

УДК 681.3.06:624.131

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМА ИССЛЕДОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ

*Докт. техн. наук, проф. БЫХОВЦЕВ В. Е., канд. техн. наук СЕСЬКОВ В. Е.,
канд. техн. наук, доц. КУРОЧКА С. К.*

*Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
РУП «Институт БелНИИС»,
Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого*

В механике сплошной среды рассматриваются твердые тела, жидкости и газы. Грунты по своей структуре и физико-механическим свойствам не являются простыми телами, которые можно было бы отнести к одной из указанных групп. В большинстве случаев грунты включают в себя твердую, жидкую и газообразную фазы. Твердая фаза грунта (скелет) представляет собой пористую среду. Поры между твердыми частицами в грунте заполнены жидкостью (вода и водные растворы) и газом (воздух). Если поры в грунте заполнены целиком жидкостью (водонасыщенный грунт) или только газом (сухой грунт), то такие грунты называют двухфазными. Грунт называют трехфазным, если поры в нем содержат одновременно и воду и воздух. Двух- и трехфазные грунты воспринимают внешнюю нагрузку иначе, чем сплошные твердые тела. Для грунтовых оснований характерно изменение во времени напряженно-деформированного состояния при постоянной внешней нагрузке. Распределение нагрузок в толще грунтов и их сопротивление внешним силам обусловлено силами сцепления и трения частиц грунта, а также сжатием поровой воды и ее отжатием из пор. Сами частицы при этом практически не сжимаются, происходит только их сдвиг, вследствие чего уменьшаются поры в определенном объеме [1–4].

В настоящее время существует несколько подходов к определению деформаций грунтов. В зависимости от конкретных условий для определения деформаций грунтов применяют [5–7]:

- теорию ползучести;
- теорию ползучести с одновременным учетом фильтрационной консолидации;
- теорию ползучести с одновременным учетом фильтрационной консолидации и сжимаемости поровой воды.

В современной литературе термин «ползучесть» часто заменяют термином «вязкоупругость». Согласно экспериментальным данным [8] скелет грунта изменяется в соответствии с законом линейной наследственной ползучести Больцмана – Вольтерра. Теория наследственной ползучести включает в себя все теории, базирующиеся на линейных реологических моделях. В силу указанной общности теории наследственной ползучести Больцмана – Вольтерра представляется возможным повысить точность исследования деформаций грунтовых оснований математическими методами [8–15].

В настоящей работе в соответствии с законом линейной наследственной ползучести Больцмана – Вольтерра изложены разработанные авторами оригинальные математическая модель, алгоритм и программное обеспечение для численного исследования вязкоупругого деформирования неоднородного грунтового основания.

Механико-математическая модель вязкоупругих деформаций грунтовых оснований. Принято, что скелет грунта изменяется в соответствии с законом линейной наследственной ползучести Больцмана – Вольтерра [1, 5, 8]. В этом случае уравнение состояния в интегральной форме имеет следующий вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_0} \left[\sigma(t) + \int_0^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \right], \quad (1)$$

где $K(t, \tau)$ – ядро ползучести, характеризует реологические свойства деформируемой среды; σ – полное напряжение; ε – деформация; E_0 – модуль деформации. Ядро $K(t, \tau)$ является положительной монотонно убывающей функцией.

Если деформация $\varepsilon(t)$ известна, то (1) должно решаться относительно напряжения $\sigma(t)$. В этом случае интегральное уравнение второго порядка Вольтерра имеет следующий вид:

$$\sigma(t) = E_0 \left[\varepsilon(t) - \int_0^t R(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right], \quad (2)$$

где $R(t, \tau)$ – ядро релаксации, является резольвентой ядра ползучести.

Теория ползучести, характеризуемая интегралом связи типа (1), носит наименование теории наследственности, так как она исходит из принципа соучастия предшествовавшего напряженного состояния и его влияния на действительное состояние. Теория наследственной ползучести включает в себя все теории, базирующиеся на линейных реологических моделях.

