УДК 658.264

# СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ ПРИ МОДЕРНИЗАЦИИ ПРЕДПРИЯТИЯ ТЕПЛОВЫХ СЕТЕЙ

***Докт. техн. наук, доц. СЕДНИН В. А., канд. физ.-мат. наук, доц. КОРЗНИКОВ А. Д., канд. техн. наук, доц. СЕДНИН А. В.***

*Белорусский национальный технический университет*

Одним из эффективных решений модернизации существующих систем централизованного теплоснабжения (СЦТ) в настоящее время является внедрение автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП). Для крупных городов реализация данного мероприятия является многозатратной, и ее осуществление обычно планируется на протяжении нескольких лет.

Предлагается следующий вариант моделирования ситуации (решения задачи) для оптимизации распределения капитальных затрат. Исходными предпосылками и данными являются затраты по отдельным объектам СЦТ на внедрение АСУ ТП, определенные строительным проектом, и план-программа финансирования строительства по годам. Требуется определить оптимальный график реализации проекта (последовательность внедрения подсистем АСУ ТП) в рамках предложенной или планируемой программы финансирования с максимальной прибылью (минимальными финансовыми затратами) за период строительства.

СЦТ представляется совокупностью элементов следующего назначения:

- теплоисточники (производство энергии: одноцелевые (котельные); двухцелевые (теплоэлектроцентрали); комбинированные энергетические и теплотехнологические установки (совместное производство электрической и тепловой энергии, холода, технологической продукции);
- тепловые сети (магистральные и распределительные);
- тепловые и насосные станции (обеспечение требуемых параметров теплоносителя согласно технологии транспорта и теплопотребления);
- тепловые пункты (обеспечения параметров теплоносителя согласно регламента теплопотребления).

Структура СЦТ представляется в виде графа и кодируется с применением структурной матрицы: узлы графа – это теплоисточники, тепловые камеры, тепловые станции, насосные станции, тепловые пункты, ветви (дуги) – это участки теплопроводов. Дополнительная таблица (матрица) с характеристиками узлов (мощность тепловая электрическая (производство, потребление), состав основного технологического оборудования).

На основании разработанного проекта АСУ ТП составляется стоимостная матрица в составе следующих столбцов: номер узла, капитальные затраты, экономия (дополнительные затраты) энергии, экологический эффект (снижение выбросов вредных газов, в том числе парниковых газов).

Содержательно исследуемая проблема может быть сформулирована следующим образом. Для модернизации объектов СЦТ выделены капиталовложения в объеме $S$. Реализация проекта по модернизации всего множества $T$ объектов СЦТ $(i = 1, 2, ..., m)$ в течение одного года невозможна из-за большого объема капиталовложений. Поэтому весь плановый период разбит по годам, в каждом из которых определен объем капиталовложений $S_j$, $j = \overline{1, n}$, выделяемый на реализацию проекта в $j$-м году. Годовой эффект от капитальных вложений в $l$-й объект $(l = 1, 2, ..., k)$ в объеме $x_l$ дает годовой экономический эффект $C_l$. Поскольку эффект от внедрения проявляется в следующем году после модернизации объекта СЦТ, эффективность от капиталовложений в $j$-м году в $l$-й объект СЦТ после реализации всего проекта составит

$$C_{lj} = (n - j)C_l - x_l, \; l = \overline{1, k}; \; j = \overline{1, n}.$$

Требуется распределить капиталовложения в каждом году между объектами СЦТ таким образом, чтобы общая эффективность от реализации проекта по модернизации всей системы СЦТ была максимальной.

**Математическая модель.** Введем следующие обозначения:

$$\Omega^1 = \{\omega_i^1 | \, \omega_i^1 \subset \{1, ..., m\}, \sum_{l \in \omega_i^1} x_l \le S_1\},$$

где $\Omega^1$ – есть множество подмножеств объектов СЦТ, для модернизации которых достаточно капиталовложений в объеме $S_1$ в первый год планового периода.

