

$$A_0 = f_0 / [(\omega_0^2 - \omega_b^2)^2 + 4\omega_b^2 \delta^2]^{0,5} \quad (15)$$

и аргумент

$$\varphi = \arctg[2\delta\omega_b / (\omega_b^2 - \omega_0^2)] \quad (16)$$

комплексной величины $\bar{A} = A_0 \exp(i\varphi)$; значит, установившиеся вынужденные колебания давления в системе, описываемой уравнением (12), будут иметь вид

$$P_1 = A_0 \cos(\omega_b \tau + \varphi). \quad (17)$$

В зависимостях (13)–(15) величина $f_0 = P_b K_a / M_a$ является параметром перехода от (12) к (13). Вынужденные колебания описываются суммой общего (2) и частного (17) решений, отражающих соответственно переходный и установившийся процессы; при достаточно большом τ решение (2) стремится к нулю и остается только решение (17).

В области резонансных частот $\omega_b \approx \omega_0$ амплитуда колебаний давления в КС зависит от коэффициента затухания $\delta = 0,5Z_a / M_a$, частота соответствует частоте внешнего сигнала, а $\varphi \rightarrow \pi/2$. Это означает, что колебания давления в КС будут отставать по фазе на $\pi/2$ от сигнала внешнего давления P_b . Знаменатель в формуле (14) можно привести к виду

$$K_a = K_a - M_a \omega_b^2 + i\omega_b Z_a = K_0 \exp(i\varphi), \quad (18)$$

применив замену $\omega_0^2 = K_a / M_a$, $\delta = 0,5Z_a / M_a$, тогда решение уравнения (12) будет иметь вид

$$P_1 = P_b K_a / K_a = F_0 / K_a, \quad (19)$$

где комплексная величина K_a является акустической динамической жесткостью колебательной системы (КС), состоящей соответственно из акустической жесткости объема K_a , динамической жесткости акустической массы ($-M_a \omega_b^2$) и динамической жесткости акустического сопротивления $i\omega_b Z_a$; $F_0 = P_b K_a$.

При $\omega_b \ll \omega_0$ в K_a преобладает слагаемое K_a , колебательная система управляется акустической жесткостью K_a и в пренебрежении другими слагаемыми (18) можно записать $P_1 \approx P_b$. При $\omega_b \gg \omega_0$ колебательная система управляется акустической массой, так как в K_a преобладает слагаемое $M_a \omega_b^2$, амплитуда колебаний давления в КС определяется зависимостью $P_1 = P_b K_a / (\omega_b^2 M_a) = P_b (\omega_0 / \omega_b)^2$.

Эти выводы необходимо учитывать при конструировании и эксплуатации камер пульсирующего горения, применяемых для очистки поверхностей нагрева котельных агрегатов, интенсификации конвективной теплоотдачи в теплообменниках и т. д. Изменяя размеры КС – длину канала l , его площадь сечения S и объем КС $V_{КС}$, можно получить требуемые результаты для заданной частоты ω_b ; рабочая температура в КС не влияет на K_a и уменьшает M_a из-за снижения плотности газов ρ , влияние температуры на Z_a рассмотрено выше.

В настоящем анализе рассмотрены КС с сосредоточенными параметрами – акустической массой M_a , акустической жесткостью K_a и акустическим трением Z_a . Если КС имеет конструктивные элементы, участвующие в пе-

реносе колебательной энергии, то роль этих элементов можно учесть, вводя коэффициенты связи [3].

ВЫВОДЫ

Применение метода сосредоточенных акустических параметров для описания динамических свойств энергетических камер сгорания позволяет определить собственные акустические свойства и развитие вынужденных колебаний в КС. В работе приведены зависимости, позволяющие рассчитать собственную частоту КС при известных конструктивных и режимных характеристиках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т о р о п о в Е. В. Динамические особенности камер сгорания теплоэнергетических установок // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений). – 1983. – № 11. – С. 66–70.
2. Т о р о п о в Е. В., К р а в ч е н к о В. П. Колебания в камере сгорания доменных воздушонагревателей при возмущениях произвольной формы // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1989. – № 6. – С. 132–136.
3. Т о р о п о в Е. В. Динамика систем горения топлива теплоэнергетических установок // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений). – 1981. – № 12. – С. 83–86.

Поступила 16.12.2003

УДК 536.2

О НАХОЖДЕНИИ ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЫ В ЗАДАЧАХ, МОДЕЛИРУЮЩИХ КИНЕТИКУ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

ШЕВЕЛЕВ В. В., ЛОКШИН ДЖ. Л.

