

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОРНЕВЫХ ПОРТРЕТОВ

Канд. техн. наук *НЕСЕНЧУК А. А.*

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

Реальные системы автоматического управления практически всегда функционируют в условиях более или менее существенной неопределенности, что может привести к значительным отклонениям их режимов работы от установленных техническими требованиями. Одним из подходов к решению этой проблемы является обеспечение робастных свойств систем, т. е. придание системе таких свойств, которые обеспечили бы ее устойчивость в условиях существенной переменности параметров. В этом направлении известны работы [1–4], в которых использовались частотные, алгебраические и корневые методы. В данной работе развивается корневой подход [2, 5].

Исследование поведения системы третьего порядка. Исследуем поведение динамической системы, описываемой характеристическим уравнением 3-й степени, при изменении всех коэффициентов этого уравнения на бесконечных интервалах значений. При этом используем корневой подход [2, 5].

Характеристическое уравнение системы представим в виде

$$\sum_{j=0}^3 a_j p^{3-j} = 0, \quad (1)$$

где a_j – действительные коэффициенты: $-\infty \leq a_j \leq +\infty$; $p = \delta + i\omega$.

Для выявления свойств системы построены корневые годографы при условии непрерывного изменения свободного члена (свободного параметра) уравнения (1) на бесконечных действительных интервалах (годографы Теодорчика–Эванса) для различных сочетаний значений коэффициентов a_1 и a_2 . Исследованы особенности локализации и свойства этих годографов в плоскости комплексного переменного p .

Корневым портретом интервальной динамической системы, описываемой характери-

стическим уравнением (1), назовем семейство корневых годографов этой системы, построенных при всех возможных сочетаниях коэффициентов (1) из заданных интервалов.

На рис. 1 представлена динамика корневых портретов интервальной системы для случая $a_1 > 0$ при непрерывном изменении a_2 от положительных значений (рис. 1а–в) к отрицательным (рис. 1г). Крестиками отмечены полюсы передаточной функции разомкнутой системы.

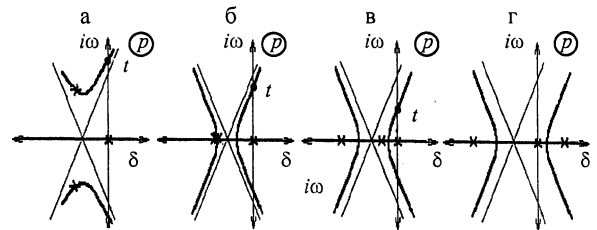


Рис. 1. Динамика корневого портрета при непрерывном изменении коэффициентов характеристического уравнения на заданных интервалах

Два полюса располагаются в комплексной плоскости корнями (рис. 1а), затем с уменьшением a_2 они сходятся на оси δ (рис. 1б) и начинают расходиться в разные стороны (рис. 1в). Соответственно при уменьшении a_2 от $+\infty$ до $-\infty$ две комплексные ветви корневого портрета сближаются в направлении оси δ , затем сходятся на этой оси в одной точке и далее расходятся в противоположные стороны по оси δ , приближая тем самым систему к неустойчивому состоянию. Причем установлено, что с увеличением a_1 весь портрет сдвигается влево, т. е. в сторону более устойчивого состояния системы. После пересечения одним из полюсов оси $i\omega$ и переходе его в правую полуплоскость p система теряет устойчивость (рис. 1г).

Определим следующие основные закономерности динамики корневого портрета интервальной системы третьего порядка при $a_1 > 0$:

а) при увеличении координаты ω вдоль границы устойчивости (оси $i\omega$) значения коэффициента a_3 (при вариации a_2 и постоянном a_1) возрастают в точках пересечения границы ветвями корневого портрета, т. е. образуют монотонно возрастающую числовую последовательность. Причем, чем больше при этом значение a_1 , тем выше соответствующие значения a_3 в этой последовательности;

б) повышение коэффициента a_2 приводит к увеличению значений координат ω точек пересечения соответствующими ветвями корневого портрета границы устойчивости. Причем, чем больше значение a_1 , тем ниже соответствующие значения ω в точках пересечения и выше a_3 ;

в) значения коэффициента a_3 в точках пересечения ветвей корневого портрета интервальной системы с границей устойчивости непрерывно возрастают как в результате непрерывного увеличения коэффициента a_1 , так и a_2 ;

г) при положительных значениях a_2 граница устойчивости $i\omega$ всегда пересекается только положительными (при $a_1 > 0$) или только отрицательными (при $a_1 < 0$) ветвями корневого портрета интервальной системы.