Аналогично для любого $j$, $j = \overline{1, n}$, имеем

$$\Omega^j = \{\omega_i^j | \omega_i^j \subset \{\overline{1, m}\}, \sum_{l \in \omega_i^j} x_l \le S_j\}.$$

Таким образом, $\omega_i^j$ определяет множество объектов СЦТ, модернизация которых будет осуществляться в $j$-й момент времени (год) планового периода, а множество $\Omega$ = $= \{(\omega_{i_1}^1, \omega_{i_2}^2, ..., \omega_{i_n}^n) | \bigcap_{j=1}^{n} \omega_{i_j}^j = \varnothing\}$ определяет всевозможные способы финансирования проекта по модернизации системы СЦТ.

Эффективность от конкретного плана $(\omega_{i_1}^1, \omega_{i_2}^2, ..., \omega_{i_n}^n)$ финансирования проекта модернизации системы СЦТ определим по формуле

$$C(\omega_{i_1}^1, ..., \omega_{i_n}^n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l \in \omega_{i_j}} C_{lj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l \in \omega_{i_j}^j} ((n-j)C_l - x_l). \quad (1)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию максимума целевой функции

$$C(\omega_{i_1}^1, ..., \omega_{i_n}^n) \xrightarrow[(\omega_{i_j}^1, ..., \omega_{i_n}^n) \in \Omega]{} \max$$

при условии, что элементы $(\omega_{i_1}^1, ..., \omega_{i_n}^n)$ принадлежат допустимой области $\Omega$.

Сформулированная задача относится к задачам комбинаторной (дискретной) оптимизации. На сегодняшний день для решения такого класса задач, как правило, используются методы «ветвей и границ» или динамического программирования. В вычислительном плане оба подхода равноценны и могут привести к полному перебору всех элементов множества допустимых решений. В первом случае для выбора точки ветвления на следующем шаге при условии, что на данном шаге точкой ветвления является $\omega_{i_k}^j$, необходимо просмотреть все элементы $\omega_{i_{k+1}}^{j+1} \in \Omega^{j+1}$, для которых $\omega_{i_{j+1}}^{j+1} \bigcap \omega_{i_j}^j, ..., \omega_{i_n}^1 \ne \varnothing$. В случае метода динамического программирования аналогичные операции необходимо осуществлять при решении уравнений Беллмана на каждой итерации.

Отметим, что методы «ветвей и границ» и динамического программирования не являются универсальными алгоритмами, так как существенным образом зависят от описания области допустимых решений задачи. Следствием этого является невозможность создания универсального программного обеспечения для решения любых задач, которые могут быть сформулированы как задачи комбинаторной оптимизации.

Более того, решением сформулированной выше задачи любым из этих двух методов будет оптимальная ветвь (траектория): $\omega_1^1, \omega_2^2, ..., \omega_n^n$.

Другими словами, будет получен перечень объектов:

$$\omega_1^1 = \{i_1\}, \quad \omega_2^2 = \{i_2\}, \ ..., \ \omega_n^n = \{i_n\},$$
$$\bigcup_{j=1}^{n} \omega_i^j = T = \{1, ..., m\}, \quad \bigcap_{j=1}^{n} \omega_i^j = \varnothing,$$

модернизация которых должна осуществляться в первом ($\omega_1^1$), втором ($\omega_2^2$) и т. д. годах планового периода. При этом получен максимальный суммарный эффект от реализации всего проекта. Однако в силу воздействия многих внешних факторов система может оказаться на некотором шаге $j$ не на оптимальной траектории. Это значит, что в силу некоторых обстоятельств в первые $j$ лет финансирование объектов СЦТ осуществлялось из множеств $\omega_{i_1}^1, \omega_{i_2}^2, ..., \omega_{i_j}^j$, что не является оптимальным. Возникает задача оптимального финансирования оставшихся объектов системы СЦТ до конца планового периода, т. е. необходимость решать сформулированную выше задачу, но с новыми исходными данными. Построенная ниже сетевая модель исследуемой задачи лишена указанных недостатков, а при ее решении используется алгоритм [2], который допускает простую программную реализацию.