*Московская государственная академия тонкой химической технологии
имени М. В. Ломоносова*

К краевым задачам для уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях приводят разнообразные задачи физики, химии, технологии, среди которых следует отметить в первую очередь задачи, связанные с моделированием кинетики фазовых превращений [1...3]. В качестве примера можно указать задачи, моделирующие процессы роста и плавления кристаллов, кристаллизации слитков и т. п.

В то же время подобные задачи являются одними из наиболее сложных не только в теории теплопроводности, но и в математической физике, так как решение задачи ищется в области, граница которой движется по закону, который не известен (задачи стефановского типа), а подлежит определению самосогласованным с искомым температурным полем способом из дополнительного физического условия, задаваемого на движущейся меж-

фазной границе (МГ). Поэтому при решении задач стефановского типа в общем случае не применимы классические методы математической физики, так как при этом не удастся согласовать решение уравнения теплопроводности с изменением во времени области теплопереноса.

Указанное обстоятельство обусловило разработку различных специальных аналитических методов решения задач стефановского типа [1...6], позволяющих найти приближенное аналитическое выражение для закона движения МГ и температурного поля. Наиболее существенные результаты, полученные в этой области теории теплопроводности, представлены в [1, 2, 4].

В то же время при решении проблемы устойчивости формы МГ и установлении правил отбора скорости ее движения, структуры и формы основным является вопрос о нахождении не температурного поля, а закона движения МГ.

В связи с этим большой интерес для кинетической теории фазовых превращений и развития методов решения задач стефановского типа представляют аналитические методы их решения, позволяющие находить закон движения МГ, не определяя при этом температурное поле. Среди работ этого направления отметим метод дифференциальных рядов [1, 2], метод интегральных уравнений специального типа [5], метод обобщенного интегрального преобразования [4, 6]. В [7] предложен метод нахождения неизвестного закона движения МГ из интегрального уравнения, получаемого из исходной краевой задачи интегрированием уравнения переноса по всей области процесса. В данной работе метод интегральных уравнений, разработанный в [7] применительно к одномерным задачам стефановского типа, обобщается на многомерный случай, что позволяет, не определяя температурное поле, находить не только закон движения МГ, но и исследовать устойчивость ее формы и устанавливать правила отбора скорости движения МГ.

Суть метода, предложенного в [7], проиллюстрируем на примере краевой задачи, моделирующей процесс кристаллизации из расплава, в котором осуществляется полное конвективное перемешивание, а отвод теплоты из системы – через неподвижную кусочно-гладкую поверхность S_0 , ограничивающую изнутри область переноса теплоты $G(t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_S(M,t)}{\partial t} = a_S \Delta T_S(M,t), & M \in G(t); \quad t > 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$T_S(M,0) = \Phi(M), \quad M \in \bar{G}(0), \quad (2)$$

$$\begin{cases} T_S(M,t) = \Psi(v_n), & M \in S(t); \quad t > 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \lambda_S \frac{\partial T_S(M,t)}{\partial n} + \alpha T_S(M,t) = q \rho v_n + \alpha T_L(t), & M \in S(t); \quad t > 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \beta_1 \frac{\partial T_S(M,t)}{\partial n} - \beta_2 T_S(M,t) = -\varphi(M,t), & M \in S_0; \quad t > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $T_S(M,t)$ – температура в твердой фазе в точке M в момент времени t ; $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$; $S(t)$ – межфазная кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область $G(t)$ в момент времени t ; $T_L(t)$ – температура в жидкой

фазе в момент времени t ; $\Phi(M)$ – начальное распределение температуры в твердой фазе; $\Psi(v_n)$ – заданная функция нормальной скорости движения МГ v_n , определяемая исходя из механизма процесса кристаллизации на МГ; $\phi(M, t)$ – заданная функция, описывающая условия теплообмена на неподвижной поверхности S_0 ; α – коэффициент теплообмена между жидкой и твердой фазами. Предполагаем также, что функции, входящие в (1)...(5), удовлетворяют всем условиям, необходимым для существования решения поставленной краевой задачи. Эти условия можно найти, например, в [4]. Заметим, что в (3) и (4) n – внешняя нормаль к S и S_0 соответственно.

