

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХМАССОВОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

*Инж. ЛУГОВОЙ И. В.*

*Белорусский национальный технический университет*

Упругими называются тела, способные существенно деформироваться под действием внешних сил и восстанавливать свои размеры после снятия внешних нагрузок [1]. Упругие тела используются в качестве чувствительных элементов в измерительных системах, для создания силового контакта и натяга между деталями, в качестве упругих опор, амортизаторов и пр. Кроме того, такие элементы могут быть использованы для аккумулирования механической энергии. Существуют различные конфигурации упругих элементов. По геометрическим признакам они разделяются на стержневые, полученные из проволоки или ленты, и упругие в виде оболочек из листового материала. Стержневые пружины могут быть винтовыми и плоскими. Винтовые бывают цилиндрическими, коническими и фасонными.

В конструкциях машин и механизмов упругие элементы могут воспринимать действие вынужденных колебаний в широком диапазоне частот, преимущественно низких. Расчеты упругих тел заключаются в составлении уравнения деформаций, определении частот собственных колебаний и проверке вероятности совпадения собственных частот с вынужденными для исключения резонансного явления, или наоборот, создания резонанса в колебательной системе. Известны методики определения и исследования параметров упругих элементов [2–4], среди которых можно выделить расчеты: на жесткость, напряжений в сечениях, на устойчивость.

Анализ использования ультразвуковых колебательных систем показал, что рассматриваемые акустические системы состоят из жестких элементов, а это обусловлено необходимо-

стью создания в них стоячей волны. В то же время использование упругих элементов в подобных системах изучено в недостаточной мере и ограничивается в отдельных случаях применением в качестве передающего или рабочего инструмента в технологических системах и буровых машинах [5, 6].

Практика же использования упругих тел в ультразвуковых системах ограничена несколькими известными изобретениями, к числу которых относятся: ультразвуковой инструмент, выполненный в виде петли из упругого материала; ленты или проволоки [7]; устройство для ультразвукового полирования и упрочняющей обработки [8], содержащее спиралевидный пружинящий волновод; устройство в виде излучателя изгибных колебаний в инструменте из ленты, свернутой в спираль вдоль продольной оси, для обработки глубоких каналов, щелей и отверстий [9]; упругий элемент в виде плоскоооальной пружины для вибрационного преобразователя, используемый для расширения частотного диапазона в измерительной технике [10].

В связи с этим автором статьи поставлена цель – изучить возможность применения упругих элементов в акустических технологических системах при обработке материалов. Для этого могут быть использованы упругие кольца, винтовые и плоские пружины, упругие элементы с плоскоооальной и эллиптической формами (так называемые пружины Бурдона), витые трубчатые пружины с различным поперечным сечением, сильфонные упругие тела. Кроме того, необходимо сделать прогноз колебательных процессов, возникающих в акустических

системах с упругими элементами, на основе теоретических расчетов динамических систем.

В число исследуемых задач входит также рассмотрение динамики колебательных систем в диапазоне ультразвуковых частот. Распространение ультразвуковых колебаний в акустической системе имеет волновой характер, однако работа, совершаемая инструментом, осуществляется в условиях динамического взаимодействия с обрабатываемой поверхностью. Ввиду этого ультразвуковую систему «упругое тело – инструмент» (рис. 1а) можно представить в виде динамической системы, состоящей из двух отдельных приведенных сосредоточенных масс  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 1б) при действии кинематических колебаний  $x_0 \sin \theta t$ . Рассмотрим кинематическое возбуждение колебательной системы. Для анализа воспользуемся методом перемещений [11], основная система которого представлена на рис. 1в, г.

Исходным условием для расчета является жесткий контакт инструмента с опорой (рис. 1в). Смещения масс обозначим соответственно  $x_2$  и  $x_1$ . Представленная схема предварительно описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{1p} = 0; \\ k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{2p} = 0, \end{cases}$$

где  $k_{11} = k_1$ ,  $k_{12} = k_{21} = k_2$ ,  $k_{22} = k_1 + k_2$ , а  $k_{1p}$ ,  $k_{2p}$  – соответственно жесткость нижней и верхней пружины;  $k_{1p} = 0$  – реактивное усилие связи 1 в основной системе метода перемещений;  $k_{2p} = -k_2 x_0 \sin \theta t$ .