**Построение сетевой модели.** Построим $n$-дольный граф $G(V, U)$ с ($p$ + 1) вершиной. Здесь $p=\sum_{j=1}^{k} p_j$; $V=\bigcup_{j=1}^{n}\Omega_j U\{(p+1)\}$; $p_j$ = $= |\Omega_j|$, ($p$ + 1), – конечная вершина.

Дуги графа ориентированы и соединяют вершины множества $\Omega_j$ с вершинами множества $\Omega_{j+1}$, $j=\overline{1,\, n}$. Множество $\Omega_{p+1}$ состоит из единственной вершины $(p+1)$, $\Omega_{p+1} = =\{(p+1)\}$. Вес каждой дуги, если она принадлежит множеству $U$ (т. е. если она присутствует в графе), выходящей из вершины $\omega^j_{i_j}$, определяется следующим образом:

$$C(\omega^j_{i_l})=\sum_{l\in\omega^j_{i_l}}[(n-j)C_l-x_l].$$

Для построения $n$-дольного ориентированного графа осталось определить его множество дуг $U$. Обозначим через $V^-(\omega^j_i)\in V$ – множество вершин, из которых есть путь, ведущий в вершину $\omega^j_i$.

**Алгоритм построения множества *U*.**

1. Начальный шаг. Дуга $(\omega^1_{i_1},\, \omega^2_{i_2})\in U$, если $\omega^1_{i_1}\bigcap\omega^2_{i_2}=\varnothing.$

2. Общая итерация. Для $j=2,\, ...,\, n$ полагаем, дуга $(\omega^j_{i_j},\ \omega^{j+1}_{i_{j+1}})\in U$, если

$$\left[V^-(\omega^j_{i_j})\bigcup\omega^j_{i_j}\right]\bigcap\omega^{j+1}_{i_{j+1}}=\varnothing.$$

В построенном описанным способом графе каждому пути, ведущему из вершин множества $\Omega_1$ в конечную вершину, соответствует некоторая траектория, т. е. некоторый возможный способ финансирования модернизации объектов СЦТ по годам планового периода и наоборот. Действительно, пусть $T_j$ – множество объектов СЦТ, для которых запланирована их модернизация в $j$-м году планового периода. Понятно, что $T_i\bigcap T_j=\varnothing\ \ \forall i\neq j$. Так как $\sum_{l\in T_j}x_l\le S_j,\ j=\overline{1,\ n},$ каждому множеству $T_j$ поставлена в соответствие вершина $\omega^j_{i_j}=T_j$ графа $G(V,U)$. Поскольку $\left(\bigcup_{l=1}^{j}\omega^l_{i_l}\right)\bigcap\omega^{l+1}_{i_{l+1}}=\varnothing,$ дуга $(\omega^l_{i_l},\omega^{l+1}_{i_{l+1}})\in U$ для любого $l=\overline{1,\, n}.$ Следовательно, путь $(\omega^1_{i_1},\omega^2_{i_2})$, $(\omega^2_{i_2},\omega^3_{i_3})$, ..., $(\omega^n_{i_n},p+1)$ содержится в графе $G(V,U)$, а его вес равен эффективности от реализации плана $T_1,\ T_2,\, ...,\, T_n$ модернизации системы объектов СЦТ. Верно и обратное утверждение, т. е. любому пути $(\omega^1_{i_1},\omega^2_{i_2})$, $(\omega^2_{i_2},\omega^3_{i_3})$, ..., $(\omega^n_{i_n},p+1)$ соответствует план: $T_1=\omega^1_{i_1},\ T_2=\omega^2_{i_2},\, ...,\, T_{i_n}$ модернизации системы объектов СЦТ, а его эффективность равна весу этого пути. Таким образом, математической моделью сформулированной задачи является задача отыскания пути максимального веса (критического пути) в графе $G(V,U)$.

