УДК 539.374

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ БРУСА И ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Канд. техн. наук МАКАРЕВИЧ С. С., доктора техн. наук, профессора МРОЧЕК Ж. А., КОЖУРО Л. М.

Белорусский государственный технологический университет,
Белорусский национальный технический университет

При проектировании и изготовлении деталей машин и элементов конструкции приходится довольно часто рассматривать их деформации за пределами упругости. Такие расчеты необходимы при проверке прочности по методу предельного состояния, а также при разработке технологических операций по повышению несущей способности деталей конструкции методами предварительного пластического деформирования. В литературе достаточно полно освещены вопросы упругопластического деформирования при плоском изгибе, но недостаточно изучен упругопластический неплоский (косой) изгиб. Это, очевидно, связано с тем, что при неплоском изгибе сложно определить область пластических деформаций, остаточные напряжения и предельный изгибающий момент, если пользоваться для определения напряжений известными зависимостями [1].

Рассмотрим брус, нагруженный изгибающим моментом M, вектор которого направлен под углом φ к оси X (рис. 1а).

Компонентами вектора M в системе координат XOY будут:

$$M_x = M\cos\varphi; \; M_y = M\sin\varphi. \qquad (1)$$

Напряжения, как известно [1], в этом случае определяют по формуле

$$\sigma = \frac{M_x y}{J_x} - \frac{M_y x}{J_y}, \qquad (2)$$

где x, y – координаты точки, в которой определяется напряжение; J_x, J_y – моменты инерции площади поперечного сечения бруса относительно главных центральных осей X, Y.

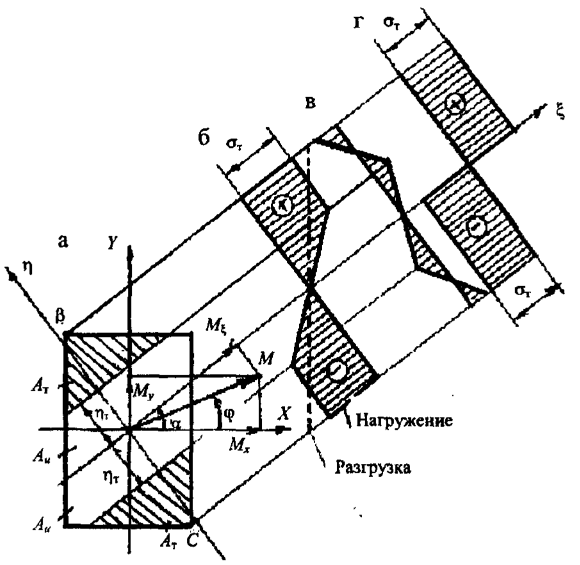

Рис. 1. Эпюры напряжений в поперечном сечении бруса при упругопластическом неплоском изгибе: а – поперечное сечение бруса; б – эпюра нормальных напряжений при упругопластическом неплоском изгибе; в – эпюра остаточных напряжений; г – эпюра напряжений в предельном состоянии

Чтобы определить область пластических деформаций, остаточные напряжения и предельный изгибающий момент, проведем расчет относительно нейтральной линии, которую в дальнейшем будем называть нейтральной осью и обозначим ξ. Уравнение нейтральной линии получим из зависимости (2), приравнивая ее к нулю:

$$y = \frac{M_y}{M_x}\frac{J_x}{J_y}x.$$

Следовательно, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$k = \mathrm{tg}\alpha = \frac{M_y}{M_x}\frac{J_x}{J_y},$$

или, учитывая (1):

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{J_x}{J_y}\mathrm{tg}\varphi. \qquad (3)$$

Таким образом, нейтральная ось ξ отклонена от оси X на угол α и определяется формулой (3). Перпендикулярно оси ξ через центр тяжести сечения проведем ось η.

