УДК 658.516

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАВИСИМОСТИ ТЕХНОЛОГИЧНОСТИ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЗВЕНЬЕВ РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ ОТ ИХ ТОЧНОСТИ

Канд. техн. наук, доц. ***СОКОЛОВСКИЙ С. С.****, инж.* ***СПЕСИВЦЕВА Ю. Б.****,*
канд. физ.-мат. наук ***АНИСИМОВ В. Я.****, инж.* ***АНИСИМОВ Ю. В.****, докт. техн. наук, проф.* ***СОЛОМАХО В. Л.***

Белорусский национальный технический университет

Одна из наиболее сложных задач в оптимизации размерных цепей по критерию обеспечения требуемой точности замыкающего звена при максимальной технологичности элементов, определяющих звенья, – построение адекватных моделей зависимости технологичности составляющего звена размерной цепи от его точности [1]. Эта зависимость, построенная путем применения какой-либо из существующих методик количественной оценки технологичности элементов деталей [2], носит дискретный характер. Она может быть представлена, например, таблично, так как точность является результатом выполнения отдельных технологических операций.

При аппроксимации табличных данных зависимости технологичности от допуска будут нелинейными монотонно убывающими функциями, зависящими как от допусков, так и от некоторых параметров, определяющих функцию:

$$Q_k(\delta_i) = F_k(\delta_i, \{\Theta_{m,k}\}),$$

где Q_k – критерий технологичности звена размерной цепи; k – вид аналитической зависимости; δ_i – допуск составляющего звена размерной цепи; i – номер квалитета; $\{\Theta_{m,k}\}$ – параметры, определяющие функцию; m – номер параметра.

Представленные графически эти зависимости будут иметь вид, подобный виду кривой [3].

В данном случае предлагается метод, позволяющий поставить в соответствие заданной табличной зависимости технологичности $Q_{i,j}$ j-го звена от допуска δ_i аналитическую зависимость $F(\delta_{i,j})$ достаточно простого вида, обеспечивающую минимум суммы квадратов отклонений, что аналитически можно описать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Q_{i,j} - F\left(\delta_{i,j}\right)\right)^2 = \min, \qquad (1)$$

где j – номер составляющего звена размерной цепи; n – количество точек с координатами ($\delta_{i,j}$, $Q_{i,j}$), для которых рассчитан критерий технологичности j-го звена конструкторской размерной цепи.

Вид зависимости $F_k(\delta_i)$ выбирается таким, чтобы, во-первых, он обеспечивал очевидное условие – соответствие большей стоимости более жесткому допуску, во-вторых, выполнялись условия $dF/d\delta < 0$ и $d^2F/d\delta^2 > 0$, поскольку лишь при таких условиях существует решение поставленной задачи оптимизации размерной цепи. Таким образом, функции $F(\delta_i)$ должны выбираться из класса монотонно убывающих, описываемых выпуклыми вниз кривыми, и иметь ограничения, накладываемые на параметры $\{\Theta_{m,k}\}$ для выполнения перечисленных условий.

Такая зависимость хорошо описывается нелинейно параметризованными аналитическими выражениями вида

$$F_k\left(\delta_i, \{\Theta_{m,k}\}\right) = \Theta_{0,k} + \Theta_{1,k}\ \varphi_k\left(\delta_i, \Theta_{2,k}\right), \qquad (2)$$

где $\Theta_{0,k}, \Theta_{1,k}, \Theta_{2,k}$ – параметры, определяемые методом наименьших квадратов по экспериментальным данным, представленные в виде таблично заданной функции «технологичность – допуск».

В качестве функций $\varphi_k(\delta_i, \Theta_{m,k})$ выбираем элементарные функции, удовлетворяющие перечисленным выше условиям:

а) степенная $\varphi_1(\delta_i, \Theta_{m,1}) = \delta_i^{\Theta_{m,1}}$;

б) экспоненциальная $\varphi_2(\delta_i, \Theta_{m,2}) = \exp\{\Theta_{m,2}\delta_i\}$;

в) логарифмическая $\varphi_3(\delta_i, \Theta_{m,3}) = \ln\{\delta_i + \Theta_{m,3}\}$.