Отметим, что описанный выше граф полностью определяется матрицей дуговых весов. Поскольку граф является $n$-дольным и ориентированным, матрица дуговых весов – $n$-блочная матрица порядка $(p+1)\times(p+1)$. Отсутствие дуги $(i,\ j)$ в графе $G(V,\, U)$ будет означать, что соответствующий элемент $c_{ij}$ в матрице дуговых весов $C=\|c_{ij}\|_{(p+1)\times(p+1)}$ равен ∞, естественно полагать $c_{ii}=0$. Таким образом, матрица $C$ имеет вид:

$$C=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} & C_1 & & \dots & & \\ \hdashline & & C_2 & \dots & & \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline & & & \dots & C_{n-1} & \\ \hdashline & & & \dots & & C_n \end{array}\right].$$

Элементы подматрицы $C_j\ (j=\overline{1,\ (n-1)})$ порядка $p_j\times p_{j+1}$ вычисляются следующим образом:

$$c^j_{ik}=\begin{cases}\sum\limits_{l\,\in\,\omega^j_{i_j}}(n-j)C_l-x_l, \text{ если}\\ (\omega^j_{i_j},\,\omega^{j+1}_k)\in U,\ k=p_j+1,\, ...,\ p_j+p_{j+1};\\ \infty - \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Элементы матрицы столбца $C_n$ равны $C^n_{i,\ p+1}=\omega^n_i,\ \omega^n_{i_n}\in\Omega_n.$

Опишем алгоритм, позволяющий найти критические пути (пути максимального веса) между всеми парами вершин графа.

Рассмотрим ориентированный граф $G\ V, U$, не содержащий циклов, с $n$ вершинами $|V| = n$ и множеством дуг $U$. Каждой дуге $i,\ j \in U$ поставлено в соответствие число $c_{ij}$ – вес дуги $i,\ j \in U$ $(c_{ij} = \infty$, если $i,\ j \notin U)$. Под весом любого $i - j$ -пути, ведущего из вершин $i$ в вершину $j$ $i - j = i, i_1, i_1, i_2, ...,$ $i_k, j \}$, будем понимать суммарный вес всех дуг $\sum\limits_{i, j\ \in\ i-j} c_{ij}$, входящих в этот путь. Заметим, что граф $G\ V, U$ полностью описывается матрицей дуговых весов $C = \|c_{ij}\|_{n\times n}$. Определим тернарную операцию над матрицей $C$ по элементу $k$ следующим образом:

$$c_{ij} := \begin{cases} c_{ij}, \qquad \text{если } c_{ij} \neq \infty \text{ и } c_{ij} \geq c_{ik} + c_{kj}, \\ \text{либо } c_{ik} + c_{kj} = \infty; \\ c_{ik} + c_{kj}, \quad \text{если } c_{ik} + c_{kj} \neq \infty \text{ и } c_{ij} < c_{ik} + c_{kj}, \\ \text{либо } c_{ij} = \infty \end{cases} \tag{2}$$

для всех $i \neq j \neq k$.

***Утверждение 1.*** *В полученной в результате выполнения тернарных операций по всем элементам* $k = 1, ..., n$ *матрицы* $C = \|c_{ij}\|_{n\times n}$ *элемент* $c_{ij}$ *будет равен максимальному из весов всех путей, ведущих из вершины* $i$ *в вершину* $j$.

Рассмотрим путь максимального веса, ведущий из вершины $l$ в вершину $p$. Выполнение тернарной операции по элементу $k$, если вершина $k$ не входит в этот путь, не изменит его, так как в противном случае, если для некоторого $k$ имеем $c_{ik} + c_{kj} > c_{ij}$, где $i, j$ – две соседние вершины пути, то, заменив дугу $(i, j)$ на дуги $(i, k)$, $(k, j)$, получим $(l - p)$-путь большего веса. Но это противоречит тому, что рассматриваемый путь имеет максимальный вес.

