

Э Н Е Р Г Е Т И К А

УДК 519.10+658.264

**АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ
И СОСТАВА СИСТЕМЫ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО
ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ**

*Докт. техн. наук, проф. СЕДНИН В. А., канд. физ.-мат. наук, доц. КОРЗНИКОВ А. Д.,
канд. техн. наук, доц. СЕДНИН А. В., магистр. техн. наук ШКЛЯР И. В.*

Белорусский национальный технический университет

Задача модернизации существующих систем централизованного теплоснабжения (СЦТ) является актуальной в современных условиях. Особенно сложна эта проблема для крупных городов с плотной застройкой и разветвленной системой тепловых сетей. Строительство административных, гражданско-социальных и жилых зданий в центре городов в последние годы еще больше увеличивает плотность застройки и тем самым приводит к возрастанию тепловых нагрузок. Ввиду того что одновременно происходит модернизация самих тепловых сетей и теплоисточников, представляет определенный практический интерес эффективное решение задачи оптимизации структуры и состава СЦТ. При этом необходимо рассматривать как структурную, так и параметрическую оптимизацию. В первом случае это касается ввода новых элементов (теплоисточников, теплопроводов, тепловых подстанций) в состав СЦТ, во втором – изменения их параметров (мощности, пропускной способности и режима отпуска теплоты). В данной статье рассматривается оптимальная модернизация тепловых сетей при условии, что мощности теплоисточников достаточно для покрытия возросшей потребности в тепловой энергии [1]. Задача решается для режима максимальной тепловой нагрузки.

Постановка задачи и математическая модель. Математическая модель структуры СЦТ представляется графом, множеством вершин V которого являются теплоисточники (источники), тепловые подстанции распределения и по-

ребители (группы потребителей), а множеству его дуг U соответствуют тепломагистрали, связывающие эти элементы между собой, т. е. теплопроводы. Каждому теплоисточнику i , $i = \overline{1, m}$, поставлено в соответствие число q_i – мощность источника, а потребителю b_j , $j = \overline{1, n}$, – потребность в теплоте j -го потребителя. Кроме этого, задана пропускная способность каждой тепломагистрали. При увеличении потребности каждого потребителя на некоторую величину δ_j , $j = \overline{1, n}$, возникает задача модернизации СЦТ с целью увеличения пропускной способности тепловой сети. Таким образом, задача заключается в поиске варианта модернизации (синтезе) новой структуры СЦТ при известных удельных затратах c_{ij} каждого участка тепловой сети для увеличения его пропускной способности.

Как и в [2], рассмотрим сеть $G(V, U)$, где V – множество вершин, $|V| = r$, U – множество дуг. В сети выделены: подмножества $S \in V$ – вершины, в которых сосредоточены теплоисточники (источники); $T \in V$ – вершины, в которых сосредоточены пункты потребления теплоты (стоки). Известны пропускная способность d_{ij} дуги, $(i, j) \in U$, и удельная стоимость c_{ij} увеличения ее пропускной способности.

Рассмотрим два варианта задачи (без ограничения и с ограничением средств, выделенных на модернизацию).

1. Пусть известна величина потока $v_s \leq q_s$ из каждого источника $s \in S$ и $v_t = b_t$ в каждый сток $t \in T$ сети $G(V, U)$. Для некоторого множества стоков $T' \in T$ требуется увеличить входящие потоки на величины $\delta_t, t \in T'$, и соответственно суммарный поток из источников множества S в стоки множества T' на величину δ . Каким образом следует модернизировать СЦТ, увеличив пропускные способности дуг (тепломагистралей) с минимальными затратами, чтобы получить требуемые потоки?

2. Пусть известно, что суммарные затраты на преобразование сети ограничены некоторой величиной C . Как следует увеличить пропускные способности дуг (тепломагистралей), чтобы в модернизированной СЦТ получить как можно большую величину потока из источников множества S' в стоки множества T' (или увеличить величину потока между некоторыми источниками и стоками на заданную величину, максимально увеличив поток из источников множества S' в стоки множества T'), чтобы суммарные затраты на модернизацию СЦТ не превысили величину C ?

