

УДК 512.567.5

Ю. И. КУЛАЖЕНКО, М. В. СЕЛЬКИН

О ПОЛУАБЕЛЕВОСТИ n -АРНЫХ ГРУПП

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(Поступила в редакцию 06.03.2015)

Изучение объектов аффинной геометрии методами теории n -арных групп и изучение свойств n -арных групп, связанных со свойствами объектов аффинной геометрии, осуществлялось многими авторами [1–5]. Так, тернарные группы, которые изучали Х. Прюфер [6], Дж. Кертайн [7], нашли приложения в проективной [8] и аффинной геометрии [9], а также в других областях знаний. На основе исследований В. Дёрнте [10] и Е. Поста [11] С. А. Русаков в работах [2, 12] обобщил указанные выше результаты на случай n -арной группы ($n \geq 2$).

Отметим, что появление новых методов исследования, таких как функторный и геометрический, позволило получить ряд интересных и содержательных результатов в области мультиколец, полиадических мультиколец и универсальных алгебр [13–16].

Развитие приложений теории n -арных групп в аффинной геометрии и их изучение послужили толчком к введению нового понятия «самосовмещение элементов n -арных групп» [5]. В настоящее время эти исследования развиваются по двум основным направлениям. Первое связано с симметричными точками и построением на n -арной группе специальных фигур аффинной геометрии, обладающих заданными свойствами [5]. Второе базируется на изучении свойств различных последовательностей векторов n -арных групп [17]. Оба эти направления тесно связаны с понятием полуабелевости, которое, как показано в работе [18], тождественно понятиям коммутативности и аффинности в классе всех n -арных групп. Поэтому установление новых критериев полуабелевости n -арных групп представляет значительный интерес.

Пусть G – n -арная группа, $m > 0$ и $k \geq 0$ – целые числа.

1. Если $k > 0$ и $m \leq k$, то мы используем символ x_m^k для обозначения последовательности $x_m x_{m+1} \dots x_k$, где $x_m, x_{m+1}, \dots, x_k \in G$.

2. Если $k > 0$, то запись x^k обозначает последовательность $xx \dots x$ длины k ($x \in G$).

Напомним, что универсальную алгебру $\langle G, () \rangle$ с n -арной операцией $() : G^n \rightarrow G$ ($n \geq 2$) называют n -арной группой [19], если выполняются следующие условия:

1) операция $()$ ассоциативна на G , т. е.

$$((a_1 \dots a_n) a_{n+1} \dots a_{2n-1}) = (a_1 \dots a_i (a_{i+1} \dots a_{i+n}) a_{i+n+1} \dots a_{2n-1})$$

для любого $i = 1, \dots, n$ и для всех $a_1, \dots, a_{2n-1} \in G$;

2) уравнение

$$(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) = b$$

имеет единственное решение в G для любого $i = 1, \dots, n$ и любых $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in G$.

Говорят, что G – полуабелева n -арная группа, если для любой последовательности $x_1^n \in G^n$ справедливо равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

Говорят, что последовательность $e_1^{k(n-1)} \in G$, где $k \geq 1$, называется нейтральной $k(n-1)$ -последовательностью G , если $(e_1^{k(n-1)} u) = u = (u e_1^{k(n-1)})$ для любого элемента $u \in G$.

В любой n -арной группе существуют нейтральные последовательности. Это обусловлено, в частности, следствием разрешимости в n -арной группе уравнения $(a e_1^{k(n-1)-1} y) = a$. Нейтральные последовательности n -арной группы определяются неоднозначно.

Последовательность $b_1^j \in G$ называют обратной последовательностью к последовательности $a_1^i \in G$, если последовательности $b_1^j a_1^i$ и $a_1^i b_1^j$ являются нейтральными.

Ясно, что если b_1^j обратная последовательность к a_1^i , то a_1^i – обратная к b_1^j .

Отметим, что обратная последовательность, длина которой больше единицы, определяется неоднозначно.

n -Арная группа может быть определена как алгебра с двумя и большим числом операций [12]. В частности, n -арная группа может быть определена с помощью одной ассоциативной n -арной операции и одной унарной операции.