Для получения уравнения, позволяющего найти закон движения МГ, умножим в соответствии с идеей метода интегральных уравнений [7] уравнение (1) на некоторую функцию $f(M, t - \eta)$ и проинтегрируем по области $G(\eta)$ и по переменной η от нуля до некоторого значения времени t (переменную t в (1) необходимо заменить на η). Получим

$$\int_0^t d\eta \int_{G(\eta)} \frac{\partial T_S(M, t)}{\partial \eta} f(M, t - \eta) dV = a_S \int_0^t d\eta \int_{G(\eta)} f(M, t - \eta) \Delta T_S(M, t) dV. \quad (6)$$

Учитывая, что $f \frac{\partial T_S}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (f T_S) - T_S \frac{\partial f}{\partial \eta}$, и преобразуя левую часть уравнения (6) с помощью обобщенной теоремы Гаусса, а правую – с помощью второй формулы Грина, получим

$$\begin{aligned} \int_0^t d\eta \frac{d}{d\eta} \int_{G(\eta)} T_S(M, t) f(M, t - \eta) dV - \int_0^t d\eta \int_{G(\eta)} T_S \frac{\partial f}{\partial \eta} dV - \int_0^t d\eta \int_{s(\eta)} v_n f T_S ds = \\ = a_S \int_0^t d\eta \int_{G(\eta)} T_S \Delta f dV + a_S \int_0^t d\eta \int_{s_0} \left(f \frac{\partial T_S}{\partial n} - T_S \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds + \\ + a_S \int_0^t d\eta \int_{s(\eta)} \left(f \frac{\partial T_S}{\partial n} - T_S \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Потребуем, чтобы функция $f(M, t - \eta)$ удовлетворяла следующим условиям:

$$\begin{cases} -\frac{\partial f(M, t - \eta)}{\partial \eta} = a_S \Delta f(M, t - \eta), & M \in G(\eta), \quad 0 < \eta < t; & (8) \\ f(M, 0) = 0, & M \in G(0); & (9) \\ \beta_1 \frac{\partial f(M, t - \eta)}{\partial \eta} - \beta_2 f(M, t - \eta) = 0, & M \in S_0; \quad 0 < \eta < t. & (10) \end{cases}$$

Тогда уравнение (7) примет вид

$$a_S \int_0^t d\eta \int_{s(\eta)} \left\{ -\Psi(v_n(M, \eta)) \left(\frac{\alpha}{\lambda_S} f(M, t - \eta) + \frac{\partial f}{\partial n} \right) + f(M, t - \eta) \Psi(v_n(M, \eta)) v_n(M, \eta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\lambda_s} f(M, t - \eta) \left(q \rho v_n(M, \eta) + \alpha T_L(\eta) \right) \Big\} ds = \\
& = \frac{a_s}{\beta_1} \int_0^t d\eta \int_{s_0} f(M, t - \eta) \varphi(M, \eta) ds - \int_{G(0)} \Phi(M) f(M, t) dV.
\end{aligned} \tag{11}$$

Если $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 1$, то слагаемое $\frac{a_s}{\beta_1} \int_0^t d\eta \int_{s_0} f \varphi ds$ в (11) нужно заменить

выражением $-a_s \int_0^t d\eta \int_{s_0} \varphi \frac{\partial f}{\partial n} ds$.

В интегральное уравнение (11) входит функция $T_L(t)$, которая удовлетворяет, очевидно, уравнению массового баланса

$$\frac{dT_L}{dt} + \frac{T_L}{cp} \frac{\alpha \int ds + cp \int_{s(t)} v_n ds}{V(0) + \int_0^t d\eta \int_{s(\eta)} v_n ds} = \frac{\alpha}{cp} \frac{\int \Psi(v_n) ds}{s(t)} \frac{1}{V(0) + \int_0^t d\eta \int_{s(\eta)} v_n ds}. \tag{12}$$

Из (12) следует

$$T_L(t) = e^{-\int_0^t p(\eta) d\eta} \left\{ T_L(0) + \int_0^t p(\xi) d\xi g(\eta) d\eta \right\}, \tag{13}$$

где

$$p(t) = \frac{\int \left(v_n + \frac{\alpha}{cp} \right) ds}{s(t)} \frac{1}{V(0) + \int_0^t d\eta \int_{s(\eta)} v_n ds} \tag{14}$$

и

$$g(t) = \frac{\int \Psi(v_n) ds}{s(t)} \frac{1}{V(0) + \int_0^t d\eta \int_{s(\eta)} v_n ds}; \tag{15}$$

$V(0)$ и $T_L(0)$ – соответственно начальный объем твердой фазы и начальная температура в жидкой фазе.

