations*. Academic Press, 1983. 360 p.

#### Информация об авторах

**Гайшун Иван Васильевич** – доктор физико-математических наук, директор, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: gaishun@im.bas-net.by

**Горячкин Владимир Викторович** – кандидат физико-математических наук, доцент факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: gorvv@bsu.by

**Крахотко Валерий Васильевич** – кандидат физико-математических наук, доцент факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: krakhotko@bsu.by

#### Information about the authors

**Ivan V. Gaishun** – D. Sc. (Physics and Mathematics), Director, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gaishun@im.bas-net.by

**Vladimir V. Goryachkin** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Applied Mathematics and Informatics Faculty of the Belarusian State University (4, Nezaliezhnasti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gorvv@bsu.by

**Valery V. Krakhotko** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Applied Mathematics and Informatics Faculty of the Belarusian State University (4, Nezaliezhnasti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: krakhotko@bsu.by