Отметим, что функции $\varphi_2(\delta_i, \Theta_{m,2})$ и $\varphi_3(\delta_i, \Theta_{m,3})$ более удобны, так как для них можно получить зависимость допусков δ_i звеньев конструкторской размерной цепи от параметров $\{\Theta_{m,k}\}$ в замкнутом аналитическом виде.

Определим ограничения на параметры-коэффициенты перечисленных выше функций. Для упрощения заменим обозначения параметров: $\Theta_{0,k} = A$; $\Theta_{1,k} = B$; $\Theta_{2,k} = C$. С учетом использованных обозначений зависимости примут вид:

1. Степенная зависимость $Q(\delta) = B\delta^C + A$

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta} < 0,$$

что дает для нее

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta} = BC\delta^{C-1} \Rightarrow BC < 0.$$

Достаточное условие минимума

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \delta^2} > 0,$$

что для степенной функции означает

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \delta^2} = BC(C-1)\delta^{C-2} > 0.$$

Следовательно, параметры удовлетворяют системе неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} BC < 0; \\ BC(C-1) > 0, \end{array}\right\}$$

откуда следует $C - 1 < 0 \Rightarrow$ т. е.

$$[(C < 0) \cap (B \geq 0)] \cup [(C \in (0,1)) \cap (B \leq 0)].$$

2. Показательная зависимость $Q(\delta) = B\exp \times \times\{C\delta\} + A$

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta} = BC\exp\{C\delta\} < 0 \Rightarrow BC < 0.$$

Достаточное условие минимума дает:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \delta^2} > 0; \quad BC^2\exp\{C\delta\} > 0 \Rightarrow BC^2 > 0,$$

откуда следует $BC^2 > 0$ и $BC < 0$, т. е. $C < 0$ и $B > 0$.

3. Логарифмическая зависимость $Q(\delta) = B\ln \times \times\{C + \delta\} + A$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \delta} = \frac{B}{\delta + C} < 0;$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \delta^2} = -\frac{B}{(\delta + C)^2} > 0.$$

Будем полагать, что $\delta + C > 0$ и $B < 0 \Rightarrow \Rightarrow (C > -\delta_{\min}) \cap (B < 0)$.

На стадии проектного решения главной практической трудностью является определение параметров $\{\Theta_{m,k}\}$ выражений (2). С этой целью по аналогии с существующими конструкциями устанавливаются практически реальные, в пределах экономического уровня точности границы изменения допусков, а отыскание параметров $\{\Theta_{m,k}\}$ по методу наименьших квадратов сводится к нелинейной задаче оптимизации в трехмерном пространстве. Решение таких задач сопровождается трудностями, связанными с большим числом параметров $\{\Theta_{m,k}\}$ и их сильной коррелированностью друг с другом, а также наличием вырожденных минимумов у целевой функции.

В данной задаче основной проблемой, независимо от используемого алгоритма оптимизации, является выбор начальных значений параметров $\{\Theta^0_{m,k}\}$. Эти значения должны располагаться «вблизи» от точки абсолютного глобального минимума целевой функции. В противном случае, как показала обработка опытных данных по методу наименьших квадратов с использованием встроенных в пакет MATHCAD функций expfit, logfit, pwrfit, можно либо найти вырожденный минимум, либо вообще не получить решения. Описанная трудность в предлагаемом методе преодолевается следующим образом.

С учетом того, что функции (2) зависят от параметров $\{\Theta_{0,k}\}$ и $\{\Theta_{1,k}\}$ линейно, параметры $\{\Theta_{0,k}\}$ и $\{\Theta_{1,k}\}$ можно выразить из первых двух уравнений системы нормальных уравнений, полученных приравниванием к нулю частных производных целевой функции по параметрам $\{\Theta_{0,k}\}$ и $\{\Theta_{1,k}\}$, заданной выражением (1), через третий параметр $\{\Theta_{2,k}\}$. В результате получим:

