УДК 511.343

НОВЫЙ ПОДХОД К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

Канд. физ.-мат. наук, доц. СОКОЛОВА Н. М.

Белорусский национальный технический университет

Теория чисел нового времени началась с заметок Ферма на полях книги Диофанта «Арифметика».

Теорема, сформулированная Ферма, имела чисто геометрический смысл: «Невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем».

В современной формулировке теорема Ферма – это утверждение того, что для любого натурального $n > 2$ уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений в целых положительных числах a, b, c. В такой постановке теорема стала объектом исследования в теории чисел, и поэтому подход к доказательству всегда оставался одинаковым: при выбранном натуральном n исследовались массивы чисел.

Основы геометрического подхода к уравнениям в целых числах заложил Ньютон, понявший, что сложные замены переменных, использованные Диофантом, часто сводятся к проведению секущих и касательных к рациональным кривым.

Совсем недавно великую теорему Ферма окончательно решили Эндрю Уайлс и его сотрудники. Доказательство очень сложное, основано на глубочайшей теории эллиптических кривых.

Необычна логика доказательства: предполагается, что теорема Ферма верна для любого n; после этого строится эллиптическая кривая, связанная со всеми величинами, входящими в уравнение Ферма; тщательно, многотрудно, многостранично с использованием трудоемких вычислений изучаются свойства построенной кривой и «...свойства кривой оказываются столь поразительными, что таких кривых не существует» [1].

Наш подход к доказательству теоремы Ферма состоит в выборе двух положительных отрезков: $a_1 > 0$; $b_1 > 0$; $a_1 \neq 1$; $b_1 \neq 1$; $c = a_1 + b_1 \neq$ $\neq 1$ и затем в исследовании эволюции данных чисел и их суммы при изменении $n = 2, 3, \ldots, \ldots$. Это позволило вернуться к геометрической формулировке теоремы, данной Ферма, и решить задачу аналитически и геометрически с помощью новой интерпретации теоремы Пифагора в многомерных пространствах.

Общепринятое представление теоремы Пифагора в многомерных пространствах – это квадрат полилинейной формы. По числу ненулевых координат определяется валентность полилинейной формы, но не размерность пространства. Прежде чем сформулировать новую теорему Пифагора в n-мерном пространстве, рассмотрим бином Ньютона степени n. Выберем два неравных положительных числа, отличных от единицы, и таких, чтобы их сумма также не равнялась единице [2].

Бином степени n запишем в виде

$$c^n = (a_1 + b_1)^n = (a_1 + b_1)c^{n-1} = = a_1 c^{n-1} + b_1 c^{n-1} = a_n^n + b_n^n, \quad (1)$$

где

$$a_n^n = a_1 c^{n-1}; \quad b_n^n = b_1 c^{n-1} \quad (2)$$

или

$$a_n = a_1^{\frac{1}{n}} c^{\frac{n-1}{n}}; \quad b_n = b_1^{\frac{1}{n}} c^{\frac{n-1}{n}}. \quad (3)$$

Равенства (2) представим в форме

$$\frac{a_1}{a_n}=\left(\frac{a_n}{c}\right)^{n-1};\ \frac{b_1}{b_n}=\left(\frac{b_n}{c}\right)^{n-1};$$

$$\frac{a_n}{c}=\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n-1}};\ \frac{b_n}{c}=\left(\frac{b_1}{b_n}\right)^{\frac{1}{n-1}},\ n\neq 1;$$

$$\left(\frac{a_n}{c}\right)^{n}=\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{\frac{n}{n-1}};\ \left(\frac{b_n}{c}\right)^{n}=\left(\frac{b_1}{b_n}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Сложим почленно последние равенства

$$\left(\frac{a_n}{c}\right)^{n}+\left(\frac{b_n}{c}\right)^{n}\equiv\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{\frac{n}{n-1}}+\left(\frac{b_1}{b_n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\equiv 1,\ n\neq 1.\quad (4)$$

Последовательности натуральных чисел

$$\{n\backslash 1\}=2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

поставим в соответствие множество рациональных чисел

$$\left\{\frac{n}{n-1}\backslash 1\right\}=2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \ldots,\ \frac{n}{n-1},\ \ldots$$

и рассмотрим следующие соотношения в множестве рациональных чисел:

$$\left(\frac{a_{\frac{n}{n-1}}}{c}\right)^{\frac{n}{n-1}}=\left(\frac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}}\right)^{n};$$

$$\left(\frac{b_{\frac{n}{n-1}}}{c}\right)^{\frac{n}{n-1}}=\left(\frac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}}\right)^{n},\quad n\neq 1.\quad (5)$$

