ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 2 2015
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.968.4

*Е. А. БАРКОВА*[1], *П. П. ЗАБРЕЙКО*[2]

# НЕЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

[1]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*
[2]*Белорусский государственный университет*

*(Поступила в редакцию 12.05.2015)*

В последние годы существенное развитие получила теория дифференциальных уравнений дробного порядка [1–5]. Такие уравнения возникают в задачах механики и физики, когда учитываются силы, действующие с запаздыванием. В частности, в работе [1] были доказаны локальные теоремы существования и единственности решения задачи Коши. А в статье [2] предложены и нелокальные теоремы для следующей задачи Коши:

$$D^{\alpha}x(t) = f(t,x), \tag{1}$$

$$x^{(k)}(0) = \xi_k, \qquad k = 0,\ldots,m-1, \tag{2}$$

где $D^{\alpha}$ – дробная производная порядка $\alpha$ в смысле Капуто (если $x(t)$ – гладкая функция, то

$$D^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1}x^{(m)}(s)ds,$$

где $\alpha > 0$ и $m$ – целое, удовлетворяющее условию $m-1 < \alpha \le m$) в пространстве непрерывных функций. В работе [3] эта задача Коши была исследована в пространствах весовых функций $C_{\gamma}[0,T]$ $(\gamma \in \mathbb{C})$, определяемых как пространства функций $g(t)$, заданных на $[0,T]$ таких, что $t^{\gamma}g(t) \in [0,T]$:

$$C_{\gamma}[0,T] = \left\{ g(t) : \|g\|_{C_{\gamma}} = \left\| t^{\gamma}g(t) \right\|_{C} < \infty \right\}, \quad C_0[0,T] = C[0,T]. \tag{3}$$

Было показано, что задача Коши (1)–(2) эквивалентна интегральному уравнению, для анализа которого применялся принцип сжимающих отображений, и доказана локальная теорема о разрешимости задачи Коши. Следует отметить, что в этой работе содержался ряд погрешностей и неясностей. Так, через $y(x)$ обозначена функция, являющаяся начальным приближением, произвольная функция в условии Липшица из этого пространства и, наконец, искомое решение. Не вполне корректно сформулировано и само условие Липшица на оператор суперпозиции. Все это не позволяет полностью понять утверждение авторов.

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости задачи Коши (1)–(2) с $0 < \alpha < 1$ в весовых пространствах $C_{\gamma}[0,T]$. При этом устанавливается нелокальная теорема о единственной разрешимости задачи Коши.

**1.** Для получения основных результатов докажем лемму о компактности интегральных операторов, действующих в пространстве вещественных непрерывных на отрезке функций.

Л е м м а. *Интегральный оператор* $\omega(t) \to t^{\gamma} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^{\gamma}} \omega(s)ds$, *действующий для всех* $0 < \gamma < \alpha < 1$ *в пространстве* $C[0,T]$ *вещественных непрерывных на отрезке* $[0,T]$ *функций, вполне непрерывен и неотрицателен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$Q\omega(t) = \int_0^T q(t,s)\omega(s)ds, \quad q(t,s) = \begin{cases} 0, \ s > t \\ t^{\gamma} \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^{\gamma}}, \ s \le t. \end{cases}$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что множество

$$\left\{ Q\omega(t) : |\omega(t)| \le 1, \quad (0 \le t \le T) \right\}$$

компактно. Это равносильно тому, что функции из него равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Ограниченность функций показана в [6]. Приведем доказательство равностепенной непрерывности. Для этого проверим выполнение следующего условия:

$$\lim_{t''-t' \to 0} \int_0^T |q(t'',s) - q(t',s)| ds = 0, \quad t'' > t'.$$

Иначе говоря, покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $\delta > 0$, что для произвольных $t'$, $t''$, для которых $|t' - t''| < \delta$, справедлива оценка

$$\int_0^T |q(t'',s) - q(t',s)| ds < \varepsilon. \tag{4}$$

Положим $\delta_0 = \left( (\varepsilon^{\gamma}) / (2B(1-\gamma,\alpha)) \right)^{1/\gamma}$, и пусть сначала $t', t'' < \delta_0$. Тогда

$$\int_0^T |q(t'',s) - q(t',s)| ds \le \int_0^{t''} |q(t'',s)| ds + \int_0^{t'} |q(t',s)| ds \le 2B(1-\gamma,\alpha)\delta_0{}^{\gamma} < \varepsilon.$$