С учетом решения подобных задач [3] колебания системы можно описать уравнениями:

$$\begin{cases} k_1 x_1 - k_2 x_2 + m_1 \ddot{x}_1 = 0; \\ -k_1 x_1 + (k_1 + k_2) x_2 + m_2 \ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 x_2 = 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2 - k_1 x_1 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Будем считать, что верхняя опора упругого элемента колеблется по закону  $x_0(t) = x_0 \sin \theta t$ . Тогда силы инерции  $I_1$  и  $I_2$  колеблющихся масс можно определить по формулам:

$$-m_1 \theta^2 x_0 \sin \theta t; \quad -m_2 \theta^2 x_0 \sin \theta t. \quad (2)$$

Введем обозначения для свободных членов системы (1) [11] и примем

$$k_{1p} = 0; \quad k_{2p} = -k_2 x_0 \sin \theta t; \quad \frac{k_1 + k_2}{m_2} = \alpha; \quad \frac{k_1}{m_2} = \beta; \\ \frac{k_1}{m_1} = \gamma; \quad q = -\frac{x_0 k_2}{m_2}.$$

Таким образом, систему уравнений можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 x_2 = 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2 - k_1 x_1 = -x_0 k_2 \sin \theta t \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \gamma x_1 - \beta x_2 = 0; \\ \ddot{x}_2 + \alpha x_2 - \beta x_1 = -\frac{x_0 k_2}{m_2} \sin \theta t = q \sin \theta t. \end{cases} \quad (3)$$

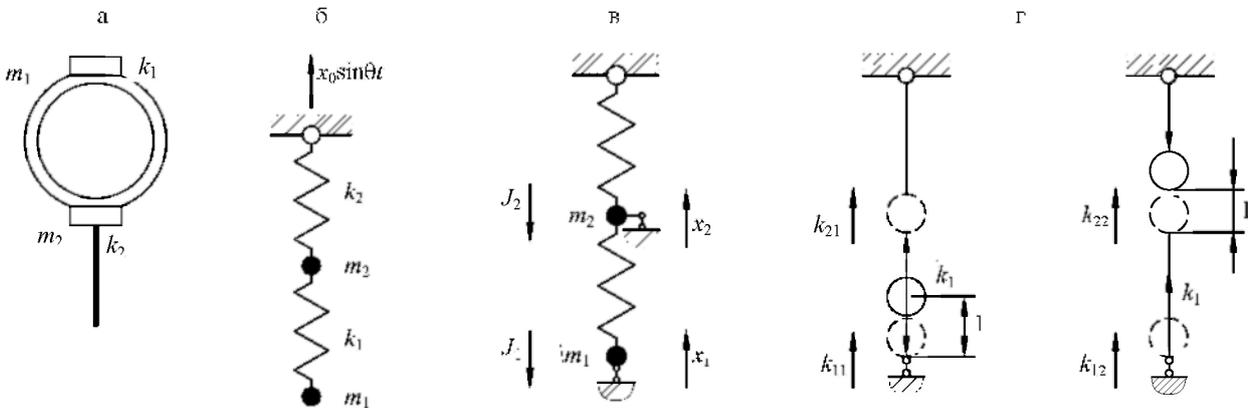


Рис. 1. Динамическая модель и схема перемещений

Смещения масс носят гармонический характер, поэтому принимаем частные решения (3) в виде:

$$x_1 = A_3 \sin \theta t \quad \text{и} \quad x_2 = B_3 \sin \theta t.$$

Тогда система уравнений (3) после упрощения примет вид:

$$\begin{cases} A_3(\gamma - \theta^2) - \gamma B_3 = 0; \\ -\beta A_3 + (\alpha - \theta^2)B_3 = q. \end{cases} \quad (4)$$