Для внесения ясности в представление о природе ядра ползучести $K(t, \tau)$ необходимо напряжение в (1) принять постоянным, т. е. $\sigma(\tau) = \sigma_0 = \text{const}$ и продифференцировать обе части уравнения по t

$$\frac{1}{E_0} K(t) = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Тогда функция $K(t)$ будет соответствовать скорости ползучести при единичной нагрузке, увеличенной в E_0 раз.

Особые формы ядра ползучести имеют следующий вид:

- для реологической модели Кельвина

$$K(t - \tau) = \delta \exp[-\delta_1(t - \tau)];$$

- для логарифмического закона вторичной компрессии

$$K(t - \tau) = \frac{\delta}{(t - \varepsilon)^\gamma} \text{ при } 0 < \gamma < 1;$$

- для комбинации из приведенных выше видов

$$K(t - \tau) = \frac{\delta \exp[-\delta_1(t - \tau)]}{(t - \varepsilon)^\gamma} \text{ при } 0 < \gamma < 1,$$

где δ – коэффициент ядра ползучести; δ_1 – то же затухания ползучести. Эти коэффициенты определяются опытным путем в течение нескольких дней.

Интегральная форма уравнения деформирования в настоящей работе принята определяющей. В дальнейшем для краткости будем пользоваться операторной формой записи уравнений (1) и (2):

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (1 + \mathbf{K})\sigma, \quad \sigma = E(1 - \mathbf{R})\varepsilon;$$

где \mathbf{K} , \mathbf{R} – операторы ползучести и релаксации;

$$\mathbf{K}\sigma = \int_0^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau; \quad \mathbf{R}\varepsilon = \int_0^t R(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau.$$

Построение математической модели напряженно-деформированного состояния вязкоупругого грунтового основания. Физические уравнения для вязкоупругих тел представим в следующем виде:

$$\begin{cases} \sigma_x(t) = 2G(t)(1 - \Gamma_c) (\varepsilon_x(t) - \varepsilon_{cp}(t)) + \\ \quad + 3K(t)(1 - \Gamma_o) \varepsilon_{cp}(t); \\ \sigma_y(t) = 2G(t)(1 - \Gamma_c) (\varepsilon_y(t) - \varepsilon_{cp}(t)) + \\ \quad + 3K(t)(1 - \Gamma_o) \varepsilon_{cp}(t); \\ \tau_{xy}(t) = G(t)(1 - \Gamma_c) \gamma_{xy}(t), \end{cases} \quad (3)$$

где $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$, $\tau_{xy}(t)$ – компоненты вектора напряжения; $\varepsilon_x(t)$, $\varepsilon_y(t)$, $\gamma_{xy}(t)$ – то же деформации; $\varepsilon_{cp}(t) = \frac{\varepsilon_x(t) + \varepsilon_y(t)}{2}$; $G(t)$ – модуль сдвига; $K(t)$ – то же объемной деформации; Γ_o , Γ_c – операторы объемной и сдвиговой релаксаций.

В скалярной форме выражение (3) будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x(t) &= 2G(t)(\varepsilon_x(t) - \varepsilon_{cp}(t)) - 2 \int_0^t \Gamma_c(t, \xi)(\varepsilon_x(\xi) - \varepsilon_{cp}(\xi))d\xi + 3K(t)\varepsilon_{cp}(t) - 3 \int_0^t \Gamma_o(t, \xi)\varepsilon_{cp}(\xi)d\xi; \\ \sigma_y(t) &= 2G(t)(\varepsilon_y(t) - \varepsilon_{cp}(t)) - 2 \int_0^t \Gamma_c(t, \xi)(\varepsilon_y(\xi) - \varepsilon_{cp}(\xi))d\xi + 3K(t)\varepsilon_{cp}(t) - 3 \int_0^t \Gamma_o(t, \xi)\varepsilon_{cp}(\xi)d\xi; \\ \tau_{xy}(t) &= G(t)\gamma_{xy}(t) - \int_0^t \Gamma_c(t, \xi)\gamma_{xy}(\xi)d\xi, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

где $\Gamma_c(t, \xi)$ и $\Gamma_o(t, \xi)$ – ядра сдвиговой и объемной релаксаций.