Опишем сетевые модели для многополюсных сетей и алгоритмы решения этих задач, использующие идею модифицированных сетей и стоимостей. Обозначим через y_{ij} приращение пропускной способности дуги $(i, j) \in U$; x_{ij} – дуговой поток по этой дуге; $N(k)$ – множество вершин сети $G(V, U)$, соседних с вершиной $k \in V$.

Первая из сформулированных задач может быть записана следующим образом: минимизировать суммарные затраты $\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} y_{ij}$ на модернизацию сети при условиях:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i \in N(k)} x_{ik} - \sum_{j \in N(k)} x_{kj} &= 0, \quad k \notin S \cup T; \\ \sum_{j \in N(s)} x_{sj} &\leq q_s, \quad s \in S; \\ \sum_{i \in N(t_l)} x_{it_l} - \sum_{j \in N(t_l)} x_{t_l j} &= b_{t_l}, \quad t_l \in T \setminus T'; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\sum_{i \in N(t_l)} x_{it_l} - \sum_{j \in N(t_l)} x_{t_l j} = b_{t_l} + \delta_{t_l}, \quad t_l \in T'; \quad (2)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} + y_{ij}, \quad (i, j) \in U. \quad (3)$$

Если необходимо увеличить суммарный поток из источников множества S' в стоки множества T' на величину δ , то к условию (2) добавятся ограничения:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{t_l \in T'} \delta_{t_l} &= \delta; \\ v_{t_l} &\geq 0, \quad t_l \in T'. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Вторая задача может быть записана в следующем виде: максимизировать суммарное приращение потока $\delta = \sum_{t_l \in T'} \delta_{t_l}$ при условии, что

выполняются ограничения (1)–(4) и

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} y_{ij} \leq C. \quad (5)$$

Формирование модифицированной сети.

Введем две дополнительные вершины s и t , полагая пропускные способности дуг $(s, s_i), s_i \in S$ и $(t_j, t), t_j \in T$, равными соответственно $d_{ss_i} = q_{s_i}, d_{t_j t} = b_{t_j}, t \in T \setminus T', d_{t_j t} = b_{t_j} + \delta_{t_j}, t \in T'$, а стоимость увеличения их пропускной способности на условную единицу $c_{ss_i} = \infty, s_i \in S, c_{t_j t} = \infty, t_j \in T \setminus T', c_{t_j t} = 0, t_j \in T'$. В модернизированной сети с множеством вершин $\bar{V} = V \cup s, t$, множеством дуг \bar{U} необходимо увеличить пропускные способности дуг $(i, j) \in \bar{U}$ на величину y_{ij} таким образом, чтобы величина потоков по дугам $(t_j, t), t_j \in T'$, стала равной $b_{t_j} + \delta_{t_j}$, и при этом суммарные затраты на модернизацию сети, равные $\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} y_{ij}$, были минимальными.

Матрица $Y = \|y_{ij}\|$, порядок которой определяется числом элементов множества \bar{V} , называется матрицей синтеза сети. Матрица $\bar{Y}^0 = \|\bar{y}_{ij}^0\|$, которая дает оптимальное решение, – матрицей оптимального синтеза сети.

Алгоритм нахождения матрицы оптимального синтеза сети. Начальный шаг. Строим однополюсную модифицированную сеть $G(\bar{V}, \bar{U})$, как описано выше. Полагаем все элементы матрицы $\bar{Y}^0 = \left\| \bar{y}_{ij}^0 \right\|$ порядка $(r+2) \times (r+2)$, равными нулю, а $\bar{X}^0 = \left\| \bar{x}_{ij}^0 \right\|$ – максимальный поток в сети $G(\bar{V}, \bar{U})$ величины v , $v^0 = v + \delta$.