Предлагаемый подход допускает обобщение на случай фазового превращения с переносом теплоты в старой и новой фазах. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i \Delta T_i(M, t), & M \in G_i(t), \quad t > 0; \quad i = S, L; & (16) \\ T_i(M, 0) = \Phi_i(M), & M \in G_i(0), \quad i = S, L; & (17) \\ \beta_{1i} \frac{\partial T_i(M, t)}{\partial n} - \beta_{2i} T_i(M, t) = -\varphi_i(M, t), & \beta_{1i}^2 + \beta_{2i}^2 \neq 0; \quad i = S, L; \quad t \geq 0, & (18) \\ & M \in S_0; \quad i = S; \quad M \in S_i; \quad i = L. \end{cases}$$

Здесь индекс S означает твердую фазу, L – жидкую фазу; S_0 и S_1 – поверхности, ограничивающие области, занятые твердой и жидкой фазами соответственно. На $S(t)$ выполняются условия:

- теплового баланса

$$q\rho v_n = \lambda_S \frac{\partial T_S(M, t)}{\partial n} - \lambda_L \frac{\partial T_L(M, t)}{\partial n}, \quad M \in S(t); \quad t \geq 0; \quad (19)$$

- равенства температур

$$T_S(M, t) = T_L(M, t), \quad M \in S(t); \quad t \geq 0; \quad (20)$$

- кинетическое условие, определяющее скорость движения МГ v_n в зависимости от переохлаждения $\Delta T = T_k - T(M, t)$; $M \in S(t)$ на МГ:

$$v_n = f(\Delta T). \quad (21)$$

Здесь T_k – температура кристаллизации.

Для получения интегрального уравнения, определяющего закон движения МГ, умножим уравнения переноса (16) на функцию $\lambda_i f_i(M, t - \eta)$, $i = S, L$ и проинтегрируем по η от нуля до некоторого значения t (заменяя t на η в уравнениях (16)) по области $G_i(\eta)$. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_i}{a_i} \int_0^t d\eta \frac{d}{d\eta} \int_{G_i(\eta)} T_i(M, \eta) f_i(M, t - \eta) dV - \frac{\lambda_i}{a_i} \int_0^t d\eta \int_{G_i(\eta)} T_i(M, \eta) \frac{\partial f_i(M, t - \eta)}{\partial \eta} dV - \\ & - \frac{\lambda_i}{a_i} \int_0^t d\eta \int_{G_i(\eta)} \operatorname{div}(\bar{v} f_i(M, t - \eta) T_i(M, \eta)) dV = \lambda_i \int_0^t d\eta \int_{G_i(\eta)} T_i(M, \eta) \Delta f_i(M, \eta) dV + (22) \\ & + \lambda_i \int_0^t d\eta \int_{S(\eta) \cup S_k} \left(f_i(M, \eta) \frac{\partial T_i(M, \eta)}{\partial n} - T_i(M, \eta) \frac{\partial f_i(M, \eta)}{\partial n} \right) dS. \end{aligned}$$

Здесь $i = L, S$; $k = 0$ при $i = S$ и $k = 1$ при $i = L$. В (21) уже использованы обобщенная теорема Гаусса и вторая формула Грина.

Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{cases} -\frac{\partial f_i}{\partial t} = a_i \Delta f_i(M, t), & M \in G_i(t); \quad t > 0; \quad i = S, L; \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} f_i(M, 0) = 0, & M \in G_i(0); \quad i = S, L; \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \beta_{1i} \frac{\partial f_i(M, t)}{\partial n} - \beta_{2i} f_i(M, t) = 0, & M \in S_0; \quad i = S; \quad M \in S_1; \quad i = L; \quad 0 < \eta < t; \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} f_S(M, t - \eta) = f_L(M, t - \eta), & M \in S(\eta); \quad 0 < \eta < t. \end{cases} \quad (26)$$

С учетом этих условий после сложения уравнений (22) при $i = S$ и $i = L$ получим следующее уравнение для определения закона движения МГ при $\beta_{1i} \neq 0$; $i = S, L$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda_S}{a_S} \int_{G_S(0)} T_S(M,0) f_S(M,t) dv - \frac{\lambda_L}{a_L} \int_{G_L(0)} T_L(M,0) f_L(M,t) dv = \\
& = \int_0^t d\eta \int_{s(\eta)} f_S(M,t-\eta) v_n(M,\eta) q \rho ds + \\
& + \int_0^t d\eta \int_{s(\eta)} T_L(M,\eta) \left(\lambda_L \frac{\partial f_L(M,t-\eta)}{\partial n} - \lambda_S \frac{\partial f_S(M,t-\eta)}{\partial n} \right) ds - \\
& - \frac{\lambda_S}{\beta_{1S}} \int_0^t d\eta \int_{s_0} f_S(M,t-\eta) \varphi_S(M,\eta) ds - \frac{\lambda_L}{\beta_{1L}} \int_0^t d\eta \int_{s_1} f_L(M,t-\eta) \varphi_L(M,\eta) ds.
\end{aligned} \tag{27}$$