Алгебру $G = \langle X, ()^{[-2]} \rangle$ типа $\langle n, 1 \rangle$, где $n \geq 2$, называют n -арной группой [12], если

- 1) n -арная операция $()$ на множестве X ассоциативна;
- 2) для любых элементов x и y из X выполняются равенства

$$(x^{[-2]^{n-2}} x (x y)) = y = ((y x) x x^{[-2]}).$$

Символ $x^{[-2]}$, который входит в приведенное равенство, есть решение уравнения $(y x^{[-2]}) = x$, т. е. $(x^{[-2]^{2(n-1)}} x) = x$, где $x, y \in G$.

Из последнего равенства следует, что обратной последовательностью к любому $x \in G$ будет $x^{[-2]^{2n-4}}$. Действительно, $(x^{[-2]^{2(n-1)}} x) = (x x^{[-2]^{2n-4}} x) = x$. Очевидно, что $x x^{[-2]^{2n-4}} = x^{[-2]^{2n-4}} x$ – нейтральные последовательности.

В дальнейшем элементы n -арной группы G будем называть точками. Согласно [2], совокупность двух точек a и b из G называют отрезком и обозначают через $[ab]$ или $[ba]$. Последовательность k произвольных точек $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ называют k -угольником G , где $a_1, a_2, \dots, a_k \in G$.

В работе [2] доказано, что для любых точек $a, b, c \in G$ равенства

$$(ab^{[-2]^{2n-4}} b c) = b, \tag{1}$$

$$(cb^{[-2]^{2n-4}} b a) = b \tag{2}$$

эквивалентны.

Если выполняется равенство (1) или (2), то b называют серединой отрезка $[ac]$. Если имеет место равенство (1) (равенство (2)), то точку c (точку a) называют точкой, симметричной точке a (точке c) относительно точки b , и обозначают через $S_b(a)$ (через $S_b(c)$), т. е. $c = S_b(a)$ ($a = S_b(c)$).

Из (1) или (2) следует, что

$$S_b(a) = (ba^{[-2]^{2n-4}} a b), \quad (3)$$

$$S_b(c) = (bc^{[-2]^{2n-4}} c b). \quad (4)$$

В работе [2] установлено, что n -арная группа G будет полуабелевой, если для любых $x, y, z \in G$ справедливо равенство

$$(xy^{[-2]^{2n-4}} y z) = (zy^{[-2]^{2n-4}} y x).$$

В дальнейшем для сокращения записи обратную последовательность к любому $x \in G$ будем обозначать через x^{-1} , т. е. $x^{-1} = x^{[-2]^{2n-4}} x$. Тогда равенства (3) и (4) примут вид соответственно

$$S_b(a) = (ba^{-1}b), \quad (5)$$

$$S_b(c) = (bc^{-1}b) \quad (6)$$

и n -арная группа G будет полуабелевой, если для любых $x, y, z \in G$ справедливо равенство

$$(xy^{-1}z) = (zy^{-1}x). \quad (7)$$

Напомним [5], что точку

$$S_{a_k} (\dots (S_{a_2} (S_{a_1} (p))) \dots)$$

называют обходом элементов последовательности $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ точкой p , где $a_1, \dots, a_k, p \in G$. Если $S_{a_k} (\dots (S_{a_2} (S_{a_1} (p))) \dots) = p$, то говорят, что p самосовмещается относительно элементов последовательности $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$.

Четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ называют параллелограммом G , если $(ab^{-1}c) = d$.

Упорядоченную пару $\langle a, b \rangle$ точек $a, b \in G$ называют направленным отрезком n -арной группы G и обозначают \overline{ab} .

Говорят, что направленные отрезки \overline{ab} и \overline{cd} равны и пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$, если четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ – параллелограмм G .

Пусть \overline{V} – множество всех направленных отрезков n -арной группы G . В работе [2] установлено, что бинарное отношение $=$ на множестве \overline{V} является отношением эквивалентности и разбивает множество \overline{V} на непересекающиеся классы. Класс, порожденный направленным отрезком \overline{ab} , имеет вид

$$K(\overline{uv}) = \{\overline{uv} \mid \overline{uv} \in \overline{V}, \overline{uv} = \overline{ab}\}.$$

Под вектором \overline{ab} n -арной группы G понимают класс $K(\overline{ab})$, т. е. $\overline{ab} = K(\overline{ab})$.