Далее рассмотрим случай, когда $0 < t' < t'' < T < \infty$, но $t'' \ge \delta_0$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta < \delta_0$ такое, что для всех $|t' - t''| \le \delta$ и $(t'' \ge \delta_0)$ выполняется неравенство (4). Действительно, для всех $0 < \gamma < \alpha < 1$ справедливы неравенства

$$\int_0^{t''} |q(t'',s) - q(t',s)| ds \le \left| (t')^{\gamma} \int_0^{t'} \frac{(t'-s)^{\alpha-1} - (t''-s)^{\alpha-1}}{s^{\gamma}} ds + (t'')^{\gamma} \int_{t'}^{t''} \frac{(t''-s)^{\alpha-1}}{s^{\gamma}} ds \right| \le$$

$$\le T^{\gamma} \int_0^{t'} \frac{\left| (t'-s)^{\alpha-1} - (t''-s)^{\alpha-1} \right|}{s^{\gamma}} ds + T^{\gamma} \left| \int_{t'}^{t''} \frac{ds}{s^{\gamma}(t''-s)^{1-\alpha}} \right| \le$$

$$\le T^{\gamma} \left( \int_0^{t'} \frac{(t'-s)^{\alpha-1}}{s^{\gamma}} ds - \int_0^{t'} \frac{(t''-s)^{\alpha-1}}{s^{\gamma}} ds + \int_{t'}^{t''} \frac{ds}{s^{\gamma}(t'')^{1-\alpha}(1-s/t'')^{1-\alpha}} \right).$$

В первом интеграле сделаем замену $s = t'\sigma$, во втором и третьем – $s = t''\sigma$. Тогда

$$T^{\gamma} \left( (t')^{\alpha-\gamma} \int_0^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^{\gamma}} d\sigma - (t'')^{\alpha-\gamma} \int_0^{t'/t''} \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^{\gamma}} d\sigma + (t'')^{\alpha-\gamma} \int_{t'/t''}^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^{\gamma}} d\sigma \right) =$$

$$= T^{\gamma} \left( ((t')^{\alpha-\gamma} - (t'')^{\alpha-\gamma}) \int_0^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^{\gamma}} d\sigma + 2(t'')^{\alpha-\gamma} \int_{t'/t''}^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^{\gamma}} d\sigma \right) =$$

$$= T^{\gamma} \left( ((t')^{\alpha-\gamma} - (t'')^{\alpha-\gamma}) B(1-\gamma,\alpha) + 2(t'')^{\alpha-\gamma} \int_{t'/t''}^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^{\gamma}} d\sigma \right) \le$$

$$\leq T^{\gamma}\left|t'-t''\right|^{\alpha-\gamma}B(1-\gamma,\alpha)+2T^{\alpha}\int\limits_{t'/t''}^{1}\frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^{\gamma}}d\sigma.$$

Первое слагаемое будет меньше $\varepsilon/2$, если выбрать $\delta<\left(\varepsilon/(2T^{\gamma}B(1-\gamma,\alpha))\right)^{1/(\alpha-\gamma)}$. В силу абсолютной непрерывности интеграла $\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^{\gamma}}d\sigma=0$ существует такое $\eta>0$, что при $\left|t'/t''-1\right|<\eta$ справедливо неравенство $\left|\int\limits_{t'/t''}^{1}\frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^{\gamma}}d\sigma\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Так как $t''\geq\delta_0$, то при $\left|t'-t''\right|<\delta$ второе слагаемое также будет меньше $\varepsilon/2$, если только $\delta<\delta_0\eta$. Таким образом, при $\left|t'-t''\right|<\delta$ справедливо неравенство (4). Лемма доказана.

