УДК 517.977.5

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА С ЗАДАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Доктора техн. наук, профессора ТИМОШПОЛЬСКИЙ В. И., КОВАЛЕВСКИЙ В. Б., инж. РОМАДАН Г., студ. ИЛЮСЕНКО П. В.

Белорусский национальный технический университет

Задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) рассмотрена многими исследователями [1, 5]. Основные идеи ее решения связаны с принципом максимума Л. С. Понтрягина (задача сводится к соответствующей краевой) и динамическим программированием (задача сводится к решению специального уравнения Беллмана). При этом приходится интегрировать систему нелинейных дифференциальных уравнений Риккати.

Предлагаемый подход к решению задачи АКОР основан на построении специальной функции Кротова [1], которую можно получить в квадратурах. При этом, для того чтобы ее построить, необходимо интегрировать систему стационарных линейных дифференциальных уравнений и одно нелинейное дифференциальное уравнение. Таким образом, отпадает необходимость решения нелинейной граничной задачи или нелинейного уравнения Беллмана, что позволяет построить более эффективный (по некоторым критериям) алгоритм решения задачи АКОР.

В настоящей работе рассматривается постановка задачи, когда задаются оба граничных условия. Предлагается ввести штрафную функцию и перейти к некоторой вспомогательной задаче со свободным левым и фиксированным правым концами траектории. При этом находится не точное, а приближенное решение исходной задачи. Подбирая постоянный коэффициент в функции штрафа, можно добиться отклонения полученной траектории от начального состояния системы с заданной точностью.

Рассмотрим вполне управляемую линейную систему:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu\,; \qquad (1)$$

$$x(0) = x_0\,; \qquad (2)$$

$$x(t_k) = x_T\,, \qquad (3)$$

где x – вектор-столбец размерности $n \times 1$; u – то же $m \times 1$; A – постоянная матрица размерности $n \times n$; B – то же $n \times m$; t_k – фиксированное время ($t_k > 0$); x_0 – заданный вектор фазовых координат системы (1) в момент времени $t = 0$; x_T – то же в момент времени t_k.

Требуется найти такое гладкое управление $u^*(t)$, которое переводило бы решение системы (1) из начального состояния (2) в конечное (3) за время t_k и доставляло бы минимум функционалу

$$I(u) = \int_0^{t_k} \left((a,x) + (b,u) + x^T P x + u^T Q u\right) dt \to \min_{u \in R^m}, \qquad (4)$$

где P – постоянная матрица размерности $n \times n$; Q – постоянная, положительно определенная, симметричная матрица размерности $m \times m$; a – постоянный вектор размерности $1 \times n$; b – то же $1 \times m$.

Рассмотрим вспомогательную задачу вида:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu\,; \qquad (5)$$

$$x(t_k) = x_T\,; \qquad (6)$$

$$\hat{I}(u) = \int_0^{t_k} \Big((a,x) + (b,u) + x^T P x + u^T Q u + K\|x(0) - x_0\|^2\Big) dt \to \min_{u \in R^m},$$

где K – достаточно большое фиксированное положительное число.

Можно показать, что

$$\|x(0)-x_0\|^2=(x_T^T-x_0^T,x_T-x_0)-$$
$$-2\int_0^{t_k}\left(x(t)^T-x_0^T,Ax+Bu\right)dt.$$

Тогда

$$\hat{I}(u)=K(x_T^T-x_0^T,x_T-x_0)+$$
$$+\int_0^{t_k}\left((a,x)+(b,u)+x^TPx+u^TQu-\right.\tag{7}$$
$$\left.-2K\left(x(t)^T-x_0^T,Ax+Bu\right)\right)dt\to\min_{u\in R^m}.$$

Для решения задачи (5)–(7) привлечем вспомогательное квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных [4]

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\frac{\partial S}{\partial x},Ax+Bu\right)=(a,x)+(b,u)+x^TPx+$$
$$+u^TQu-2K(x^T-x_0^T,Ax+Bu)+\tag{8}$$
$$+\frac{K}{t_k}(x_T^T-x_0^T,x_T-x_0)$$

с начальным условием

$$S(x,0)=0\,.\tag{9}$$

Найдем решение (8), (9) при

$$u=\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T+$$
$$+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x-x_0)-\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}b^T.\tag{10}$$

Подставим (10) в (8). Получим .