Предположим, что при вязкоупругом деформировании объемные деформации будут упругими, тогда $K(t)(1 - \Gamma_o) \equiv K(t)$. Выразим модуль сдвига $G(t)$ и модуль объемной деформации $K(t)$ через модуль Юнга $E(t)$ и коэффициент Пуассона $\mu(t)$, тогда выражение (3) с учетом принятой гипотезы об упругости объемных деформаций можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x(t) &= \frac{E(t)}{1 + \mu(t)}(1 - \Gamma_c)(\varepsilon_x(t) - \varepsilon_{cp}(t)) + \\ &\quad + \frac{E(t)}{1 - \mu(t)}\varepsilon_{cp}(t); \\ \sigma_y(t) &= \frac{E(t)}{1 + \mu(t)}(1 - \Gamma_c)(\varepsilon_y(t) - \varepsilon_{cp}(t)) + \\ &\quad + \frac{E(t)}{1 - \mu(t)}\varepsilon_{cp}(t); \\ \tau_{xy}(t) &= \frac{E(t)}{2(1 + \mu(t))}(1 - \Gamma_c)\gamma_{xy}(t). \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Рассмотрим первое уравнение (5), подставим $\varepsilon_{cp}(t) = \frac{\varepsilon_x(t) + \varepsilon_y(t)}{2}$

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= \frac{E(t)}{2(1 + \mu(t))}(1 - \Gamma_c)(\varepsilon_x(t) - \varepsilon_y(t)) + \\ &\quad + \frac{E(t)}{2(1 - \mu(t))}(\varepsilon_x(t) + \varepsilon_y(t)) = \\ &= \frac{E(t)}{1 - \mu(t)^2}(\varepsilon_x(t) + \mu\varepsilon_y(t)) - \frac{E(t)}{2(1 + \mu(t))}\Gamma_c(\varepsilon_x(t) - \varepsilon_y(t)). \end{aligned} \quad (6)$$

Выполняя аналогичные преобразования для оставшихся компонент вектора напряжений, (5) можно переписать в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x(t) &= \frac{E(t)}{1 - \mu(t)^2}(\varepsilon_x(t) + \mu(t)\varepsilon_y(t)) - \\ &\quad - \frac{E(t)}{2(1 + \mu(t))}\Gamma_c(\varepsilon_x(t) - \varepsilon_y(t)); \\ \sigma_y(t) &= \frac{E(t)}{1 - \mu(t)^2}(\mu(t)\varepsilon_x(t) + \varepsilon_y(t)) - \\ &\quad - \frac{E(t)}{2(1 + \mu(t))}\Gamma_c(-\varepsilon_x(t) + \varepsilon_y(t)); \\ \tau_{xy}(t) &= \frac{E(t)}{1 - \mu(t)^2} \frac{1 - \mu(t)}{2} \gamma_{xy}(t) - \frac{E(t)}{2(1 + \mu(t))}\Gamma_c\gamma_{xy}(t). \end{aligned} \right. \quad (7)$$

В скалярной форме выражение (7) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= \frac{E(t)}{1 - \mu(t)^2}(\varepsilon_x(t) + \mu(t)\varepsilon_y(t)) - \frac{E(t)}{2(1 + \mu(t))} \times \\ &\quad \times \left(\frac{2(1 + \mu(t))}{E(t)} \int_0^t \Gamma_c(t, \xi)(\varepsilon_x(\xi) - \varepsilon_y(\xi))d\xi \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= \frac{E(t)}{1 - \mu(t)^2}(\varepsilon_x(t) + \mu(t)\varepsilon_y(t)) - \\ &\quad - \left(\int_0^t \Gamma_c(t, \xi)\varepsilon_x(\xi)d\xi - \int_0^t \Gamma_c(t, \xi)\varepsilon_y(\xi)d\xi \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_0^t \Gamma_c(t, \xi)\varepsilon(\xi)d\xi.$$

Временной отрезок $[0, t]$ разделим на n интервалов, тогда

$$I = \int_0^t \Gamma_c(t, \xi)\varepsilon(\xi)d\xi = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma_c(t, \xi)\varepsilon(\xi)d\xi.$$

По теореме о среднем получим

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon(\eta) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma_c(t, \xi) d\xi,$$

где $\eta \in [t_i; t_{i+1}]$.