Пусть $i_0$ – промежуточная вершина с минимальным индексом в рассматриваемом пути, а $i_1$ и $i_2$ – соседние с ней вершины. Выполнение тернарной операции (1) по элементу $i_0$ матрицы $C$ дает значение $c_{i_1 i_2} := c_{i_1 i_0} + c_{i_0 i_2}$. Заменив две дуги $(i_1, i_0)$ и $(i_0, i_2)$ на одну дугу $(i_1, i_2)$, получим путь такого же веса, но содержащий на одну вершину меньше. Продолжая подобным образом, получаем доказательство нашего утверждения.

Заметим, что выполнение тернарных операций по всем вершинам сети дает матрицу весов максимальных путей, но не сами пути. Для отыскания этих путей воспользуемся вспомогательной матрицей $R = \|r_{ij}\|_{n\times n}$, элементы которой на начальном этапе равны $r_{ij} = j$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$. Одновременно с осуществлением тернарных операций по элементу $k$ матрицы $C$ элементы матрицы $R$ будут изменяться следующим образом:

$$r_{ij} := \begin{cases} r_{ij}, \quad \text{если } c_{ij} := c_{ij}; \\ r_{ik}, \quad \text{если } c_{ij} := c_{ik} + c_{kj}. \end{cases} \tag{3}$$

***Утверждение 2.*** *После выполнения тернарных операций по всем вершинам сети элемент* $r_{ij}$ *матрицы* $R$ *будет указывать индекс вершины* $i_1$*, следующей за вершиной* $i$ *в* $(i - j)$*-пути максимального веса.* Докажем это утверждение.

Рассмотрим некоторый $(i - j)$-путь максимального веса, а $i$, $i_1$, $i_2$ – первые три вершины этого пути. Поскольку элементы матрицы $R$ меняются только при изменении элементов матрицы $C$, они не будут изменяться при выполнении тернарной операции по элементам матрицы $C$, если соответствующие им вершины не входят в рассматриваемый путь. При выполнении тернарной операции по вершине $i_1$ получим $c_{ii_1} + c_{i_1 i_2} > c_{ii_2}$, поэтому $r_{ii_2} = r_{ii_1} = i_1$. Заменим дуги $i, i_1$, $i_1, i_2$ на одну дугу $i_1, i_2$, получим новый максимальный путь того же веса, содержащий на одну вершину меньше. При дальнейшем выполнении тернарных операций величина $r_{ii_2}$ не изменится. Продолжая подобным образом, получаем требуемое доказательство.

После осуществления тернарных операций (1) по всем элементам $k = 1, 2, ..., n$, выполняя одновременно операции (2), получаем матрицу максимальных весов путей между всеми парами вершин. Сами пути находим с помощью вспомогательной матрицы $R$ следующим образом.

Для любого $(i - j)$-пути последовательно находим: $r_{ij} = i_1$; $r_{i_1 j} = i_2, ...$; $r_{i_k j} = j$. Искомый путь максимального веса между вершинами $i$ и $j$ проходит через вершины: $i, i_1, i_2, \ldots, i_k, j$.

Таким образом, алгоритм решения сформулированной задачи состоит из следующих этапов.

1. Исходя из множества $T=\{1, \ldots, k\}$ объектов СЦТ, планируемых к модернизации в течение $n$ лет, и объемов финансирования проекта в каждом году планового периода $S = =\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$, формируются множества $\Omega^j = =\{\omega_i^j\}, \left|\Omega^j\right| = p_j$.

2. Для каждого элемента $\omega_i^j \in \Omega^j$ вычисляются дуговые веса всех дуг, выходящих из соответствующей вершины: $C(\omega_i^j) \in \sum_{i\in\omega_i^l}[(n-j)\,C_l - x_l]$.