$$\Theta_{0,k}\left(\Theta_{2,k}\right)=\frac{\langle Q\rangle\langle\varphi_k^2\rangle-\langle\varphi_k Q\rangle\langle\varphi_k\rangle}{\langle\varphi_k^2\rangle-\langle\varphi_k\rangle^2}; \qquad (3)$$

$$\Theta_{1,k}\left(\Theta_{2,k}\right)=\frac{\langle Q\varphi_k\rangle-\langle Q\rangle\langle\varphi_k\rangle}{\langle\varphi_k^2\rangle-\langle\varphi_k\rangle^2}; \qquad (4)$$

$$\langle\varphi_k\rangle=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_k\left(\delta_i,\Theta_{2,k}\right);$$

$$\langle\varphi_k^2\rangle=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_k\left(\delta_i,\Theta_{2,k}\right)^2;$$

$$\langle Q\rangle=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Q_i;$$

$$\langle Q\varphi_k\rangle=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Q_i\varphi_k\left(\delta_i,\Theta_{3,k}\right);$$

$$\langle Q\varphi_k^2\rangle=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Q_i\varphi_k\left(\delta_i,\Theta_{3,k}\right)^2.$$

Затем выражения (3) и (4) подставляются в третье уравнение системы нормальных уравнений, полученное приравниваем к нулю частной производной от (1) по $\{\Theta_{2,k}\}$. Полученное после подстановки уравнение является уравнением всего лишь от одной переменной $\{\Theta_{2,k}\}$, а поэтому может быть без особого труда решено хотя бы одним из численных методов. Далее найденное значение корня $\Theta_{2,k}^*$ подставляется в (3) и (4). Найденные значения $\Theta_{0,k}(\Theta_{2,k}^*)$, $\Theta_{1,k}(\Theta_{2,k}^*)$ и $\Theta_{2,k}^*$ обеспечивают глобальный минимум целевой функции вида

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\Theta_{0,k}-\Theta_{1,k}\varphi_k\left(\delta_i,\Theta_{2,k}\right)\right)^2=\min. \qquad (5)$$

Описанную методику оптимизации размерных цепей проиллюстрируем на конкретном примере. Найдем оптимальные значения параметров функций, описывающих зависимости критерия технологичности звеньев размерной цепи A от их точности, состоящей из четырех звеньев с номинальными значениями, равными нулю. Для каждого составляющего звена определены пределы варьирования допусков (табл. 1). Одним из методов оценки технологичности элементов деталей рассчитаны значения относительных коэффициентов критерия технологичности для каждого допуска составляющего звена (табл. 2).

Таблица 1

№ составляющего звена	Минимальное значение допуска, мм	Максимальное значение допуска, мм
1	0,0008	0,04
2	0,0008	0,04
3	0,002	0,1
4	0,002	0,1

Таблица 2

Уровень точности составляющего звена	Значение допуска звена $\delta_{i,1}$ мм	Коэффициент технологичности звена $Q_{i,1}$	Значение допуска звена $\delta_{i,2}$ мм	Коэффициент технологичности звена $Q_{i,2}$	Значение допуска звена $\delta_{i,3}$ мм	Коэффициент технологичности звена $Q_{i,3}$	Значение допуска звена $\delta_{i,4}$ мм	Коэффициент технологичности звена $Q_{i,4}$
1	0,04	0,33	0,1	0,33	0,04	0,62	0,1	0,62
2	0,02	0,77	0,05	0,77	0,016	2,2	0,04	2,2
3	0,012	0,93	0,03	0,93	0,006	4,73	0,016	4,73
4	0,006	1,19	0,016	1,19	0,0008	5,53	0,002	5,53

Полученные по приведенным табличным данным оптимальные значения определяющих параметров $\left\{\Theta^{*}_{m,k}\right\}$, входящих в эти зависимости, соответствующие различным составляющим звеньям размерной цепи, приведены в табл. 3, а на рис. 1 соответствующие зависимости, заданные (2), представлены в графическом виде.