В качестве точки η приближенно возьмем одну из границ отрезка, например t_i . Тогда

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma_c(t, \xi) d\xi,$$

причем

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\varepsilon(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma_c(t, \xi) d\xi \right].$$

Ядро релаксации примем в виде [1, 8]

$$\Gamma(t, \xi) = \delta G(t) \exp(-\delta_1(t - \xi)), \quad (9)$$

где δ и δ_1 – параметры релаксации.

Подставляя (9) в предыдущее выражение и интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} I &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon(t_i) G(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta \exp(-\delta_1(t - \xi)) d\xi = \\ &= \frac{\delta}{\delta_1} \sum_{i=0}^{n-1} (\varepsilon(t_i) G(t_i) (\exp(-\delta_1(t - t_{i+1})) - \exp(-\delta_1(t - t_i)))). \end{aligned} \quad (10)$$

В случае другого ядра релаксации (9) интегрирование в (10) может быть проведено численно.

Используя (10), выражение (8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= \frac{E(t)}{1 - \mu(t)^2} (\varepsilon_x(t) + \mu(t)\varepsilon_y(t)) - \frac{\delta}{\delta_1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} G(t_i) \times \right. \\ &\times \left. \begin{pmatrix} \varepsilon_x(t_i) (\exp(-\delta_1(t - t_{i+1})) - \exp(-\delta_1(t - t_i))) - \\ -\varepsilon_y(t_i) (\exp(-\delta_1(t - t_{i+1})) - \exp(-\delta_1(t - t_i))) \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим последнее слагаемое (11). Для начального времени $t_0 = 0$ последнее слагаемое будет равно 0.

Для времени t_1 :

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta_1} G(t_1) (\varepsilon_x(t_1) (1 - \exp(-\delta_1(t_1 - t_0))) - \\ &- \varepsilon_y(t_1) (1 - \exp(-\delta_1(t_1 - t_0))))). \end{aligned}$$

Для времени t_m :

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta_1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} G(t_j) (\varepsilon_x(t_j) (\exp(-\delta_1(t_m - t_{j+1})) - \right. \\ &- \exp(-\delta_1(t_m - t_j))) - \varepsilon_y(t_j) (\exp(-\delta_1(t_m - t_{j+1})) - \\ &- \exp(-\delta_1(t_m - t_j)))) \left. \right). \end{aligned}$$

Таким образом получим

$$\begin{aligned} \sigma_x(t_{i+1}) &= \frac{E(t_{i+1})}{1 - \mu(t)^2} (\varepsilon_x(t_{i+1}) + \mu(t)\varepsilon_y(t_{i+1})) - \\ &- \frac{\delta}{\delta_1} \sum_{j=0}^i \left[G(t_j) (\exp(-\delta_1(t_{i+1} - t_{j+1})) - \right. \\ &- \exp(-\delta_1(t_{i+1} - t_j))) (\varepsilon_x(t_j) - \varepsilon_y(t_j)) \left. \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично рассуждая, можно найти:

$$\begin{aligned} \sigma_y(t_{i+1}) &= \frac{E(t_{i+1})}{1 - \mu(t)^2} (\mu(t)\varepsilon_x(t_{i+1}) + \varepsilon_y(t_{i+1})) - \\ &- \frac{\delta}{\delta_1} \sum_{j=0}^i \left[G(t_j) (\exp(-\delta_1(t_{i+1} - t_{j+1})) - \right. \\ &- \exp(-\delta_1(t_{i+1} - t_j))) (-\varepsilon_x(t_j) + \varepsilon_y(t_j)) \left. \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(t_{i+1}) &= \frac{E(t)}{1 - \mu(t)^2} \frac{1 - \mu(t)}{2} \gamma_{xy}(t_{i+1}) - \frac{\delta}{\delta_1} \times \\ &\times \sum_{j=0}^i \left[G(t_j) (\exp(-\delta_1(t_{i+1} - t_{j+1})) - \right. \\ &- \exp(-\delta_1(t_{i+1} - t_j))) \gamma_{xy}(t_j) \left. \right]. \end{aligned}$$

Геометрические уравнения (уравнения Коши) в случае плоской деформации будут иметь вид [2, 8–10]:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \quad (13)$$

где $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}$ – вектор деформаций; u, ϑ – соответственно перемещения вдоль осей X, Y .

Закон Гука [5, 9, 12] для линейно упругого тела будет иметь вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

Используя (12), (14) можно переписать в виде

$$\{\sigma\}_{i+1} = [E]_{i+1} \{\varepsilon\}_{i+1} - \frac{\delta}{\delta_1} G \sum_{j=0}^i ([D]_{j,i} \{\varepsilon\}_j), \quad (15)$$

где

$$\{\sigma\}_{i+1} = \{\sigma_x(t_{i+1}) \quad \sigma_y(t_{i+1}) \quad \tau_{xy}(t_{i+1})\}^T;$$

$$\{\varepsilon\}_{i+1} = \{\varepsilon_x(t_{i+1}) \quad \varepsilon_y(t_{i+1}) \quad \gamma_{xy}(t_{i+1})\}^T;$$

$$[E]_{i+1} = \frac{E(t_{i+1})}{1-\mu(t)^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu(t) & 0 \\ \mu(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu(t)}{2} \end{bmatrix};$$

$$[D]_{j,i} = (\exp(-\delta_1(t_{i+1} - t_{j+1})) - \exp(-\delta_1(t_{i+1} - t_j))) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, для нахождения вязкоупругого напряженно-деформированного состояния грунтового основания необходимо знать всю предысторию деформирования, т. е. деформации $\{\varepsilon\}_0, \{\varepsilon\}_1, \{\varepsilon\}_2, \dots$. В начальный момент времени деформации $\{\varepsilon\}_0$ могут быть найдены из решения упругой задачи.

Плотность энергии деформации будет выражаться площадью диаграммы деформирования материала [9, 10, 12]

$$U^0(t_{i+1}) = \int_0^{\varepsilon_i(t_{i+1})} \sigma_i d\varepsilon_i.$$

При конечно-элементной дискретизации области существования исследуемой системы энергия деформации для одного конечного элемента будет равна

$$U_{i+1} = \iint_S U^0(t_{i+1}) dS,$$

где S – площадь конечного элемента.

Тогда согласно принятой гипотезе в соответствии с принципом возможных перемещений для момента времени t_{i+1} будем иметь

$$\{\tilde{g}\}_{i+1}^T \{R\} = \iint_S \{\tilde{\varepsilon}\}_{i+1}^T \{\sigma\}_{i+1} dS, \quad (16)$$

где $\{g\}_{i+1}$ – вектор узловых перемещений в $(i+1)$ -й момент времени, символ « \sim » означает вариацию; $\{R\}$ – вектор узловых усилий.

Рассмотрим треугольный конечный элемент [12–15]. Каждый узел такого конечного элемента в любой момент времени будет иметь две степени свободы

$$\{g\}_i^T = \{u(t_i) \quad \vartheta(t_i)\}.$$

Для аппроксимации перемещений внутри конечного элемента воспользуемся линейными полиномами:

$$\begin{cases} u(t_i) = \alpha_1(t_i) + \alpha_2(t_i)x + \alpha_3(t_i)y; \\ \vartheta(t_i) = \alpha_4(t_i) + \alpha_5(t_i)x + \alpha_6(t_i)y, \end{cases} \quad (17)$$

где $\alpha_1(t_i) - \alpha_6(t_i)$ – параметры линейризации, постоянные для элемента в фиксированный момент времени.