Решая ее, получаем:

$$A_3 = \frac{q\gamma}{(\alpha - \theta^2)(\gamma - \theta^2) - \gamma\beta};$$

$$B_3 = \frac{q(\gamma - \theta^2)}{(\alpha - \theta^2)(\gamma - \theta^2) - \gamma\beta}.$$

Решения системы (4) складываются из решения однородной системы и частного решения, соответствующего виду свободных членов. Поскольку колебания масс имеют гармонический характер, это решение можно описать выражениями:

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + v_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + v_2) + A_3 \sin \theta t; \quad (5)$$

$$x_2(t) = \tilde{B}_1 \sin(\omega_1 t + v_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + v_2) + B_3 \sin \theta t,$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – частоты собственных колебаний системы;  $v_1$  и  $v_2$  – сдвиги фаз, находятся из решения однородной системы (3).

Учитывая, что в [4]  $B_1 = A_1 \frac{\gamma - \omega_1^2}{\gamma}$ , а  $B_2 = A_2 \frac{\gamma - \omega_2^2}{\gamma}$ , из (5) получим уравнения:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + v_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + v_2) + A_3 \sin \theta t; \\ x_2(t) = A_1 \frac{\gamma - \omega_1^2}{\gamma} \sin(\omega_1 t + v_1) + A_2 \frac{\gamma - \omega_2^2}{\gamma} \sin(\omega_2 t + v_2) + B_3 \sin \theta t. \end{cases} \quad (6)$$

Начальными условиями при  $t = 0$  будут начальные отклонения масс  $Y_1, Y_2$  и их скорости  $v_1, v_2$ .

$$\begin{cases} Y_1 = A_1 \sin v_1 + A_2 \sin v_2; \\ v_2 = \tilde{B}_1 \sin v_1 + B_2 \sin v_2; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} Y_2 = A_1 \frac{\gamma - \omega_1^2}{\gamma} \sin v_1 + A_2 \frac{\gamma - \omega_2^2}{\gamma} \sin v_2; \\ v_2 = A_1 \omega_1 \frac{\gamma - \omega_1^2}{\gamma} \cos v_1 + A_2 \omega_2 \frac{\gamma - \omega_2^2}{\gamma} + \theta B_3. \end{cases}$$

Подставив в (6)  $A_3$  и  $B_3$  из решения уравнения (4), получим:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + v_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + v_2) + \frac{q\gamma}{(\alpha - \theta^2)(\gamma - \theta^2) - \gamma\beta} \sin \theta t; \\ x_2(t) = A_1 \frac{\gamma - \omega_1^2}{\gamma} \sin(\omega_1 t + v_1) + A_2 \frac{\gamma - \omega_2^2}{\gamma} \sin(\omega_2 t + v_2) + \frac{q(\gamma - \theta^2)}{(\alpha - \theta^2)(\gamma - \theta^2) - \gamma\beta} \sin \theta t. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, разрешающая система уравнений для определения характеристик колебательного процесса  $A_1, A_2, v_1, v_2$  примет вид:

$$\begin{cases} Y_1 = A_1 \sin v_1 + A_2 \sin v_2; \\ \tilde{Y}_2 = A_1 \frac{\gamma - \omega_1^2}{\gamma} \sin v_1 + A_2 \frac{\gamma - \omega_2^2}{\gamma} \sin v_2, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = Y_1; \\ x_1 \frac{\gamma - \omega_1^2}{\gamma} + x_2 \frac{\gamma - \omega_2^2}{\gamma} = Y_2. \end{cases}$$

Для начальных скоростей  $t = 0$  дифференцированием уравнений (8) по времени имеем:

$$\begin{cases} A_1 \omega_1 \cos v_1 + A_2 \omega_2 \cos v_2 + \theta \frac{q\gamma}{(\alpha - \theta^2)(\gamma - \theta^2) - \gamma\beta} = v_1; \\ A_1 \omega_1 \frac{\gamma - \omega_1^2}{\gamma} \cos v_1 + A_2 \omega_2 \frac{\gamma - \omega_2^2}{\gamma} \cos v_2 + \theta \frac{q(\alpha - \theta^2)}{(\alpha - \theta^2)(\gamma - \theta^2) - \gamma\beta} = v_2. \end{cases} \quad (10)$$

В системах уравнений (9, 10) неизвестными являются  $A_1, A_2, v_1$  и  $v_2$ .