Преобразуем равенства (5) следующим образом: извлечем корни n-й степени из двух частей равенств, результаты возведем в степень $n-1$ и найдем n-е степени чисел $a_{\frac{n}{n-1}}$, $b_{\frac{n}{n-1}}$:

$$\left(\frac{a_{\frac{n}{n-1}}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\frac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a_{\frac{n}{n-1}}}{c}=\left(\frac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}}\right)^{n-1}\Rightarrow a^{n}_{\frac{n}{n-1}}=a_1^{n-1}c;$$

$$\left(\frac{b_{\frac{n}{n-1}}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\frac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}}\Rightarrow\frac{b_{\frac{n}{n-1}}}{c}=\left(\frac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}}\right)^{n-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^{n}_{\frac{n}{n-1}}=b_1^{n-1}c.$$

Сами числа представлены соотношениями:

$$a_{\frac{n}{n-1}}=a_1^{\frac{n-1}{n}}c^{\frac{1}{n}};\ b_{\frac{n}{n-1}}=b_1^{\frac{n-1}{n}}c^{\frac{1}{n}}.\qquad (6)$$

Составим сумму произведений $a_n a_{\frac{n}{n-1}}$; $b_n b_{\frac{n}{n-1}}$ (с учетом (3), (6)):

$$a_n a_{\frac{n}{n-1}}=a_1^{\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}}c^{\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}}=a_1c=a_2^2;$$

$$b_n b_{\frac{n}{n-1}}=b_1^{\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}}c^{\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}}=b_1c=b_2^2;\qquad (7)$$

$$c^2=a_2^2+b_2^2=a_n a_{\frac{n}{n-1}}+b_n b_{\frac{n}{n-1}}.\qquad (8)$$

Таким образом, теорема Пифагора в n-мерном пространстве записывается в виде формулы (8), словесная формулировка которой в первой редакции может быть такой: «Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей двух (определенных) прямоугольников, равновеликих площадям квадратов, построенных на соответствующих катетах».

Прямоугольники $\left(a_n a_{\frac{n}{n-1}}\right)$; $\left(b_n b_{\frac{n}{n-1}}\right)$ определены в том смысле, что стороны их связаны между собой соотношениями (7), которые получаются из определений длин этих сторон (3), (6).

Равенства (8) умножим на c^{n-2} и получим бином Ньютона в виде

$$c^n \equiv \left(a_n a_{\frac{n}{n-1}}\right)c^{n-2} + \left(b_n b_{\frac{n}{n-1}}\right)c^{n-2}. \qquad (9)$$

Новая формула бинома Ньютона (1) позволяет утверждать, что любая натуральная степень раскладывается на сумму двух степеней с тем же показателем. Но если бином в степени n записать с учетом новой теоремы Пифагора (8), то получим тождество вида (9), которое можно трактовать как символьные и формулировку, и доказательство теоремы в форме, предложенной Ферма.

На самом деле, пусть (9) $n = 2, 3, 4, \ldots$

при $n = 2$ $c^2 = a_2^2 + b_2^2$ – классическая теорема Пифагора;

при $n = 3$ $c^3 = a_3 a_{\frac{3}{2}} c + b_3 b_{\frac{3}{2}} c$ – «...невозможно разложить ни куб на два куба...»;

при $n = 4$ $c^4 = a_4 a_{\frac{4}{3}} c^2 + b_4 b_{\frac{4}{3}} c^2$ – «...ни биквадрат на два биквадрата...»;

....

$c^n = a_n a_{\frac{n}{n-1}} c^{n-2} + b_n b_{\frac{n}{n-1}} c^{n-2}$ – «... и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем».

Геометрическая интерпетация первоначальной формулировки теоремы Ферма означает, что все правильные многогранники в n-мерных пространствах ($n \geq 2$: квадраты, кубы, биквадраты...) должны иметь правильные грани, т. е. грани с одинаковыми ребрами.

Но для всех многомерных кубов при $n > 2$ уже на плоскости ($n = 2$) получаются не квадраты, а прямоугольники со сторонами a_n, $a_{\frac{n}{n-1}}$ и b_n, $b_{\frac{n}{n-1}}$, равновеликие соответствующим квадратам a_2^2 и b_2^2. Эти прямоугольники являются неправильными гранями. На этих гранях строятся другие n-мерные прямоугольные параллелепипеды по правилу:

$$a_n^n = a_2^2 c^{n-2} = \left(a_n a_{\frac{n}{n-1}}\right)c^{n-2};$$

$$b_n^n = b_2^2 c^{n-2} = \left(b_n b_{\frac{n}{n-1}}\right)c^{n-2}.$$

Поэтому при всех $n > 2$ все n-мерные параллелепипеды в соответствующих n-мерных пространствах имеют на плоскости грани-прямоугольники, но не грани-квадраты.