Теорема 1. Пусть b_1, \dots, b_k – произвольные точки n -арной группы G ($k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$, k – нечетное), а $a_1, \dots, a_k \in G$ такие, что

$$b_2 = S_{a_1}(b_1), b_3 = S_{a_2}(b_2), \dots, b_k = S_{a_{k-1}}(b_{k-1}), b_1 = S_{a_k}(b_k). \quad (8)$$

n -Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно элементов последовательности

$$\langle a_1, \dots, a_k, b_1 \rangle, \quad (9)$$

т. е. когда справедливо равенство

$$S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots) = p. \quad (10)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G – полуабелева n -арная группа. Докажем справедливость равенства (10).

На основании определения симметричных точек запишем:

$$S_{a_1}(p) = (a_1 p^{-1} a_1). \quad (11)$$

С учетом (11), а также равенства 3.27 из [2] и нейтральности последовательностей $x^{-1}x$, xx^{-1} для любого $x \in G$, имеем:

$$S_{a_2}(S_{a_1}(p)) = (a_2(a_1 p^{-1} a_1)^{-1} a_2) = (a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2).$$

Аналогично

$$S_{a_3}(S_{a_2}(S_{a_1}(p))) = (a_3(a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2)^{-1} a_3) = (a_3 a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 a_3).$$

Продолжая таким образом, мы можем записать, что для любого нечетного k ($k \in N$ и $k \geq 3$) справедливо

$$S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))) = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k). \quad (12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots) &= (b_1(a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k)^{-1} b_1) = \\ &= (b_1 a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1). \end{aligned} \quad (13)$$

Из равенств (8) следует, что b_1 самосовмещается относительно элементов последовательности $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, т. е. если вместо b_k, b_{k-1}, \dots, b_2 подставить соответствующие выражения, то получим

$$b_1 = S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1))))\dots. \quad (14)$$

Преобразуем правую часть равенства (14) с учетом того, что k – нечетное натуральное число. Тогда по аналогии с (12) имеем:

$$S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1)))) = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k).$$

Следовательно,

$$b_1 = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k). \quad (15)$$

Подставим (15) в (13). С учетом нейтральности последовательностей и полуабелевости G получим

$$\begin{aligned} S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots) &= \\ &= ((a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k) a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = \\ &= (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = \\ &= (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} (p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1)) = \\ &= (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} (b_1 a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} p)) = \\ &= (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} b_1 a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} p) = p. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, справедливость равенства (10) установлена.

Достаточность. Докажем, что если равенство (10) выполняется, то G полуабелева.

Поскольку свойство полуабелевости n -арной группы G при доказательстве необходимости использовалось нами только в равенстве (16), то без повторения рассуждений будем считать все предыдущие равенства верными.

Из равенства (10) и (13) имеем:

$$(b_1 a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = p. \quad (17)$$

Подставим в равенство (17) вместо b_1 выражение из (15). Имеем:

$$\begin{aligned} & ((a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k) a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{k-1} a_k^{-1}, \\ & (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k)) = p. \end{aligned} \quad (18)$$

Перепишем (18) с учетом нейтральности последовательностей xx^{-1} и $x^{-1}x$ для любого $x \in G$. Имеем:

$$(a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} p b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k) = p.$$

Откуда

$$(a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} p) = (p a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} b_1). \quad (19)$$

Равенство (15) можно переписать в виде

$$(b_1 a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} b_1) = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1). \quad (20)$$

Преобразуем левую часть (19) с учетом (20). Имеем:

$$((b_1 a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} b_1) b_1^{-1} p) = (p a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} b_1),$$

откуда

$$(b_1 a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} p) = (p a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} b_1). \quad (21)$$

Если в равенстве (21) обозначить

$$x_1 = b_1, x_n = p, x_2^{n-1} = a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1},$$