Несмотря на нелинейный характер системы уравнений (10), ее можно решить точно относительно  $A_1 \sin v_1$  и  $A_2 \sin v_1$ ;  $A_1 \omega_1 \cos v_1$  и  $A_2 \omega_2 \cos v_2$ .

Находим:

$$A_1 \sin v_1 = F'_{11}; \quad A_2 \sin v_1 = F'_{12}; \quad (11)$$

$$A_1 \omega_1 \cos v_1 = F_{21}; \quad A_2 \omega_2 \cos v_2 = F_{22},$$

где выражения для  $F_{ik}$  ( $i = 1, 2; k = 1, 2$ ) вследствие сложности не приводятся.

Из равенств (11) получаем формулы для сдвига фаз:

$$\operatorname{tg} v_1 = \frac{F'_{11}}{F_{21}} \omega_1; \quad \operatorname{tg} v_2 = \frac{F'_{12}}{F_{22}} \omega_2, \quad (12)$$

что позволяет определить  $A_1$  и  $A_2$ .

При расчете с учетом сил собственно веса масс  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 2) из (1) получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} k_1 x_1 - k_1 x_2 = -m_1 g; \\ -k_1 x_1 + (k_1 + k_2) x_2 = -m_2 g. \end{cases}$$

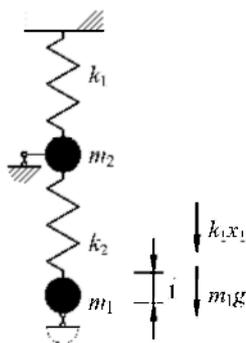


Рис. 2. Динамическая модель для расчета с учетом сил тяжести

Отсюда следует, что  $x_1 = x_2 - \frac{m_1 g}{k_1}$  и  $-k_1 x_2 +$

$$+ k_1 g + (k_1 + k_2) x_2 = -m_2 g.$$

Таким образом, перемещения масс можно представить в виде:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-m_2 g - m_1 g}{-k_1 + (k_1 + k_2)} - \frac{m_1 + m_2}{k_2} g; \\ x_1 = -\frac{m_1 g}{k_1} - \frac{m_1 + m_2}{k_2} g. \end{cases} \quad (13)$$

Вследствие линейности рассматриваемых задач решение (13) накладывается на полученное решение (10). Выведенные уравнения позволяют произвести численный расчет с использованием компьютерных программ. Как пример рассмотрим частный случай, когда на массу  $m_1$  воздействуют вынужденные колебания частотой 20 кГц. В качестве упругого элемента массой  $m_1$  было принято кольцо из стали диаметром 20, шириной 10 и толщиной 1 мм. Рабочим инструментом акустической системы (масса  $m_2$ ) являлась игла диаметром 2 и длиной 50 мм. Полученные результаты расчета представлены в виде осциллограмм на рис. 3. Они характеризуют амплитудные свойства масс  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 3а, б), а также изменения силы  $W$  в точке прижатия иглы к опоре (рис. 3в) (смещениям  $x_1$  и  $x_2$  на осциллограммах соответствуют значения  $Y_1$  и  $Y_2$ ).

Характер кривых смещений масс на осциллограммах в данном примере свидетельствует, что рассматриваемый случай представляет собой сложное колебание, при котором наблюдается сложение двух несинхронных коллинеарных гармонических колебаний каждой из масс  $m_1$  и  $m_2$  с близкими частотами собственных колебаний. В результате сложения этих колебаний образуются биения, при которых размах суммарных колебаний колеблется между минимальным и максимальным значениями. Подобный характер несинхронного изменения силы наблюдается на кривой для силы  $W$  между массой  $m_2$  и опорой.