Для значений $a_1 < 0$ все установленные выше закономерности будут противоположны, т. е. там, где отмечалось увеличение, будет уменьшение, и наоборот. Очевидно, что в этом случае при положительных значениях a_2 мнимую ось пересекают отрицательные ветви корневого портрета, а в случае отрицательных значений a_2 пересечение отсутствует.

При $a_1 = 0$ корневой портрет пересекает границу устойчивости либо в точках, где $a_3 = 0$, либо вообще ее не пересекает.

Из отмеченного следует, что при прочих равных условиях с уменьшением a_1 корневой портрет интервального семейства постепенно и непрерывно перемещается вправо в сторону неустойчивого состояния.

Условие устойчивости интервальной системы. Анализ уравнений динамики траекторий на границе асимптотической устойчивости (ось $i\omega$) подтвердил описанные выше закономерности и показал, что с увеличением ω значения a_3 в точках пересечения (точки t на рис. 1) траекторий с осью $i\omega$ возрастают (рис. 1). Причем эти значения a_3 тем больше, чем больше коэффициенты a_1 и a_2 . Это позволило получить условие устойчивости для рассматриваемой интервальной системы в виде

$$\bar{a}_3 < a_{3_{\min}}^+, \quad (2)$$

где \bar{a}_3 – максимальная заданная граница интервала изменения коэффициента a_3 ; $a_{3_{\min}}^+$ – минимальное положительное значение коэффициента a_3 в точках пересечения корневого портрета заданной интервальной системы с осью $i\omega$ (самая нижняя точка пересечения на мнимой оси).

На основании описанного выше метода определим простую процедуру параметрического синтеза интервальной системы третьего порядка, состоящую из трех этапов:

1. Вычисление минимального значения координаты ω точек пересечения (точки t на рис. 1) ветвей корневого портрета интервальной системы с мнимой осью плоскости собственных частот по формуле

$$\omega_{\min} = \pm \sqrt{a_2}. \quad (3)$$

Выражение (3) получено на основании уравнения корневого годографа Теодорчика–Эванса динамической системы (1).

Из рис. 1г видно, что ветвь годографа не пересекает границу устойчивости, что свидетельствует о неустойчивости рассматриваемого семейства в пределах заданного интервала изменения a_2 . Если бы минимальное значение a_2 ограничивалось значением, которому соответствует годограф на рис. 1в, то формула (3) определяла бы координату точки t (рис. 1в).

2. Вычисление минимального значения a_3 в точках пересечения ветвей корневого портрета интервальной системы с мнимой осью плоскости собственных частот по формуле

$$a_{3_{\min}}^+ = a_1 (\omega_{\min})^2. \quad (4)$$

Выражение (4) получено на основании формулы параметра [3], используемой для вычисления значения свободного параметра в любой точке корневого годографа.

3. Проверка условия устойчивости (2) и корректировка предельного значения a_3 в соответствии с этим условием в случае необходимости.

Очевидно, что для рассматриваемого примера (рис. 1) условие (2) не может быть применено, поскольку интервал изменения a_2 в этом примере включает отрицательные значения (рис. 1г). Для обеспечения возможности использования рассматриваемого условия следует принять $a_2 > 0$.

ВЫВОД

На рис. 2 годографы, построенные при различных значениях a_2 , представлены на одном графике и образуют фрагмент корневого портрета, что наглядно иллюстрирует изменение свойств системы в условиях существенной вариации параметров. Буквами S с индексами на рисунке показаны полюсы передаточной функции разомкнутой системы. Нижний индекс обозначает порядковый номер полюса, верхний – порядковый номер годографа.