Шаг 1. Для имеющегося потока определяем матрицу модифицированных дуговых весов

$$c_{ij}^* = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{ij} < d_{ij} \text{ или } 0 < x_{ji} \leq d_{ji}; \\ c_{ij}, & \text{если } x_{ij} \geq d_{ij}; \\ -c_{ji}, & \text{если } x_{ji} \geq d_{ji}. \end{cases}$$

Элементы матрицы $R = \left\| r_{ij} \right\|$ полагаем равными $r_{ij} = j$, $i, j = \overline{1, (r+2)}$.

Шаг 2. Последовательно для вершин $k = 1, 2, \dots, (r+2)$ осуществляем тернарные операции $c_{ij}^* = \min(c_{ij}^*, c_{ik}^* + c_{kj}^*)$, $i \neq j \neq k$, полагая при этом

$$r_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, & \text{если } c_{ij}^* \leq c_{ik}^* + c_{kj}^*; \\ r_{ik}, & \text{если } c_{ij}^* > c_{ik}^* + c_{kj}^*. \end{cases}$$

Если $c_{st}^* = \infty$, то переходим к шагу 4, в противном случае – к шагу 3.

Шаг 3. С помощью элементов матрицы R находим путь L минимального веса из источников s в сток t : $r_{st} = i_1, r_{i_1 t} = i_2, \dots, r_{i_{k-1} t} = t$, $L = (s, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, t)$.

Пусть

$$L^+ = (i, j) \in L / x_{ij} < d_{ij}, \quad L^- = (i, j) \in L / 0 < x_{ji} \leq d_{ji};$$

$$\bar{L}^+ = (i, j) \in L / x_{ij} \geq d_{ij}, \quad \bar{L}^- = (i, j) \in L / x_{ji} > d_{ji}.$$

Полагаем:

$$\varepsilon_1 = \min_{(i,j) \in L^+} (d_{ij} - x_{ij}); \quad \varepsilon_2 = \min_{(i,j) \in L^-} x_{ji};$$

$$\varepsilon_3 = \min_{(i,j) \in \bar{L}^-} (d_{ji} - x_{ji}).$$

Увеличиваем поток из источника s в сток t на величину δ , равную $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, если $\varepsilon + v \leq v_0$ и $\varepsilon = v_0 - v$, если $\varepsilon + v > v_0$, изменяя поток вдоль пути L следующим образом: $x_{ji} := x_{ji} - \varepsilon$, если $(i, j) \in L \cup \bar{L}^-$, $x_{ij} := x_{ij} + \varepsilon$, если $(i, j) \in L^+ \cup \bar{L}^+$.

Если суммарный поток x_{ij}^0 достиг заданной величины, переходим к шагу 4. В противном случае – к шагу 1.

Шаг 4. Вычисляем матрицу $\bar{Y}^0 = \left\| \bar{y}_{ij}^0 \right\|$ оптимального синтеза приведенной сети $G(\bar{V}, \bar{U})$

$$\bar{y}_{ij}^0 = \begin{cases} x_{ij}^0 - d_{ij}, & \text{если } x_{ij}^0 > d_{ij}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В результате получим матрицу $\bar{Y}^0 = \left\| \bar{y}_{ij}^0 \right\|_{r \times r}$ оптимального синтеза исходной многополюсной сети $G(V, U)$ с минимальной стоимостью преобразования $C = \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}^0$.

Поскольку увеличение потока каждый раз осуществляется вдоль пути минимального веса, а вес пути – это затраты, связанные с увеличением потока вдоль этого пути на единицу, то понятно, что суммарные затраты, связанные с синтезом сети заданной величины потока, будут минимальны [2].

Алгоритм максимального увеличения потока с заданным уровнем затрат. Начальный шаг. Строим однополюсную модифицированную сеть. Полагаем C_ε и все элементы матрицы преобразования $\bar{Y} = \left\| \bar{y}_{ij} \right\|$ равными нулю.

Шаг 1. Для потока $X = \left\| x_{ij} \right\|$ определяем матрицу модифицированных дуговых весов

$$c_{ij}^* = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{ij} < d_{ij} \text{ или } 0 < x_{ji} \leq d_{ji}; \\ c_{ij}, & \text{если } x_{ij} \geq d_{ij}; \\ -c_{ji}, & \text{если } x_{ji} > d_{ji}. \end{cases}$$

Элементы матрицы $R = \left\| r_{ij} \right\|$ полагаем равными $r_{ij} = j$, $i = \overline{1, (r+2)}$, $j = \overline{1, (r+2)}$.