В случае $\beta_{1i} = 0$ вместо (27) получим

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda_S}{a_S} \int_{G_S(0)} T_S(M,0) f_S(M,t) dv - \frac{\lambda_L}{a_L} \int_{G_L(0)} T_L(M,0) f_L(M,t) dv = \\
& = \int_0^t d\eta \int_{s(\eta)} f_S(M,t-\eta) v_n(M,\eta) q \rho ds + \\
& + \int_0^t d\eta \int_{s(\eta)} T_L(M,\eta) \left(\lambda_L \frac{\partial f_L(M,t-\eta)}{\partial n} - \lambda_S \frac{\partial f_S(M,t-\eta)}{\partial n} \right) ds - \\
& - \lambda_S \int_0^t d\eta \int_{s_0} \frac{\partial f_S(M,t-\eta)}{\partial n} \varphi_S(M,\eta) ds - \lambda_L \int_0^t d\eta \int_{s_1} \frac{\partial f_L(M,t-\eta)}{\partial n} \varphi_L(M,\eta) ds.
\end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, задача нахождения закона движения МГ сведена к решению более простых, но достаточно сложных задач (23)...(26) и последующему решению нелинейного уравнения (27) или (28).

В качестве иллюстрации предложенного подхода рассмотрим аналогичную (1)...(5) краевую задачу, описывающую одномерный процесс кристаллизации расплава, лимитируемый отводом теплоты через стенку (подложку) [2]. Она имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_S}{\partial t} &= a_S \frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2}, & 0 < x < y(t), \quad t > 0; \end{aligned} \right. \tag{29}$$

$$\left\{ \begin{aligned} T_S(0,t) &= T_n, & t > 0; \end{aligned} \right. \tag{30}$$

$$\left\{ \begin{aligned} T_S[y(t),t] &= T_k, & t > 0; \end{aligned} \right. \tag{31}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial x} \Big|_{x=y(t)} &= q \rho \frac{dy}{dt}, & t > 0; \end{aligned} \right. \tag{32}$$

$$\left\{ \begin{aligned} y(0) &= 0. \end{aligned} \right. \tag{33}$$

Здесь $y(t)$ – положение межфазной границы.

Согласно (8)...(10) функция $f(M,t-\eta)$ должна удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} -\frac{\partial f(x, t - \eta)}{\partial \eta} = a_s \frac{\partial^2 f(x, t - \eta)}{\partial x^2}, & 0 < x < y(\eta), \quad 0 < \eta < t; \\ f(x, 0) = 0, & 0 < x < y(t); \\ f(0, t - \eta) = 0, & 0 < \eta < t. \end{cases} \quad (34)$$

$$(35)$$

$$(36)$$

Функцию $f(M, t - \eta)$, удовлетворяющую условиям (34)...(36), можно представить в виде

$$f(x, t - \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_s (t - \eta)}} \left[\exp\left(-\frac{(x - y(t))^2}{4a_s (t - \eta)}\right) - \exp\left(-\frac{(x + y(t))^2}{4a_s (t - \eta)}\right) \right]. \quad (37)$$

Соответствующее интегральное уравнение, согласно (11), имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_s T_k \int_0^t f(y(\eta), t - \eta) \frac{dy}{d\eta} d\eta + a_s \int_0^t f(y(\eta), t - \eta) q\rho \frac{dy}{d\eta} d\eta - \\ - \lambda_s a_s T_k \int_0^t \frac{\partial f(y(\eta), t - \eta)}{\partial x} d\eta + \lambda_s a_s T_k \int_0^t \frac{\partial f(y(\eta), t - \eta)}{\partial x} d\eta = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Ищем закон движения МГ в виде [2, 4]

$$y(t) = 2\beta\sqrt{a_s t}, \quad (39)$$

где β – неизвестная константа.