то получим равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

На основании приведенных рассуждений и определения полуабелевой n -арной группы заключаем, что G – полуабелева группа. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть p, b_1, \dots, b_k – произвольные точки n -арной группы G ($k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$, k – нечетное), а точки $a_1, \dots, a_k \in G$ такие, что

$$b_2 = S_{a_1}(b_1), b_3 = S_{a_2}(b_2), \dots, b_k = S_{a_{k-1}}(b_{k-1}), b_1 = S_{a_k}(b_k), \quad (22)$$

n -арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{p S_{a_1}(p) + S_{a_1}(p) S_{a_2}(S_{a_1}(p)) + \dots +} \\ & \overrightarrow{+ S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots) S_{b_1}(S_{a_k} \dots (S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots} = \vec{0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G – полуабелева n -арная группа. Установим справедливость равенства (23).

На основании определения 5 из [2] правую часть равенства (23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \overline{pS_{a_1}(p)} + \overline{S_{a_1}(p)S_{a_2}(S_{a_1}(p))} + \dots + \\ & \overline{+S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots)S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots))} = \\ & = \overline{pS_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots))}. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим выражение $S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots))$ с учетом определения симметричных точек. Имеем:

$$\begin{aligned} S_{a_1}(p) &= (a_1 p^{-1} a_1), \\ S_{a_2}(S_{a_1}(p)) &= S_{a_2}(a_1 p^{-1} a_1) = (a_2 (a_1 p^{-1} a_1)^{-1} a_2) = (a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2), \\ S_{a_3}(S_{a_2}(S_{a_1}(p))) &= S_{a_3}(a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2) = (a_3 (a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2)^{-1} a_3) = (a_3 a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} a_3). \end{aligned}$$

Продолжая таким образом и учитывая, что k – нечетное, имеем:

$$S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots) = (a_k a_{k_1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots)) &= S_{b_1}(a_k a_{k_1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k) = \\ &= (b_1 (a_k a_{k_1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k)^{-1} b_1) = \\ &= (b_1 a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1). \end{aligned} \quad (25)$$

Если в правые части равенств (22), начиная с последнего, подставить соответствующие выражения вместо b_k, b_{k-1}, \dots, b_2 , то получим равенство

$$b_1 = S_{a_k}(S_{a_{k-1}}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1)))\dots)). \quad (26)$$

Рассмотрим правую часть равенства (26) с учетом определения симметричных точек. Имеем:

$$\begin{aligned} S_{a_1}(b_1) &= (a_1 b_1^{-1} a_1), \\ S_{a_2}(S_{a_1}(b_1)) &= S_{a_2}(a_1 b_1^{-1} a_1) = (a_2 (a_1 b_1^{-1} a_1)^{-1} a_2) = (a_2 a_1^{-1} b_1 a_1^{-1} a_2), \\ S_{a_3}(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1))) &= S_{a_3}(a_2 a_1^{-1} b_1 a_1^{-1} a_2) = (a_3 (a_2 a_1^{-1} b_1 a_1^{-1} a_2)^{-1} a_3) = (a_3 a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} a_3). \end{aligned}$$

Продолжая таким образом и учитывая, что k – нечетное число, получим

$$S_{a_k}(S_{a_{k-1}}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1)))\dots)) = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k).$$

Следовательно,

$$b_1 = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k). \quad (27)$$

Подставим в (25) вместо b_1 выражение из (27). Получим

$$\begin{aligned} S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots)) &= \\ &= ((a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k) a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1). \end{aligned} \quad (28)$$

Выполним преобразования в (28) с учетом нейтральности последовательностей и свойства полуабелевости n -арной группы G . Имеем:

$$\begin{aligned} & S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots) = \\ & = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2 a_1^{-1} (b_1 a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} p)) = \\ & = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} b_1 a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} p) = p. \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом (29) равенство (24) можно переписать в виде

$$\frac{\overline{pS_{a_1}(p)} + \overline{S_{a_1}(p)S_{a_2}(S_{a_1}(p))} + \dots + \overline{S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots} S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots)}{\overline{pS_{a_1}(p)} + \overline{S_{a_1}(p)S_{a_2}(S_{a_1}(p))} + \dots + \overline{S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots} S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots)}} = \overline{pp} = \vec{0}.$$

Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Пусть равенство (23) выполняется. Докажем, что G – полуабелева.