Положим, что для бруса, как обычно, справедлива гипотеза плоских сечений. Тогда при изгибе сечение поворачивается относительно оси ξ и деформация в точке с ординатой η будет

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны изогнутой оси бруса в плоскости $Z_{0\eta}$ (Z – ось бруса).

Напряжение в поперечном сечении бруса в точке с ординатой η согласно закону Гука можно записать

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\eta}{\rho}E. \qquad (4)$$

Тогда изгибающий момент в сечении относительно оси ξ через напряжения σ равен

$$M_\xi = \int_A \sigma\eta dA = \frac{E}{\rho}\int_A \eta^2 dA = \frac{E}{\rho}J_\xi. \qquad (5)$$

Подставляя $\frac{E}{\rho}$ из формулы (5) в (4), получим

$$\sigma = \frac{M_\xi \eta}{J_\xi},$$

где J_ξ – момент инерции относительно оси ξ площади A поперечного сечения бруса.

Момент M_ξ получим, если спроецируем векторы моментов M_x и M_y на ось ξ

$$M_\xi = M_x\cos\alpha + M_y\sin\alpha$$

или через момент M

$$M_\xi = M\cos(\alpha - \varphi). \qquad (6)$$

Ординату η определяем через координаты точек x, y

$$\eta = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

Тогда момент инерции J_ξ можно определить через моменты инерции J_x и J_y [1]

$$J_\xi = J_x\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha.$$

Путем преобразований можно доказать, что формулы (2) и (6) дают один и тот же результат. С помощью (6) легко определить область пластических деформаций и остаточные напряжения, возникающие при разгрузке.

Наибольшие напряжения будут возникать в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси ξ, т. е. в точках B и C.

Пластическая деформация в поперечном сечении бруса появится в том случае, если величина напряжения в наиболее удаленных точках достигает предела текучести $\sigma_т$. При этом изгибающий момент относительно оси ξ, согласно (5), будет равен

$$M_{\xi т} = \frac{\sigma_т J_\xi}{\eta_в},$$

а изгибающий момент M, действующий на брус, определяем из формулы

$$M_т = \frac{M_{\xi т}}{\cos(\alpha - \varphi)}. \qquad (7)$$

При дальнейшем увеличении изгибающего момента пластические деформации будут распространяться к центру сечений. Если материал бруса имеет явно выраженную площадку текучести, то для расчетов можно принять схематизированную диаграмму идеально упругопластического тела. Тогда в зонах пластических деформаций напряжения будут оставаться постоянными и равными пределу текучести, а в упругой зоне – изменяться по линейному закону. Определяем, на каком расстоянии $\eta_т$ от ξ окажется зона пластических деформаций, если брус нагружен моментом $M^* > M_т$ (рис. 1б). Момент M_ξ^* в этом случае можно записать через напряжения следующим образом:

$$M_\xi^* = 2\left(\int_{A_u}\sigma\eta dA + \sigma_т\int_{A_т}\eta dA\right),$$

где A_u – площадь сечения по одну сторону от оси ξ, соответствующая упругим деформациям;

$A_т$ – то же, соответствующая пластическим деформациям (на рис. 1а – заштрихована).

Подставляя σ согласно (4) и производя интегрирование, получим

$$M_\xi^* = 2\left(\frac{E}{\rho}J_{\xi_и} + \sigma_т S_{\xi_т}\right),$$

где $J_{\xi_и}$ – момент инерции площади $A_и$ относительно оси ξ; $S_{\xi_т}$ – статический момент площади $A_т$ относительно оси ξ (по абсолютной величине).

Учитывая, что, согласно (4), $\frac{E}{\rho} = \frac{\sigma_т}{\eta_т}$, можно записать

$$M_\xi^* = 2\sigma_т\left(\frac{1}{\eta_т}J_{\xi_и} + S_{\xi_т}\right). \qquad (8)$$

Если для конкретного сечения выразить $J_{\xi_и}$ и $S_{\xi_т}$ через $\eta_т$, то из уравнения (8) можно определить границу пластических деформаций.