	а	б	в
$Y_{2,м}$		$Y_{1,м}$	$W, Н$
$4 \cdot 10^{-7}$		$4 \cdot 10^{-4}$	30
$2 \cdot 10^{-7}$		$2 \cdot 10^{-4}$	20
			10
$-2 \cdot 10^{-7}$		$-2 \cdot 10^{-4}$	-10
$-4 \cdot 10^{-7}$		$-4 \cdot 10^{-4}$	-20
			-30

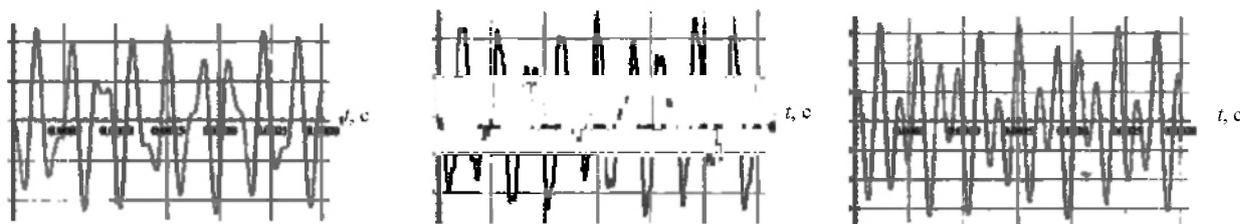


Рис. 3. Осциллограммы перемещений масс и силы в точке прижатия иглы

### ВЫВОДЫ

1. Рассмотрена математическая модель ультразвуковой системы с упругим элементом, работающая в условиях контакта рабочего инструмента с заготовкой без зазора.

2. Анализ динамической модели позволяет моделировать процессы двухмассовой системы путем варьирования геометрических (размерных) и акустических параметров упругих элементов и рабочего инструмента в широком диапазоне частот.

3. Численные расчеты динамической модели позволяют осуществить выбор оптимальных размеров и условий достижения резонанса акустической системы и в результате обеспечить максимальную эффективность технологического процесса.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева, Л. А. Упругие элементы приборов / Л. А. Андреева; под ред. В. И. Феодосьева / ГНТИ машиностроительной литературы. – М., 1962. – 500 с.  
 2. Ильин, М. М. Теория колебаний: учеб. для вузов / М. М. Ильин, К. С. Колесников, Ю. С. Саратов; под общ. ред. К. С. Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ имени И. Э. Баумана, 2003. – 272 с.

3. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. И. Тимошенко. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. – 437 с.  
 4. Пфейффер, П. Колебания упругих тел: пер. с нем. / И. Ифейффер. – Л.: ОНТИ, Гос. технико-теоретическое изд-во, 1934. – 154 с.  
 5. Упругие элементы вибромашин: обзор / ЦНИИ и ТЭИ по строительному, дорожному и коммунальному машиностроению. – М., 1971. – 82 с.  
 6. Симонов, В. В. Волновые процессы в бурильной машине / В. В. Симонов. – М.: МИИХиГИ, 1979. – 113 с.  
 7. Ультразвуковой инструмент: пат. 38243 СССР, МКИ В 06 в 3/00, В 23р 1/00 / А. А. Горбунов, В. М. Салтанов [и др.]; опубл. 23.05.73 // БИ. – 1973. – № 23.  
 8. Устройство для ультразвукового полирования: пат. 854685 СССР, МКИ В 24 в 1/04, В 06 в 1/00 / В. Ф. Зимовец, П. М. Герасимчук, С. И. Стручков; опубл. 15.08.81 // БИ. – 1981. – № 30.  
 9. Излучатель изгибных колебаний: пат. 657868 СССР, МКИ В 06 в 1/00 / Ю. С. Андреев, В. И. Бокановский; опубл. 25.04.79 // БИ. – 1979. – № 15.  
 10. Вибрационный преобразователь: пат. 315479 СССР, МКИ В 06 в 1/08 / В. И. Каспирович; опубл. 01.10.71 // БИ. – 1971. – № 29.  
 11. Борисевич, А. А. Строительная механика: учеб. пособие для вузов / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск: БИТУ, 2009. – 756 с.

Поступила 22.12.2011