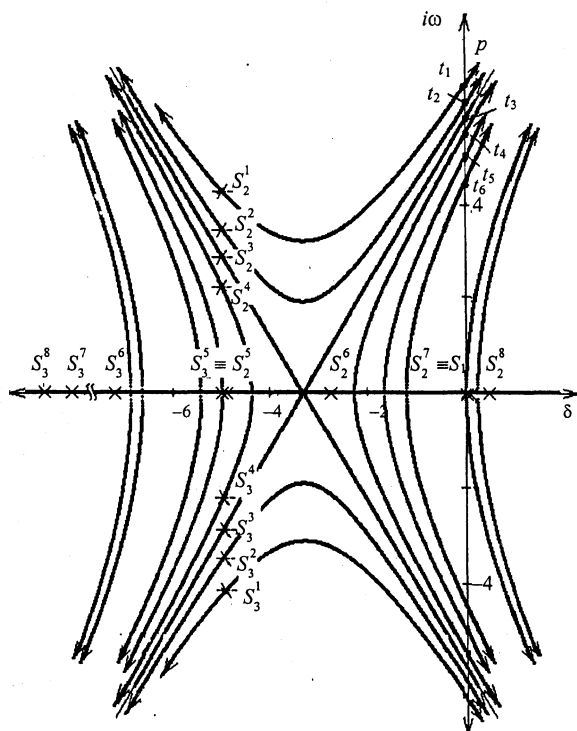


Рис. 2. Фрагмент корневого портрета интервальной динамической системы, описываемой характеристическим полиномом $p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$ при $40 \leq a_2 \leq -5$

Очевидно, что в отличие от условий Андерсона и Джури [4] условие (2) позволяет также находить значения a_3 , при которых система является асимптотически устойчивой на заданных интервалах значений коэффициентов ее характеристического уравнения, т. е. осуществлять параметрический синтез устойчивых интервальных систем даже в случае, когда исходная система не является устойчивой, определяя устойчивое состояние, ближайшее к заданному неустойчивому.

Выполнено исследование динамики интервальной системы автоматического управления, описываемой характеристическим уравнением (1) 3-й степени, при изменении всех коэффициентов этого уравнения на бесконечных интервалах значений. Построены корневые годографы для характерных состояний интервальной системы при условии непрерывного изменения свободного члена (свободного параметра) уравнения (1) на бесконечных действительных интервалах для всех возможных сочетаний значений коэффициентов a_1 и a_2 . Исследованы особенности локализации и свойства этих годографов в плоскости комплексного переменного p .

Сформулированы основные свойства корневых портретов подобных интервальных систем. Получено корневое условие устойчивости, на основе которого разработан метод параметрического синтеза системы, позволяющий находить значения интервалов изменения коэффициентов ее характеристического уравнения, обеспечивающие устойчивое состояние системы ближайшее к исходному неустойчивому. Условие может быть использовано при синтезе систем управления техническими объектами с существенно переменными параметрами.

Благодаря детальному исследованию поведения интервальной системы удалось снять ограничение условия устойчивости, сформулированного в [5], которое могло быть применено только для случаев расположения разомкнутых полюсов исходной интервальной системы в левой полуплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // АиТ. – 1990. – № 9. – С. 45–54.
2. Barmish B. R., Tempo R. The robust root locus // Automatica. – 1993. – Vol. 26. – P. 183–192.
3. Римский Г. В. Исследование устойчивости линейных интервальных динамических систем методами общей теории корневых траекторий. – Мн., 1993. – 48 с. (Препринт № 28 / ИТК НАН Беларуси).
4. Anderson B. D. O., Jury E. I., Mansour M. On robust hurwitz polynomials // IEEE Trans. Automat. Control. – 1987. – Vol. AC 32. – № 10. – P. 909–913.
5. Nesenchuk A. A. Parameter Synthesis of Interval Control Systems Using Root Loci of Kharitonov's Polynomials // Proceedings of the European Control Conference ECC'99, Karlsruhe, Germany. August 31 – September 03, 1999. ID 0123.