Подставляя (37) и (39) в (38) и выполняя интегрирование по частям, получим уравнение

$$\begin{aligned} -2\lambda_s T_k \operatorname{erfc}\beta + \frac{2\beta a_s q\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\exp\left(-\beta^2 \frac{1-x}{1+x}\right) - \exp\left(-\beta^2 \frac{1+x}{1-x}\right) \right] dx + \\ + 2\lambda_s T_n \operatorname{erfc}\beta = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь $\operatorname{erfc}z = 1 - \operatorname{erf}z$, $\operatorname{erf}z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$.

Интегралы в (40) вычисляются соответственно с помощью подстановок

$\xi = \frac{1-x}{1+x}$ и $\eta = \frac{1+x}{1-x}$. В результате получаем:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \exp\left(-\beta^2 \frac{1-x}{1+x}\right) dx = \frac{\pi}{2} \exp(\beta^2) [1 - \operatorname{erf}^2(\beta)]; \quad (41)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \exp\left(-\beta^2 \frac{1+x}{1-x}\right) dx = \frac{\pi}{2} \exp(\beta^2) \operatorname{erfc}^2(\beta). \quad (42)$$

Подставляя (41) и (42) в (40), приходим к следующему уравнению для определения параметра β в законе движения МГ (39)

$$2\lambda_s (T_k - T_n) \operatorname{erfc}(\beta) = 2\sqrt{\pi} \beta a_s q\rho e^{\beta^2} \operatorname{erfc}(\beta) \operatorname{erf}(\beta), \quad (43)$$

откуда окончательно получаем искомое трансцендентное уравнение для определения неизвестной константы β

$$\beta e^{\beta^2} \operatorname{erf}(\beta) = \frac{\lambda_s (T_k - T_n)}{\sqrt{\pi a_s q \rho}}, \quad (44)$$

которое совпадает с полученными ранее результатами [2].

ВЫВОДЫ

Развитый в данной работе подход к нахождению неизвестной нормальной скорости v_n движения МГ позволяет свести указанную проблему к решению соответствующего интегрального уравнения, не прибегая к предварительному нахождению температурного поля. Для получения этого интегрального уравнения достаточно выбрать функцию $f(M, t - \eta)$, удовлетворяющую условиям (8), (9), т. е. взять решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее нулевым начальным условиям и нулевым граничным условиям на неподвижной границе области теплопереноса, что существенно упрощает процедуру нахождения закона движения МГ. Показано, что предложенный метод является достаточно эффективным в случае, когда теплоперенос происходит в одной фазе.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

a – коэффициент температуропроводности $\text{м}^2/\text{с}$; c – удельная теплоемкость, $\text{Дж}/\text{кг}\cdot\text{К}$; q – удельная теплота кристаллизации, $\text{Дж}/\text{кг}$; t – время, с ; T – температура, К ; V – объем, м^3 ; α – коэффициент теплоотдачи от жидкой фазы к твердой, $\text{Вт}/\text{м}^2\cdot\text{К}$; λ_s , λ_L – коэффициент теплопроводности соответственно в твердой и жидкой фазах, $\text{Вт}/\text{м}\cdot\text{К}$; ρ – плотность твердой фазы, $\text{кг}/\text{м}^3$.

Индексы:

0 – неподвижная граница; S – параметры твердой фазы; L – параметры жидкой фазы; N – нормальная составляющая; k – характеристика точки кристаллизации; p – характеристика подложки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лю б о в Б. Я. Кинетическая теория фазовых превращений. – М.: Металлургия, 1969. – 264 с.
2. Лю б о в Б. Я. Теория кристаллизации в больших объемах. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
3. С т а л ь н о й слиток / Ю. А. Самойлович, В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова, В. В. Филиппов – Т. 2. Затвердевание и охлаждение / Под ред. В. И. Тимошпольского, Ю. А. Самойлова. – Мн.: Беларуская наука, 2000. – 637 с.
4. К а р т а ш о в Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Наука, 1985. – 480 с.
5. Г р и н б е р г Г. А., Ч е к м а р е в а О. М. О движении поверхности раздела в задачах стефановского типа // ЖТФ. – 1970. – № 10. – Т. 40. – С. 2025–2031.
6. К а р т а ш о в Э. М. Метод обобщенного интегрального преобразования при решении уравнения теплопроводности в области с движущейся границей // ИФЖ. – 1987. – № 3. – Т. 52. – С. 494–505.
7. Ш е в е л е в В. В. Аналитический расчет времени лимитируемого диффузией растворения сферических частиц второй фазы // Металлы. – 1988. – № 6. – С. 57–60.

Поступила 1.07.2002