Таблица 3

Звено / Параметры	A_1	A_2	A_3	A_4
Степенная зависимость $k = 1$				
$\Theta^{*}_{0,1}$	2,156	2,124	6,514	6,445
$\Theta^{*}_{1,1} \le 0$	–5,378	–4,021	–30,877	–20,088
$\Theta^{*}_{2,1} \in [0,1]$	0,338	0,353	0,507	0,527
Точность аппроксимации	0,0245	0,0232	0,384	0,410

Продолжение табл. 3

Звено / Параметры	A_1	A_2	A_3	A_4
Экспоненциальная зависимость $k = 2$				
$\Theta^{*}_{0,2}$	0,219	0,210	–0,238	–0,328
$\Theta^{*}_{1,2} \ge 0$	1,486	1,504	6,210	6,306
$\Theta^{*}_{2,2} \le 0$	–58,598	–23,102	–51,536	–19,770
Точность аппроксимации	0,0587	0,0529	0,269	0,304
Логарифмическая зависимость $k = 3$				
$\Theta^{*}_{0,3}$	–1,405	–0,9426	–9,021	–6,399
$\Theta^{*}_{1,3} \le 0$	–0,5626	–0,5863	–3,141	–3,288
$\Theta^{*}_{2,3} \ge -\delta_{\min}$	0,0034	0,0095	0,0085	0,0233
Точность аппроксимации	0,0344	0,0310	0,327	0,356