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\frac{\partial S}{\partial x},Ax+\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T+KB\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x-x_0)-\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T\right)=$$
$$=(a,x)+(b,\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x-x_0)-\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}b^T)+$$
$$+x^TPx+(\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x}B+K(x^T-x_0^T)B-\frac{1}{2}b)(\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x-x_0)-\tag{11}$$
$$-\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}b^T))-2K(x^T-x_0^T,Ax+\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T+KB\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x-x_0)-$$
$$-\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T)+\frac{K}{t_k}(x_T^T-x_0^T,x_T-x_0).$$

Таким образом, мы имеем задачу Коши для нелинейного уравнения с частными производными первого порядка (11), (9). Решим ее, используя метод характеристик [2]. Построим характеристическую систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dt}{d\upsilon}=1;\\ \dfrac{dx}{d\upsilon}=Ax+\dfrac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}B^TR^T+KB\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x-x_0)-\dfrac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T;\\ \dfrac{dR_0}{d\upsilon}=0;\\ \dfrac{dR}{d\upsilon}=-RA+a+2x^TP-2Kx^T\left(A+A^T\right)+2Kx_0^TA-KRB\left(Q^T\right)^{-1}B^T+\\ +Kb\left(Q^T\right)^{-1}B^T-2K^2(x^T-x_0^T)B\left(Q^T\right)^{-1}B^T;\\ \dfrac{dS}{d\upsilon}=R_0+R\left(Ax+\dfrac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}B^TR^T+KB\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x-x_0)-\dfrac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T\right)\end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} t\big|_{\upsilon=0} = 0; \\ x\big|_{\upsilon=0} = \tau; \\ R_0\big|_{\upsilon=0} = (a,\tau) + \tau^T P\tau - 2K(\tau^T - x_0^T)A\tau + \dfrac{K}{t_k}(x_T^T - x_0^T, x_T - x_0) + \\ + K(\tau^T - x_0^T)B\left(Q^T\right)^{-1} b^T - \dfrac{1}{4} b\left(Q^T\right)^{-1} b^T - K^2(\tau^T - x_0^T)B\left(Q^T\right)^{-1} B^T(\tau - x_0); \\ R\big|_{\upsilon=0} = (0, 0, \ldots, 0), \\ S\big|_{\upsilon=0} = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$t = \upsilon;$$

$$R_0 = (a,\tau) + \tau^T P\tau - 2K(\tau^T - x_0^T)A\tau + $$
$$+ \frac{K}{t_k}(x_T^T - x_0^T, x_T - x_0) + K(\tau^T - x_0^T)B\left(Q^T\right)^{-1} b^T -$$
$$- \frac{1}{4} b\left(Q^T\right)^{-1} b^T - K^2(\tau^T - x_0^T)B\left(Q^T\right)^{-1} B^T(\tau - x_0).$$

Составим уравнение

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{d\upsilon} \\ \left(\dfrac{dR}{d\upsilon}\right)^T \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x \\ R^T \end{pmatrix} + f,$$

где

$$\Lambda =$$
$$= \begin{pmatrix} A + KB\left(Q^T\right)^{-1} B^T & \dfrac{1}{2} B\left(Q^T\right)^{-1} B^T \\ 2P^T - 2K(A + A^T) - 2K^2 B(Q)^{-1} B^T & -A^T - KB(Q)^{-1} B^T \end{pmatrix};$$

$$f = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} B\left(Q^T\right)^{-1} b^T - KB\left(Q^T\right)^{-1} B^T x_0 \\ a^T + 2KA^T x_0 + KB(Q)^{-1} b^T + 2K^2 B\left(Q^T\right)^{-1} B^T x_0 \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\begin{pmatrix} x \\ R^T \end{pmatrix} = \exp(\Lambda\upsilon)\begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} + \exp(\Lambda\upsilon)\int_0^{\upsilon} \exp(-\Lambda w)dwf.$$

Обозначим

$$\exp(\Lambda\upsilon) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\upsilon) & \varphi_3(\upsilon) \\ \varphi_2(\upsilon) & \varphi_4(\upsilon) \end{pmatrix}; \quad \int_0^{\upsilon} \exp(-\Lambda w)dwf = \begin{pmatrix} d_1(\upsilon) \\ d_2(\upsilon) \end{pmatrix},$$

где $\varphi_1(\upsilon)$, $\varphi_2(\upsilon)$, $\varphi_3(\upsilon)$, $\varphi_4(\upsilon)$ – матрицы размерности $n \times n$; $d_1(\upsilon)$, $d_2(\upsilon)$ – векторы размерности $n \times 1$.