После разгрузки бруса, нагруженного моментом M^*, возникают остаточные напряжения σ_0. Согласно теореме о разгрузке:

$$\sigma_0 = \sigma - \sigma_{разг},$$

где $\sigma_{разг} = \dfrac{M_\xi^*\eta}{J_\xi}$.

Эпюра остаточных напряжений показана на рис. 1в. При дальнейшем увеличении момента M расстояние $\eta_т$ уменьшается и в пределе стремится к нулю, а кривизна бруса – к бесконечности. Таким образом, все сечение охвачено пластической деформацией, напряжение в растянутой и сжатой зонах по величине равно пределу текучести $\sigma_т$. Несущая способность бруса исчерпана и изгибающий момент M в этом случае является предельным $M = M_{пр}$. Соответственно момент $M_\xi = M_{\xi(пр)}$. Величину предельного момента можно определить через напряжения в предельном состоянии (рис. 1г.):

$$M_{\xi(пр)} = 2\int_{A_р}\sigma_т\eta\, dA = 2\sigma_т S_{\xi_р}; \quad M_{пр} = \frac{M_{\xi(пр)}}{\cos(\alpha-\varphi)},$$

где $S_{\xi_р}$ – статический момент растянутой части сечения относительно оси ξ.

Если сечение имеет только одну ось симметрии (рис. 2), то при появлении зоны с пластическими деформациями нейтральная ось ξ смещается и в предельном состоянии займет положение ξ_1, определяемое из условия равенства нулю продольной силы

$$N = \sigma_т A_р - \sigma_т A_с = 0, \qquad (9)$$

где $A_р$, $A_с$ – площадь растянутой и сжатой зон.

Тогда из (9) получим

$$A_р = A_с.$$

Таким образом, нейтральная ось ξ_1 делит сечение на две равновеликие части.

Предельный момент относительно ξ_1 в данном случае будет равен

$$M_{\xi_1(п)} = \sigma_т\int_{A_р}\eta\, dA + \sigma_т\int_{A_с}\eta\, dA = \sigma_т(S_{\xi_{1р}} + S_{\xi_{1с}}),$$

где $S_{\xi_{1р}}$, $S_{\xi_{1с}}$ – статические моменты растянутой и сжатой частей сечения относительно оси ξ_1, взятые по абсолютной величине. Переходя к предельному моменту, изгибающему брус под углом φ к оси x, получим

$$M_{пр} = \frac{M_{\xi_1(т)}}{\cos(\alpha-\varphi)}.$$

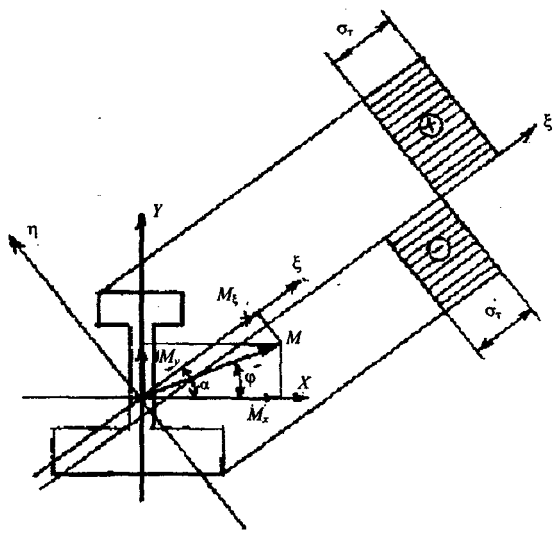

Рис. 2. Эпюра напряжений в предельном состоянии при неплоском изгибе бруса с одной осью симметрии в поперечном сечении

ВЫВОД

Полученные результаты позволяют определять остаточные напряжения и проводить расчет по предельным состояниям элементов конструкций и деталей машин, работающих в условиях неплоского (косого) изгиба.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1963. – 540 с.