Так как из равенства (8) следует, что квадраты a_2^2 и b_2^2 – единственные для выбранных a_1 и b_1, а все остальные фигуры – прямоугольники, то достаточные условия существования тройки пифагоровых чисел являются не только достаточными, как считалось до сих пор, но и необходимыми.

Противоречие, возникающее при сравнении новых форм бинома Ньютона в виде (1) и (9), можно устранить, если предположить, что в равенстве (1) при $n > 2$ числа a_n, b_n, c не могут быть все целыми.

Для доказательства теоремы Ферма в современной формулировке покажем, что при любом $n > 2$ сумма $a_n + b_n$ является нецелой величиной.

Для этого сложим почленно равенства (3)

$$a_n + b_n = c^{\frac{n-1}{n}}\left(a_1^{\frac{1}{n}} + b_1^{\frac{1}{n}}\right) = c\left(\left(\frac{a_1}{c}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{b_1}{c}\right)^{\frac{1}{n}}\right). \qquad (10)$$

При $n = 1$ имеем тождество $a_1 + b_1 \equiv c$.

При $n \to \infty$ получаем

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = c\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{a_1}{c}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{b_1}{c}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = 2c,$$

т. е. $a_\infty + b_\infty = 2c$, и тогда

$$c < a_n + b_n < 2c. \qquad (11)$$

Из соотношений (7) определим a_n, b_n и их сумму:

$$a_n = \frac{a_2^2}{a_{\frac{n}{n-1}}} = \frac{a_1 c}{a_{\frac{n}{n-1}}}; \quad b_n = \frac{b_2^2}{b_{\frac{n}{n-1}}} = \frac{b_1 c}{b_{\frac{n}{n-1}}};$$

$$a_n + b_n = c\left(\frac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}} + \frac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}}\right).$$

Подставим сумму $a_n + b_n$ в неравенство (11):

$$c < c\left(\frac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}} + \frac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}}\right) < 2c \Rightarrow 1 < \left(\frac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}} + \frac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}}\right) < 2,$$

или

$$c^{\frac{1}{n}} < a_1^{\frac{1}{n}} + b_1^{\frac{1}{n}} < 2c^{\frac{1}{n}},$$

что и доказывает нецелостность суммы $a_n + b_n$ относительно c.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Острик В. В., Цфасман М. А.** Алгебраическая геометрия и теория чисел: Рациональные и эллиптические кривые // МЦНМО. – М., 2001. – 48 с.

2. **Соколова Н. М.** Геометрическая интерпретация многочленов Ньютона и проектирование направленных отрезков в многомерные пространства // Вестник БНТУ. – 2004. – № 5. – С. 57–59.

УДК 51(077)

СРЕДСТВА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА ФАКУЛЬТЕТАХ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

ГОЛУБЕВА И. А.

Белорусский национальный технический университет

Средства обучения, с одной стороны, являются дидактической категорией в системе обучения в целом. Поэтому их следует рассматривать во взаимодействии с такими элементами дидактической системы, как цели, содержание, методы и формы обучения. С другой стороны, это понятие является самостоятельной системной структурой и поэтому само состоит из определенных компонентов, находящихся в постоянном взаимодействии в ходе процесса обучения.

В настоящей работе средства обучения будем рассматривать как систему, функционирующую в процессе обучения математике во время проведения практических и семинарских занятий на факультетах инженерно-строительного профиля. Компоненты средств обучения и их взаимодействие определяются тем, на какой концепции базируется процесс обучения. Как отмечалось [1–3], обучение математике на факультетах нематематического профиля должно протекать с учетом той специальности, для которой излагается курс математики. Чтобы это реализовать, можно воспользоваться разработанной [4, гл. 1] концепцией профессиональной направленности преподавания математики на факультетах нематематического профиля (ПНПМ). Это позволит не только избавиться от чрезмерного формализма в обучении математике, но и выяснить, какие дополнительные средства обучения необходимо разработать.

Традиционно в систему средств обучения математике входят, прежде всего, учебники и учебные пособия, а также всевозможные технические приспособления, среди которых наиболее востребованными являются калькуляторы, слайды, плакаты, компьютеры и т. п. При изложении курса математики для студентов нематематических специальностей средства обучения приобретают новые компоненты, соответствующие не только форме обучения, но и тому, для каких специальностей курс математики излагается. Если это инженерно-строительная специальность, то для проведения практических занятий уже не достаточно только формальных задач из курса математики. Необходимы прикладные задачи соответствующего содержания.

1. **Нахождение уравнения кривой свешивания каната подвесного моста.** Найти урав-