Поэтому $x = \varphi_1(\upsilon)(\tau + d_1(\upsilon)) + \varphi_3(\upsilon)d_2(\upsilon)$, $R^T = \varphi_2(\upsilon)(\tau + d_1(\upsilon)) + \varphi_4(\upsilon)d_2(\upsilon)$.

Определим вектор τ

$$\tau = \varphi_1(\upsilon)^{-1}x - \varphi_1(\upsilon)^{-1}\varphi_3(\upsilon)d_2(\upsilon) - d_1(\upsilon). \quad (12)$$

Докажем обратимость матрицы $\varphi_1(\upsilon)$ [3].

При $\upsilon = 0$ (в начальный момент времени) $\exp(\Lambda\upsilon)$ представляет собой единичную матрицу: $\varphi_1(\upsilon)\big|_{\upsilon=0} = E$, т. е. в начальный момент времени $\varphi_1(\upsilon)$ обратима.

Так как $\exp(\Lambda\upsilon)$ – непрерывная, всегда можно определить момент времени $\upsilon = \upsilon_1 > 0$ такой, что $\det\limits_{\upsilon\in[0,\upsilon_1]} \varphi_1(\upsilon) \neq 0$.

Предполагая, что момент времени $t_k \in [0, \upsilon_1]$, можно говорить об обратимости матрицы $\varphi_1(\upsilon)$ на интервале $[0,\ t_k]$. В противном случае обратного преобразования может не существовать.

Определим теперь

$$S(\tau,t)=\Big[(a,\tau)+\tau^T P\tau+\frac{K}{t_k}\left(x_T^T-x_0^T,x_T-x_0\right)-2K\left(\tau^T-x_0^T\right)A\tau+K(x_T^T-x_0^T)B\left(Q^T\right)^{-1}b^T-$$
$$-\frac{1}{4}b\left(Q^T\right)^{-1}b^T-K^2(\tau^T-x_0^T)B\left(Q^T\right)^{-1}B^T(\tau-x_0)\Big]t+$$
$$+\tau^T\int_0^t\varphi_2(\upsilon)^T\left(A[\varphi_1(\upsilon)(\tau+d_1(\upsilon))+\varphi_3(\upsilon)d_2(\upsilon)]-\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T+KB\left(Q^T\right)^{-1}B^T\times\right.$$
$$\left.\times[\varphi_1(\upsilon)(\tau+d_1(\upsilon))+\varphi_3(\upsilon)d_2(\upsilon)-x_0]\right)d\upsilon+\frac{1}{2}\tau^T\int_0^t\varphi_2(\upsilon)^T B\left(Q^T\right)^{-1}B^T\varphi_2(\upsilon)d\upsilon\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\tau^T\int_0^t\varphi_2(\upsilon)^T B\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\varphi_2(\upsilon)d_1(\upsilon)+\varphi_4(\upsilon)d_2(\upsilon)\right)d\upsilon+$$
$$+\int_0^t d_1(\upsilon)^T\varphi_2(\upsilon)^T\left(A[\varphi_1(\upsilon)(\tau+d_1(\upsilon))+\varphi_3(\upsilon)d_2(\upsilon)]-\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T+\right.$$
$$\left.+KB\left(Q^T\right)^{-1}B^T[\varphi_1(\upsilon)(\tau+d_1(\upsilon))+\varphi_3(\upsilon)d_2(\upsilon)-x_0]\right)d\upsilon+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left(d_1(\upsilon)^T\varphi_2(\upsilon)^T+d_2(\upsilon)^T\varphi_4(\upsilon)^T\right)B\left(Q^T\right)^{-1}B^T\varphi_2(\upsilon)d\upsilon\tau+ \tag{13}$$
$$+\int_0^t d_2(\upsilon)^T\varphi_4(\upsilon)^T\left(A[\varphi_1(\upsilon)(\tau+d_1(\upsilon))+\varphi_3(\upsilon)d_2(\upsilon)]-\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T+\right.$$
$$\left.+KB\left(Q^T\right)^{-1}B^T[\varphi_1(\upsilon)(\tau+d_1(\upsilon))+\varphi_3(\upsilon)d_2(\upsilon)-x_0]\right)d\upsilon+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left(d_1(\upsilon)^T\varphi_2(\upsilon)^T+d_2(\upsilon)^T\varphi_4(\upsilon)^T\right)B\left(Q^T\right)^{-1}B^T\varphi_2(\upsilon)d_1(\upsilon)+\varphi_4(\upsilon)d_2(\upsilon))d\upsilon.$$