**2.** Исследуем теперь задачу Коши (1)–(2), где $0<\alpha<1$ в пространствае $C_{\gamma}[0,T]$. Предположим, что функция $f(t,x)$ определена на $[0,T]\times X$ ($X$ – банахово пространство); для каждого $x$ функция $f(t,x)$ – функция одной переменной $t, f(t,x)\in C_{\gamma}[0,T]$ (т. е. справедливо $\left\|f\right\|_{C_{\gamma}}=\left\|t^{\gamma}f(t,x)\right\|_{C}<\infty$) и удовлетворяет условию Липшица по второй переменной

$$\| f(t,x_1)-f(t,x_2)\|_X\leq k\| x_1-x_2\|_X, \tag{5}$$

где $k$ – некоторая константа.

Т е о р е м а. *Если $f(t,x)$ для каждого x принадлежит пространству функций $C_{\gamma}[0,T]$ и удовлетворяет условию* (5), *то задача Коши* (1)–(2) *имеет в $C_{\gamma}[0,T]$ единственное определенное на $[0,T]$ решение для всех $\gamma<\alpha$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим нелинейный оператор

$$Ax(t)=\xi_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds. \tag{6}$$

Известно (см. [2, 3]), что неподвижная точка этого оператора и есть решение задачи Коши (1)–(2), определенное на всем отрезке $[0,T]$.

Введем замкнутое выпуклое множество

$$B=\left\{x:\| x(t)-\xi_0\|_{C_{\gamma}[0,T]}\leq\omega(t)\right\}$$

и покажем, что оператор $A$ при подходящем выборе функции $\omega(t)$ преобразует это множество в себя. Иными словами, покажем, что для подходящего $\omega(t)$ справедливо неравенство

$$\| Ax(t)-\xi_0\|_{C_{\gamma}[0,T]}\leq\omega(t). \tag{7}$$

Действительно, в силу условий теоремы можно записать цепочку неравенств

$$\| Ax(t)-\xi_0\|_X=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left\|f(s,x(s))\right\|_X ds\leq$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left(\left\|f(s,\xi_0)\right\|_X+\left\|f(s,x(s))-f(s,\xi_0)\right\|_X\right)ds\leq$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^{\gamma}}\left(\left\|f\right\|_{C_{\gamma}[0,T]}+k\left\|x(s)-\xi_0\right\|_{C_{\gamma}[0,T]}\right)ds\leq$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^{\gamma}}\left\|f\right\|_{C_{\gamma}[0,T]}ds+\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^{\gamma}}\omega(s)ds.$$

Отсюда следует оценка

$$\|Ax(t)-\xi_0\|_{C_\gamma[0,T]} \le \frac{t^\gamma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} ds \|f\|_{C_\gamma[0,T]} + \frac{kt^\gamma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma}\omega(s)\,ds \le$$
$$\le \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha)} B(1-\gamma,\alpha)\|f\|_{C_\gamma[0,T]} + \frac{kt^\gamma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma}\omega(s)\,ds.$$

Далее нужно так выбрать функцию $\omega(t)$, чтобы для всех $x(t)$, для которых выполняется условие $\| x(t)-\xi_0 \|_{C_\gamma[0,T]} \le \omega(t)$, было справедливо неравенство

$$\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha)} B(1-\gamma,\alpha)\|f\|_{C_\gamma[0,T]} + \frac{kt^\gamma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma}\omega(s)\,ds \le \omega(t). \tag{8}$$

Для этого в качестве $\omega(t)$ достаточно взять решение интегрального уравнения

$$\omega(t) = \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha)} B(1-\gamma,\alpha)\|f\|_{C_\gamma[0,T]} + \frac{kt^\gamma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma}\omega(s)\,ds. \tag{9}$$

По лемме интегральный оператор $\omega(t) \to \frac{kt^\gamma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma}\omega(s)ds$, действующий в пространстве $C[0,T]$ вещественных непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций, для всех $0<\gamma<\alpha<1$ вполне непрерывен и неотрицателен. Известно (см. [7, 8]), что его спектральный радиус равен нулю. Следовательно, для уравнения (9) существует единственное решение $\omega(t)$, т. е. оператор $A$ преобразует в себя выпуклое замкнутое множество.