3. Описывается сетевая модель решаемой задачи, т. е. граф $G\ V,U$ , где каждому элементу множества $\Omega^j$ ставится в соответствие вершина $v$: $V_i^j \to \omega_i^j,\ i=\overline{1,\ p_j},\ \ p_j=|\Omega^j\,|,\ j = =\overline{1,\ n},\ \ (p+1),$ – фиктивная вершина, $p=\sum_{j=1}^{n} p_j$.

По приведенному выше алгоритму определяется множество дуг $U$. Описанный $n$-дольный граф полностью определяется матрицей дуговых весов $C$. Отметим, что граф $G\ V,U$ не имеет ориентированных циклов.

4. После осуществления операций (2), (3) получаем матрицу $C$* и вспомогательную матрицу $R$.

Элемент $c^*_{i,\,p+1}$ матрицы $C^*$ равен максимальному весу среди весов путей, ведущих из вершины $V_i$ в вершину $V_{i+1}$. То есть $c^*_{i,\,p+1}$ является максимальной эффективностью, которая может быть достигнута, если в первый промежуток времени планового периода запланировать модернизацию объектов СЦТ из множества $\omega_i^1 \to V_i$ . Таким образом, максимальная эффективность, которая может быть достигнута, составит

$$\max_{i\in\{1,p\}} C^*_{i,\ p+1} = C^*_{k,\ p+1}.$$

Критический путь, вес которого равен $C^*_{k,\ p+1}$, находится с помощью вспомогательной матрицы $R$: $v^1_{k_1}, v^2_{k_2}, \ldots, v^n_{k_n}, p+1$. Этот путь определяет множество объектов СЦТ $\omega^j_{k_j} \to v^j_{k_j}$, $j=\overline{1,n},$ при финансировании которых по годам планового периода является наиболее эффективным.

Если под воздействием некоторых внешних факторов финансирование модернизации системы объектов СЦТ в первые $s$ ($s < n$) лет отличалось от оптимальной схемы и возникла потребность в оптимизации распределения капиталовложений на оставшийся период, то нет необходимости решать задачу с новыми исходными данными. Если в течение первых $s$ лет финансировалась модернизация объектов из множеств $\omega^1_{i_1}, \omega^2_{i_2}, \ldots, \omega^s_{i_s}$ и $V_k \to \omega^s_i$, то элемент $C^*_{i_s,\ p+1}$ равен максимальному весу из всех путей, ведущих из вершины $v_{i_s}$ в вершину $(p+1)$. Сам путь определяется с помощью вспомогательной матрицы $R$ и задает оптимальную «траекторию» завершения проекта финансирования модернизации системы объекта СЦТ.

## ВЫВОДЫ

1. Сделана постановка задачи, составлена математическая модель и предложен алгоритм решения задачи оптимизации вложения капитальных средств в модернизацию (внедрение АСУ ТП) крупных систем централизованного теплоснабжения, основанные на применении сетевой модели. Разработанный алгоритм позволяет решать поставленную задачу – оптимизацию сетевого графика вложения инвестиций при модернизации систем теплоснабжения.

2. Развитие алгоритма должно следовать по снижению введенных при создании математической модели допущений, а именно: введение в расчет следующих факторов: взаимовлияние «событий» или результатов «событий»; изменение характеристик технологического оборудования согласно определенной программе их модернизации; изменение режимов отпуска тепловой энергии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Седнин, В. А.** Теория и практика создания автоматизированных систем управления теплоснабжением / В. А. Седнин. – Минск: БНТУ, 2005. – 192 с.

2. **Корзников, А. Д.** Новый алгоритм поиска критических путей в графе и его приложения / А. Д. Корзников // Вестник БНТУ. – № 4. – 2008. – С.65–71.

Поступила 12.02.2009