Поскольку свойство полуабелевости группы G в первой части теоремы мы использовали только в равенстве (29), то все предыдущие рассуждения будем считать справедливыми.

Из равенства (24) и условия теоремы следует, что

$$\overline{pS_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots)} = \vec{0}.$$

Поскольку, согласно определению 6 из [2] $\overline{pp} = \vec{0}$, то

$$\overline{pS_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots)} = \overline{pp}.$$

Из определения 2 и 4 из [2] следует, что

$$S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots) = p. \quad (30)$$

Рассмотрим равенство (30) с учетом равенства (25). Имеем:

$$(b_1 a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = p. \quad (31)$$

Подставим в (31) вместо b_1 выражение из (27). Имеем:

$$((a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k) a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2^{-1} a_1 p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = p. \quad (32)$$

С учетом нейтральных последовательностей равенство (32) перепишем в виде

$$(a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = p. \quad (33)$$

Положим в равенстве (33), что $p = (x_1^n)$, а $b_1 = x_1$ и $a_1 = a_2 = \dots = a_k = x_n$.

С учетом того, что k – нечетное число и нейтральности последовательностей, получим

$$(x_n x_1^{-1} x_1^n x_n^{-1} x_1) = (x_1^n).$$

Откуда

$$(x_n x_2^n x_1) = (x_1^n). \quad (34)$$

На основании равенства (34) и определения полуабелевой n -арной группы заключаем, что G – полуабелева. Что и требовалось доказать.

Литература

1. *Vakarelov D.* // God. Sofij. Univ., Mat. Fak. 1966/67. Vol. 61. P. 71–105.
2. *Русаков С. А.* Некоторые приложения теории n -арных групп. Минск, 1998.
3. *Dudek W. A.* // Algebras, Groups and Geometries. 1999. Vol. 16. P. 329–354.
4. *Dudek W. A., Stojakovic N. A.* // Czechoslovak Math. J. 2001. Vol. 51 (126). P. 275–283.
5. *Kulazhenko Yu. I.* // Quasigroups and Related Systems. 2011. Vol. 19, no. 2. P. 265–278.
6. *Prüfer H.* // Math. Z. 1924. Bd. 20. S. 165–187.
7. *Certain J.* // Bull. Amer. Math. soc. 1943. Vol. 49. P. 869–877.
8. *Baer R.* Linear algebra and projective geometry. New York, 1952.
9. *Brănzel D.* // An. Sti. Univ. Iasi, sect. I a Mat. 1977. Vol. 23. P. 33–38.
10. *Dörnte W.* // Math. Z. 1928. Vol. 19. P. 1–19.
11. *Post E. L.* // Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48, N. 2. P. 208–350.
12. *Русаков С. А.* Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп. Минск, 1992.
13. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М., 1989.
14. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск, 1997.
15. *Го Веньбинь, Шам К. П.* // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 43, № 6. С. 1283–1291.
16. *Аль-Дабабсех А. Ф.* // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та імя П. М. Машэрава. 1999. № 3 (13). С. 44–49.
17. *Kulazhenko Yu. I.* // Algebra and Discrete Math. 2010. Vol. 9, no 2. P. 98–107.
18. *Гальмак А. М., Кулаженко Ю. И.* // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения: тез. докл. X Междунар. конф., Волгоград, 10–16 сент., 2012. г. Волгоград, 2012. С. 20–23.
19. *Курош А. Г.* Общая алгебра: лекции 1969/70 учеб. года. М., 1974.

Yu. I. KULAZHENKO, M. V. SELKIN

ABOUT SEMIABELIAN OF n -ARY GROUPS

Summary

The paper presents a new criterion of semiabelian of an n -ary group on the basis of the fact of self-returning of an arbitrary point with respect to the elements of the succession, composed of the midpoints of the sides of an arbitrary k -angle with an odd k ($k \geq 3$) and one of the vertices of the k -angle in term symmetrical point and vector n -ary groups.