Таким образом, компоненты перемещений $u(t_i)$ и $\vartheta(t_i)$ треугольного элемента в произвольный фиксированный момент времени, узлы которого имеют шесть степеней свободы, можно выразить как произведение матрицы декартовых координат узловых точек на матрицу-столбец параметров поля деформаций

$$\{g\}_i = [A] \{a\}_i, \quad (18)$$

где $\{g\}_i^T = \{u_l(t_i) \quad u_j(t_i) \quad u_k(t_i) \quad \vartheta_l(t_i) \quad \vartheta_j(t_i) \quad \vartheta_k(t_i)\}$ – вектор узловых перемещений;

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_l & y_l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \text{ – координатная}$$

матрица; $\{a\}_i = \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6\}$ – вектор параметров; $x_l, y_l, x_j, y_j, x_k, y_k$ – координаты узлов.

Из (17) могут быть найдены неизвестные параметры

$$\{a\}_i = [A]^{-1} \{g\}_i. \quad (19)$$

Деформации определяются из уравнений Коши (2), (8), (13):

$$\{\varepsilon\}_i = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(t_i) \\ \varepsilon_y(t_i) \\ \gamma_{xy}(t_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(t_i)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(t_i)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(t_i)}{\partial y} + \frac{\partial v(t_i)}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Подставляя в уравнения (20) равенства (17) и производя дифференцирование, получим

$$\{\varepsilon\}_i = \begin{Bmatrix} \alpha_2(t_i) \\ \alpha_6(t_i) \\ \alpha_3(t_i) + \alpha_5(t_i) \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

Выражение (21) можно переписать в виде

$$\{\varepsilon\}_i = [B] \{a\}_i, \quad (22)$$

где

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подставляя (19) в (22), получим выражения, связывающие три составляющих деформаций с перемещениями:

$$\{\varepsilon\}_i = [B][A]^{-1} \{g\}_i. \quad (23)$$

Подставляя далее (23) в (15), для произвольного момента времени будем иметь

$$\{\sigma\}_{i+1} = [E]_{i+1} [B][A]^{-1} \{g_{узл}\}_{i+1} + \frac{\delta}{\delta_1} \times \sum_{j=0}^i \left(G(t_j) [D]_{j,i} [B][A]^{-1} \{g_{узл}\}_j \right). \quad (24)$$

Подставим (23) и (24) в (16)

$$\begin{aligned} \{\tilde{g}_{узл}\}_{i+1}^T \{R\} &= \int_0^b \int_0^a \left\{ \tilde{g}_{узл} \right\}_{i+1}^T [A^{-1}]^T [B]^T \times \\ &\times \left([E]_{i+1} [B][A]^{-1} \{g_{узл}\}_{i+1} - \right. \\ &\left. - \frac{\delta}{\delta_1} \sum_{j=0}^i \left(G(t_j) [D]_{j,i} [B][A]^{-1} \{g_{узл}\}_j \right) \right) dx dy, \end{aligned}$$

где a, b – размеры конечного элемента вдоль осей X и Y соответственно.

Учитывая, что матрицы $[A]$ и $[B]$ не зависят от координат, их можно вынести за знак интеграла, тогда, проинтегрировав, будем иметь

$$\{R\} = S [A^{-1}]^T [B]^T [E]_{i+1} [B] \times \times [A^{-1}] \{g_{узл}\}_{i+1} - S [E_{вязк}],$$

где S – площадь конечного элемента;

$$[E_{вязк}] = \frac{\delta}{\delta_1} \sum_{j=0}^i \left(G(t_j) (\exp(-\delta_1(t_{i+1} - t_j)) - \exp(-\delta_1(t_{i+1} - t_j))) [A^{-1}]^T [B]^T \times \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [B][A^{-1}] \{g_{узл}\}_j \right).$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$\{R_\Phi\}_{i+1} = [K] \{g_{узл}\}_{i+1}, \quad (26)$$