Интегрируя последнее соотношение и подставляя $\tau=\varphi_1(t)^{-1}x-\varphi_1(t)^{-1}\varphi_3(t)d_2(t)-d_1(t)$ в (13), можно определить $S(x,t)$ и ее производную $\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^T$.

Для фиксированных $x,t,u\in R^m$ найдем точку экстремума для функции

$$G(u)=\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\frac{\partial S}{\partial x},Ax+Bu\right)-(a,x)-(b,u)-$$
$$-x^TPx-u^TQu+2K\left(x^T-x_0^T,Ax+Bu\right)- \tag{14}$$
$$-\frac{K}{t_k}\left(x_T^T-x_0^T,x_T-x_0\right).$$

Экстремум функции G, если на u не наложены никакие ограничения, определяется из решения системы уравнений

$$\frac{\partial G}{\partial u}=0.$$

В силу симметричности Q имеем

$$\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{\partial S}{\partial x}B-b-2u^TQ+2K\left(x^T-x_0^T\right)B=0.$$

Откуда точка экстремума определяется как

$$u=\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}b^T+ \tag{15}$$
$$+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x-x_0).$$

Определим матрицу Гессе при данном u

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}=-2Q.$$

По условию Q – положительно определенная матрица, следовательно, $-2Q$ – отрицательно определенная матрица, поэтому управление (15) доставляет максимум функции (14).

Поэтому для любых фиксированных $x, t, u \in R^m$ и найденной $S(x,t)$ имеем

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}+\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}, Ax+Bu\right)-(a,x)-(b,u)-x^T Px-u^T Qu+2K\left(x^T-x_0^T, Ax+Bu\right)-$$

$$-\frac{K}{t_k}\left(x_T^T-x_0^T, x_T-x_0\right)\le 0\equiv\frac{\partial S}{\partial t}+$$

$$+\left(\frac{\partial S}{\partial x}, Ax+\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T+KB\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x-x_0)\right)-(a,x)-$$

$$-\left(b,\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}b^T+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x-x_0)\right)-x^T Px-$$

$$-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x}B-\frac{1}{2}b+K(x^T-x_0^T)B\right)\left(\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}b^T+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x-x_0)\right)+$$

$$+2K\left(x^T-x_0^T, Ax+\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T+KB\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x-x_0)\right)-$$

$$-\frac{K}{t_k}\left(x_T^T-x_0^T, x_T-x_0\right).$$

Пусть $v(t)$ – некоторое допустимое управление для задачи (5)–(7), $y(t)$ – соответствующая этому управлению траектория. Причем $y(t_k)=x_T$.

Пусть также $x^*(t)$ является решением системы (5) при условии (6) при u, определяемой соотношением (10). Управление $u^*(t)$ определяется из уравнения (10) после подстановки в него решения уравнения (5) вместо $x=x^*(t)$. Естественно, что $x^*(t_k)=x_T$.