Покажем далее, что оператор $A$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой эквивалентной норме с постоянной $\varkappa<1$. Для этого в пространстве $C_\gamma[0,T]$ вместо нормы $\| x \|_{C_\gamma[0,T]} \le \| \mathrm{t}^\gamma x(t) \|_C$ введем норму следующим образом:

$$\| x \|_{\tilde{C}_\gamma[0,T]} = \max_{0\le t\le T} \left\| \frac{t^\gamma x(t)}{\omega_1(t)} \right\|_X,$$

где $\omega_1(t)$ – некоторая положительная функция, которая будет определена ниже.

Для любого $t$, $0\le t\le T$, в силу условия (5) справедливы неравенства

$$\| Ax_1(t)-Ax_2(t) \|_X = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \| f(s,x_1(s)) - f(s,x_2(s)) \|_X\, ds \le$$
$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} k \| x_1-x_2 \|_X\, ds \le \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma}\omega_1(s) \| x_1-x_2 \|_{\tilde{C}[0,T]} ds.$$

Отсюда следует оценка

$$\| Ax_1(t)-Ax_2(t) \|_{\tilde{C}(X)} \le \max_{0\le t\le T}\left[ \frac{t^\gamma}{\omega_1(t)} \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma}\omega_1(s)ds \right] \| x_1-x_2 \|_{\tilde{C}[0,T]}.$$

Далее, для произвольного положительного числа $\varkappa<1$ функцию $\omega_1(t)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\max_{0\le t\le T}\left[ \frac{t^\gamma}{\omega_1(t)} \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma}\omega_1(s)ds \right] \le \varkappa.$$

Для этого достаточно в качестве $\omega_1(t)$ взять решение линейного интегрального уравнения

$$\omega_1(t) = 1 + \frac{t^\gamma k}{\varkappa\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma}\omega_1(s)ds. \tag{10}$$

Применяя к последнему уравнению те же рассуждения о разрешимости, как и в случае уравнения (9), приходим к выводу, что для уравнения (10) существует единственное решение $\omega_1(t)$. Следовательно, оператор $A$ удовлетворяет условию Липшица на инвариантном множестве с постоянной $\varkappa < 1$:

$$\left\|Ax_1(t) - Ax_2(t)\right\|_{\tilde{C}_\gamma[0,T]} \le \varkappa \left\|x_1(t) - x_2(t)\right\|_{\tilde{C}_\gamma[0,T]}.$$

Согласно принципу сжимающих отображений Банаха – Каччиополли, существует, и притом единственная, точка оператора $A$. Тем самым теорема доказана.

## Литература


1. *Podlubny I.* // Mathematics in Sciences and Engineering. 1999. Vol. 198. P.
2. *Баркова Е. А., Забрейко П. П.* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 46, № 2. С. 1–6.
3. *Килбас А. А., Бонилла Б., Трухилло Х.* // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 6. С. 18–22.
4. *Gorenflo R., Mainardi F.* // CISM Courses and Lectures. Viena, 1997. P. 223–276.
5. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. New York, 1994.
6. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А.* и др. Интегральные уравнения. М., 1968.
7. *Забрейко П. П.* // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22, вып. 1 (133). С. 167–168.
8. *Забрейко П. П.* // Литов. мат. сб. 1967. Т. 7, вып. 2. С. 281–287.



*E. A. BARKOVA, P. P. ZABREIKO*


**NONLOCAL THEOREMS ON THE CAUCHY PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER IN WEIGHTED SPACES OF CONTINUOUS FUNCTIONS**

## Summary


In this article, the theorems of existence of solutions of nonlocal Cauchy problems for differential equations of fractional order in weighted spaces with Caputo derivatives are proved. Sufficient conditions for compactness of integral operators operating in the space of real-valued continuous functions on a segment are also obtained.