Шаг 2. Последовательно для вершины $k=1, 2, \dots, (r+2)$ осуществляем тернарные операции $c_{ij}^* = \min(c_{ij}^*, c_{ik}^* + c_{kj}^*)$ для всех $i \neq j \neq k$.

Одновременно с тернарной операцией изменяем элементы матрицы R по следующему правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, & \text{если } c_{ij}^* \leq c_{ik}^* + c_{kj}^*; \\ r_{ik}, & \text{если } c_{ij}^* > c_{ik}^* + c_{kj}^*. \end{cases}$$

Шаг 3. Элемент c_{st}^* указывает минимальный вес пути из источника s в сток t , а элементы матрицы R : $r_{st} = i_1, r_{i_1t} = i_2, \dots, r_{i_{k-1}t} = i_k, r_{i_kt} = t$ указывают этот путь $L = s, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k, t$.

Если $c_{st}^* = \infty$, задача решена. В противном случае полагаем $\varepsilon_1 = \min_{(i,j) \in L^+} (d_{ij} - x_{ij})$ для множества L^+ ненасыщенных дуг, проходимых в $(s-t)$ – пути L в направлении потока, $\varepsilon_2 = \min_{(i,j) \in L^-} x_{ji}$ для

множества \bar{L}^- дуг (i, j) проходимых в $(s-t)$ – пути L в направлении, противоположном направлению потока, $\varepsilon_3 = \min_{(i,j) \in \bar{L}^-} (x_{ji} - d_{ji})$,

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Если $C_\varepsilon + \varepsilon c_{st}^* \leq C$, то положим $C_\varepsilon := C_\varepsilon + \varepsilon c_{st}^*$ и переходим к шагу 4.

Если $C_\varepsilon := C_\varepsilon + \varepsilon \sum_{(i,j) \in L} c_{ij}^* > C$, то $\varepsilon = (C - C_\varepsilon) / c_{st}^*$,

$C = C_\varepsilon$ и переходим к шагу 4.

Шаг 4. Увеличиваем поток из источника s в сток t :

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \varepsilon, & \text{если } (i, j) \in L^+ \cup \bar{L}^+; \\ x_{ij} - \varepsilon, & \text{если } (j, i) \in L^- \cup \bar{L}^-. \end{cases}$$

Если $C_\varepsilon < C$, переходим к шагу 1. В противном случае алгоритм заканчивает работу. Вычисляем элементы матрицы оптимального синтеза $\bar{Y}^0 = \left\| \bar{y}_{ij}^0 \right\|$ приведенной сети

$$\bar{y}_{ij}^0 = \begin{cases} x_{ij}^0 - \bar{d}_{ij}, & \text{если } x_{ij}^0 > \bar{d}_{ij}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Корректность алгоритма следует из того, что, как это было доказано в [2], в сети не возникает циклов отрицательного веса и по построению матрицы $\bar{C} = \left\| \bar{c}_{ij} \right\|$ стоимости оптимального синтеза исходной многополюсной и приведенной сети совпадают.

ВЫВОДЫ

1. Представлены алгоритмы, позволяющие эффективно решать задачи по выбору варианта модернизации топологически сложных систем централизованного теплоснабжения при их развитии в результате увеличения тепловых нагрузок.

2. Разработанный алгоритм и программное средство можно рекомендовать для использования при создании перспективных планов развития систем теплоснабжения городов и населенных пунктов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седнин, В. А. Теория и практика создания автоматизированных систем управления теплоснабжением / В. А. Седнин. – Минск: БНТУ, 2005. – 192 с.
2. Корзников, А. Д. Оптимальный синтез многополюсных сетей / А. Д. Корзников // Вестник БНТУ. – 2005. – № 4. – С. 52–57.

Поступила 03.05.2013