где $[K] = S [A^{-1}]^T [B]^T [E]_{i+1} [B][A^{-1}]$ – матрица жесткости конечного элемента; $\{R_\Phi\}_{i+1}$ – вектор узловых усилий в момент времени t_{i+1} , причем

$$\{R_\Phi\}_{i+1} = \{R\} + [E_{\text{вязк}}]. \quad (27)$$

Матрица жесткости для всей деформируемой системы будет равна

$$K_{ij}^{\Gamma_{\text{л}}} = \sum_{r=1}^N K_{ij}^r,$$

где N – количество конечных элементов, на которые разбита рассматриваемая область; $K_{ij}^{\Gamma_{\text{л}}}$ – элемент матрицы $[K^{\Gamma_{\text{л}}}]$, характеризующий вклад j -го единичного перемещения в i -й компонент узловых сил системы; K_{ij}^r – элемент матрицы жесткости r -го элемента, характеризующий вклад j -го единичного перемещения в i -й компонент узловых сил.

В итоге получим систему линейных алгебраических уравнений вида (26), многократное решение которой после учета граничных условий позволит определить напряженно-деформированное состояние системы дисперсных твердых тел.

Алгоритм компьютерного моделирования вязкоупругих деформаций можно представить в виде ряда следующих процедур.

1. С помощью графического интерфейса, реализующего методику визуального объектно-ориентированного моделирования [12, 16, 17], осуществляется задание геометрической конфигурации рассматриваемой системы дисперсных твердых тел, задание физических свойств (модуля упругости, коэффициента Пуассона, параметров ядра релаксации) элементов рассматриваемой системы, граничных условий и действующих внешних сил.

2. Согласно изложенному алгоритму формируются матрица жесткости $[K^{\Gamma_{\text{л}}}]$ и вектор узловых усилий $\{R\}$.

3. Учитываются граничные условия, для этого осуществляется корректировка матрицы $[K^{\Gamma_{\text{л}}}]$ и вектора $\{R\}$. Результатом корректировки матрицы $[K^{\Gamma_{\text{л}}}]$ является понижение ее размерности за счет исключения граничных значений перемещений, при этом не нарушается ленточная и симметричная структуры матрицы. В итоге будут получены: новая матрица жесткости $[K_0^{\Gamma_{\text{л}}}]$, новый вектор узловых усилий $\{R^0\}$, вектор неизвестных узловых перемещений

и моментов $\{g_{\text{узл}}^0\}$, вектор известных граничных перемещений и моментов $\{g^{\Gamma_{\text{п}}}\}$ и вектор номеров граничных узлов.

4. Осуществляется предобусловливание Холецкого для матрицы $[K_0^{\Gamma_{\text{л}}}]$.

5. Задаем номер шага $i = 0$ и временной интервал $t \in [t_0; t_N]$, на котором исследуется напряженно-деформированное состояние системы вязкоупругих дисперсных твердых тел.

6. Осуществляется решение системы линейных алгебраических уравнений (26) с предобусловленной матрицей $[K_0^{\Gamma_{\text{л}}}]$ методом сопряженных градиентов.

7. Для каждого конечного элемента по (25) вычисляется матрица $[E_{\text{вязк}}]$.

8. Для каждого конечного элемента по (27) вычисляется новый вектор $\{R^0\}_{i+1}$. При этом для конечных элементов, содержащих граничные узловые точки, учитываются известные перемещения $\{g^{\Gamma_{\text{п}}}\}$.

9. Сохраняется найденный вектор узловых перемещений и моментов $\{g_{\text{узл}}^0\}_i$.

10. Проверяется, если

$$t_{i+1} \in [t_0; t_N],$$

то осуществляется переход на шаг 6.

11. Осуществляются визуализация и сохранение результатов моделирования.