Тогда

$$\frac{\partial S(y(t),t)}{\partial t}+\left(\frac{\partial S(y(t),t)}{\partial x}, Ay(t)+Bv(t)\right)-(a,y(t))-(b,v(t))-y(t)^T Py(t)-v(t)^T Qv(t)+$$

$$+2K\left(y(t)^T-x_0^T, Ay(t)+Bv(t)\right)-\frac{K}{t_k}\left(x_T^T-x_0^T, x_T-x_0\right)\le 0\equiv\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial t}+$$

$$+\left(\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}, Ax^*(t)+\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T+KB\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x^*(t)-x_0)\right)-$$

$$-(a,x^*(t))-\left(b,\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}b^T+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x^*(t)-x_0)\right)-$$

$$-x^*(t)^T Px^*(t)-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}B-\frac{1}{2}b+K(x^*(t)^T-x_0^T)B\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}b^T+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x^*(t)-x_0)\right)+$$

$$+2K\left(x^*(t)^T-x_0^T, Ax^*(t)+\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T+\right.$$

$$\left.+KB\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x^*(t)-x_0)\right)-\frac{K}{t_k}\left(x_T^T-x_0^T, x_T-x_0\right).$$

Отметим, что

$$\frac{dS(y(t),t)}{dt}=\frac{\partial S(y(t),t)}{\partial t}+\left(\frac{\partial S(y(t),t)}{\partial x}, Ay(t)+Bv(t)\right).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dS(y(t),t)}{dt}-(a,y(t))-(b,v(t))-y(t)^TPy(t)-v(t)^TQv(t)+$$

$$+2K\left(y(t)^T-x_0^T, Ay(t)+Bv(t)\right)-\frac{K}{t_k}\left(x_T^T-x_0^T, x_T-x_0\right)\le 0\equiv\frac{dS(x^*(t),t)}{dt}-$$

$$-(a,x^*(t))-\left(b,\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}b^T+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x^*(t)-x_0)\right)-$$

$$-x^*(t)^TPx^*(t)-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}B-\frac{1}{2}b+K(x^*(t)^T-x_0^T)B\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}b^T+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x^*(t)-x_0)\right)+$$

$$+2K\left(x^*(t)^T-x_0^T, Ax^*(t)+\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T+\right.$$

$$\left.+KB\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x^*(t)-x_0)\right)-\frac{K}{t_k}\left(x_T^T-x_0^T, x_T-x_0\right).$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства на отрезке $[0, t_k]$, а также, учитывая (9), приводя подобные слагаемые и умножая обе части неравенства на –1, имеем

$$\int_0^{t_k}\left[(a,y(t))+(b,v(t))+y(t)^TPy(t)+v(t)^TQv(t)-2K\left(y(t)^T-x_0^T, Ay(t)+Bv(t)\right)\right]dt\ge$$

$$\ge\int_0^{t_k}\left[(a,x^*(t))+\left(b,\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}b^T+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x^*(t)-x_0)\right)+\right.$$

$$+x^*(t)^TPx^*(t)+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}B-\frac{1}{2}b+K(x^*(t)^T-x_0^T)B\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}\left(Q^T\right)^{-1}b^T+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x^*(t)-x_0)\right)-$$

$$-2K\left(x^*(t)^T-x_0^T,Ax^*(t)+\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}B^T\left(\frac{\partial S(x^*(t),t)}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}B\left(Q^T\right)^{-1}b^T+K\left(Q^T\right)^{-1}B^T(x^*(t)-x_0)\right)\Big]dt.$$

Поэтому значение функционала $\hat{I}(u)$ при любом управлении, отличном от $u^*(t)$, не меньше значения функционала (7) на управлении $u^*(t)$. Следовательно, $u^*(t)$, $x^*(t)$ – оптимальные управление и траектория для задачи (5)–(7).

Легко видеть, что

$$\hat{I}(u)=I(u)+KI_k(u),$$

где $I_k(u)=\|x(0)-x_0\|^2$.

При управлении u^0, для которого $x(0)=x_0$, $x(t_k)=x_T$ имеем

$$\hat{I}(u^0)=I(u^0)+KI_k(u^0)=I(u^0).$$

Для оптимального управления u^*

$$\hat{I}(u^*)=I(u^*)+KI_k(u^*)\le\hat{I}(u^0)=I(u^0).$$

Поэтому

$$0\le KI_k(u^*)\le I(u^0)-I(u^*).$$

Откуда

$$0\le I_k(u^*)=\frac{I(u^0)-I(u^*)}{K}\le\varepsilon^2,$$

где ε – некоторое число.