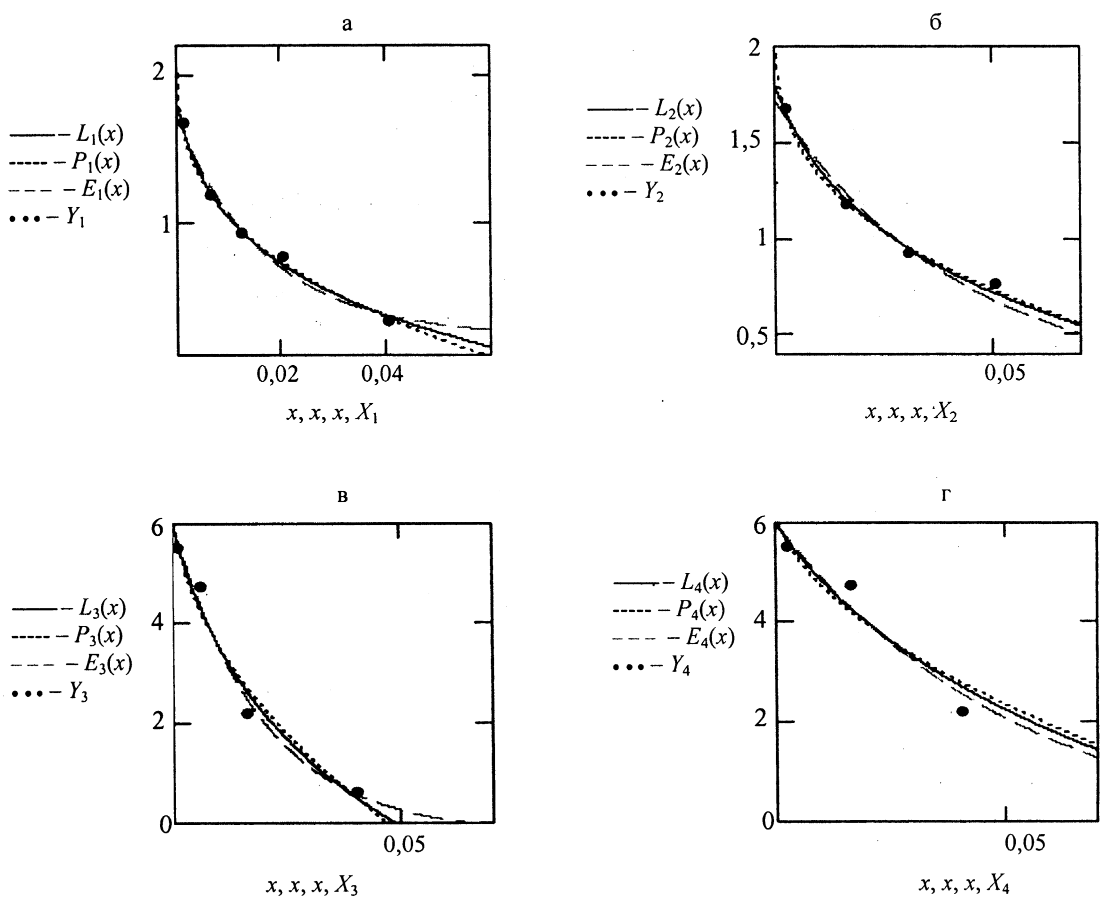

Рис. 1. Зависимости коэффициента технологичности от допуска Y_i, аппроксимированные различными функциями: логарифмической $L_i(x)$, степенной $P_i(x)$, экспоненциальной $E_i(x)$: а – звено A_1; б – A_2; в – A_3; г – A_4

В качестве критерия точности аппроксимации опытных данных предложенными кривыми, как обычно, выбирались величины, равные корню квадратному из (5), поделенному на число степеней свободы ($n - m$), где m – число параметров (для данного случая $m = 3$).

Анализ полученных данных показывает, что ни одному из видов кривой нельзя отдать в общем случае абсолютное предпочтение. Оптимальные значения параметров для всех кривых позволяют обеспечить выполнение необходимых условий $\frac{\partial \varphi_k(\delta, \{\Theta\})}{\partial \delta} < 0$ и $\frac{\partial^2 \varphi_k(\delta, \{\Theta\})}{\partial \delta^2} > 0$. Для звеньев A_1, A_2, A_3 наиболее подходящей является логарифмическая зависимость, а для звена A_4 – степенная. В каждом конкретном случае необходимы анализ исходных данных и индивидуальный подбор кривой.

Предложенная методика выбора вида функции, описывающей зависимость технологичности составляющего звена размерной цепи от его точности, позволяет обеспечить наибольшую точность аппроксимации исходных данных, что является основой для последующей оптимизации размерной цепи по критерию достижения требуемой точности замыкающего звена при максимальной технологичности изготовления изделия в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Элементы информационного обеспечения оптимизации конструкторских размерных цепей / Г. М. Левин, С. С. Соколовский, В. Л. Соломахо, Ю. Б. Спесивцева // Моделирование и информационные технологии проектирования: Сб. науч. трудов. – Мн.: НАНБ, 2002. – Вып. 4. – С. 150–160.

2. **Меркачев В. Н., Бутенко А. И.** Экономический справочник машиностроителя. – Одесса: Маяк, 1991.

3. **Дунаев П. Ф., Леликов О. П.** Расчет допусков размеров. – М.: Машиностроение, 1981.

УДК 621.315

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ И БАЗИСНЫЕ СТРУКТУРЫ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ НУЛЬ-ДЕТЕКТОРОВ

Докт. физ.-мат. наук ЯРЖЕМБИЦКИЙ В. Б.,
канд. физ.-мат. наук ШАДУРСКАЯ Л. И., СВИСТУН А. И.

Белорусский национальный технический университет

В измерительной технике широко применяются дифференциальные методы измерения и методы уравновешивания [1]. Центральное место в них занимают так называемые нуль-детекторы, чей выходной сигнал меняет полярность или фазу при непрерывном изменении входной неэлектрической величины $P_{вх}$. Такие свойства нуль-детекторов позволяют реализовывать оригинальные способы измерения перемещений, сил, давления, их производных, обладающие повышенной помехозащищенностью, линейностью выходных характеристик и другими важными свойствами.

Однако в практике фотоэлектрических измерений по существу не известны оптоэлектронные приборы с инверсией знака выходного сигнала. Нами впервые проведены анализ принципов действия и возможная классификация фотоэлектрических нуль-детекторов, в частном случае названных парафазными фотоприемниками (ПФ) [2]. Основное внимание уделяется параметрам базисных структур, выходным характеристикам и областям применения ПФ на их основе. При разработке парафазных фотоприемников необходимо обеспечить протекание фотоэлектрических процессов в таких условиях (структурах), когда непрерывное изменение входной величины (параметра светового потока или когерентного электромагнитного излучения) сопровождается возбу-