Подбирая $K\ge\dfrac{I(u^0)-I(u^*)}{\varepsilon^2}$, имеем траекторию, проходящую через точку x_T в момент времени t_k и исходящую из ε-окрестности точки x_0 в начальный момент времени.

Пример. Рассмотрим управляемую линейную систему:

$$\frac{dx}{dt}=u; \tag{16}$$

$$x(0)=0; \tag{17}$$

$$x(t_k)=x_T. \tag{18}$$

Требуется найти такое гладкое управление $u^*(t)$, которое переводило бы решение системы (16) из начального состояния (17) в конечное (18) и доставляло бы минимум функционалу

$$I(u)=\int_0^{t_k}\left(x^2+u^2\right)dt\to\min_{u\in R^m}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу вида:

$$\frac{dx}{dt}=u;$$

$$x(t_k)=x_T;$$

$$\hat{I}(u)=\int_0^{t_k}\left(x^2+u^2\right)dt+Kx(0)^2\to\min_{u\in R^m}.$$

Можно записать

$$\hat{I}(u)=Kx_T^2+\int_0^{t_k}\left(x^2+u^2-2Kxu\right)dt\to\min_{u\in R^m}.$$

Рассмотрим вспомогательное квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial x}u=x^2+u^2-2Kxu+\frac{K}{t_k}x_T^2 \tag{19}$$

с начальным условием

$$S(x,0)=0. \tag{20}$$

Найдем решение (19), (20) при

$$u=\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x}+Kx. \tag{21}$$

Подставим (21) в (19). Получим

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+K\frac{\partial S}{\partial x}x= \\ =x^2+u^2-K^2x^2+\frac{K}{t_k}x_T^2. \qquad (22)$$

Таким образом, мы имеем задачу Коши для нелинейного уравнения с частными производными первого порядка (22), (20).

Построим характеристическую систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dt}{d\upsilon}=1;\\ \dfrac{dx}{d\upsilon}=\dfrac{1}{2}R+Kx;\\ \dfrac{dR_0}{d\upsilon}=0;\\ \dfrac{dR}{d\upsilon}=-KR+2x-2K^2x;\\ \dfrac{dS}{d\upsilon}=R_0+\dfrac{1}{2}R^2+KxR\end{cases} \text{ с начальными условиями } \begin{cases}t|_{\upsilon=0}=0;\\ x|_{\upsilon=0}=\tau;\\ R_0|_{\upsilon=0}=\tau^2+\dfrac{K}{t_k}x_T^2-K^2\tau^2;\\ R|_{\upsilon=0}=0;\\ R|_{\upsilon=0}=0.\end{cases}$$

Решая ее, получим

$$S(x,t)=\frac{(1+K^2)x^2}{\mathrm{ct}h\,t+K}+\frac{K}{t_k}x_T^2t.$$

Откуда $u=\dfrac{1+K\mathrm{ct}h\,t}{\mathrm{ct}h\,t+K}x$.

Подставляя найденное управление в исходное уравнение и решая полученное дифференциальное уравнение, найдем траекторию:

$$x(t)=\frac{(K+\mathrm{ct}h\,t)\mathrm{sh}\,t}{(K+\mathrm{ct}h\,t_k)\mathrm{sh}\,t_k}x_T;$$

$$u(t)=\frac{(1+K\mathrm{ct}h\,t)\mathrm{sh}\,t}{(K+\mathrm{ct}h\,t_k)\mathrm{sh}\,t_k}x_T.$$

Пусть $u^0=\dfrac{x_T}{t_k}$ – допустимое управление для (16)–(18).

Тогда, выбирая $K\ge\dfrac{I(u^0)-I(u^*)}{\varepsilon^2}$, получим траекторию, проходящую через точку x_T в момент времени t_k и исходящую из ε-окрестности точки x_0 в начальный момент времени.

В данном примере, переходя к пределу при $K\to\infty$, получим следующий оптимальный процесс:

$$x^*(t)=\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{sh}\,t_k}x_T;$$

$$u^*(t)=\frac{\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{sh}\,t_k}x_T.$$

Алгоритм решения задачи. Можно сформулировать следующий алгоритм решения исходной задачи:

1. Задать $A, B, a, b, P, Q, x_0, x_T, t_k$ – исходные данные.
2. Задать точность вычислений $\varepsilon>0$, штрафной параметр K, шаг численного интегрирования h.
3. Положить $t=t_k$; $x=x_T$.
4. Вывести на экран текущее значение x.
5. Вычислить $u(x,t)$, вывести на экран текущее значение u.
6. Вычислить $f(x,t)=Ax+Bu$ и новое значение $x=x-hf(x,t)$.
7. Положить $t=t-h$.
8. Если $t\ge0$, то перейти к шагу 4.
9. Если $t<0$, то закончить вычисления.

Для реализации этого алгоритма было разработано программное обеспечение.

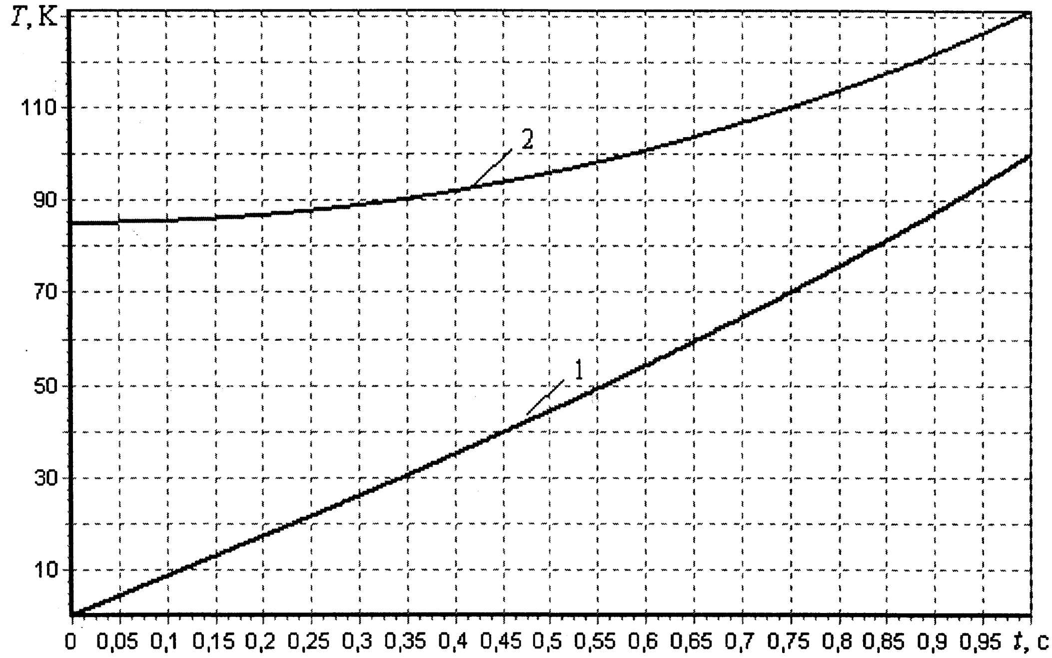

Рис. 1. Графики: 1 – оптимального процесса (x); 2 – оптимального управления (u)

Расчет производился при следующих исходных данных:

- $A=0;\ B=1;\ P=1;\ Q=1;\ a=0;\ b=0;\ t_0=0;\ t_k=1;\ x_0=0;\ x_T=100;$
- $\varepsilon=0{,}001;\ h=0{,}001;\ K=10000$.

Графики оптимального процесса (x) и оптимального управления (u) показаны на рис. 1.

ВЫВОДЫ

В работе разработан и программно реализован алгоритм решения задачи АКОР для линейно-квадратичного функционала с заданными граничными условиями. Программная реализация алгоритма показала свою работоспособность и хорошую сходимость результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кротов В. Ф., Гурман В. И.** Методы и задачи оптимального управления. – М., 1973.

2. **Карташев А. П., Рождественский Б. Л.** Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М., 1979.

3. **Ковалевский В. Б., Козлов С. М.** К решению задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 7. – С. 1002–1003.

4. **Ковалевский В. Б., Козлов С. М.** К решению задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов с заданными граничными условиями // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 33, № 7. – С. 1003–1004.

5. **Летов А. М.** Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. – 1960. – Т. 21, № 5. – С. 561–568.