Моделирование напряженно-деформированного состояния исследуемой системы. На плитный фундамент шириной 20×40 м, работающий в условиях плоской деформации, и толщиной $0,4$ м действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 114$ кПа. Модуль упругости плиты $E = 27 \cdot 10^3$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,20$. Грунтовое основание представляет собой слой мергеля мощностью $6,5$ м. Общая толщина сжимаемой зоны – $9,5$ м. Ядро релаксации имеет вид (9), где $\delta = 0,05$ 1/сут; $\delta_1 = 0,02$ 1/сут; $E = 9$ МПа; $\mu = 0,45$ [18, 19].

При решении задачи методом конечных элементов рассматриваемая область дискретизировалась 7200 конечными элементами в фор-

ме равностороннего Δ размером стороны 0,3 м. Временной шаг выбирался равным 0,5 сут. Время нахождения решения на отрезке от 0 до 1000 сут. составило менее 30 с. Стабилизационная осадка 5,55 см приходится на точку 395 сут.

ВЫВОДЫ

1. Согласно результатам проведенного моделирования предлагаемая математическая модель, алгоритм и программное обеспечение могут быть использованы для исследования вязкоупругого деформирования неоднородных систем механики грунтов.

2. Достоинством предлагаемой математической модели и методики ее исследования является возможность рассматривать напряженно-деформируемое состояние неоднородных систем механики грунтов с различными граничными условиями.

3. В случае принятия гипотезы о постоянстве во времени коэффициента Пуассона μ и модуля упругости E глобальная матрица жесткости на каждом шаге итерационного процесса будет оставаться неизменной. Данное предположение позволило значительно ускорить процесс нахождения вязкоупругого решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цытович, Н. А.** Механика грунтов / Н. А. Цытович. – М.: Стройиздат, 1982. – 264 с.
2. **Вялов, С. С.** Реологические основы механики грунтов / С. С. Вялов. – М.: Высш. шк., 1978. – 446 с.
3. **Шукле, Л.** Реологические проблемы механики грунтов / Л. Шукле. – М.: Стройиздат, 1976. – 486 с.
4. **Рейнер, М.** Реология / М. Рейнер. – М.: Наука, 1965. – 280 с.
5. **Александров, А. В.** Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высш. шк., 1990. – 400 с.
6. **Малинин, Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1976. – 400 с.

7. **Ржаницын, А. Р.** Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1968. – 416 с.

8. **Фадеев, А. Б.** Метод конечных элементов в геомеханике / А. Б. Фадеев. – М.: Недра, 1987. – 224 с.

9. **Старовойтов, Э. И.** Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости: учеб. для строит. спец. вузов / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 344 с.

10. **Победря, Б. Е.** Численные методы в теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря. – М.: Изд-во Московского университета, 1981. – 344 с.

11. **Зарецкий, Ю. К.** Теория консолидации грунтов / Ю. К. Зарецкий. – М.: Наука, 1967. – 320 с.

12. **Быховцев, В. Е.** Компьютерное моделирование систем нелинейной механики грунтов / В. Е. Быховцев, А. В. Быховцев, В. В. Бондарева. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2002. – 215 с.

13. **Зенкевич, О.** Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 540 с.

14. **Журавков, М. А.** Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах / М. А. Журавков. – Минск: БГУ, 2002. – 456 с.

15. **Амусин, Б. З.** Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики / Б. З. Амусин, А. Б. Фадеев. – М.: Недра, 1975. – 144 с.

16. **Курочка, К. С.** Формализация процесса компьютерного моделирования линейной системы: здание-фундамент-основание / К. С. Курочка // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы IV респ. науч. конф. студ. и асп. – Гомель: ГГУ, 2001. – С. 29–31.

17. **Быховцев, В. Е.** Визуальное объектно-ориентированное моделирование зданий с фундаментами на грунтовых основаниях / В. Е. Быховцев, А. В. Быховцев, К. С. Курочка // Тр. междунар. науч.-техн. конф., Минск, 10–12 окт. 2001 г.: Т. 2. – Минск: БНТУ, 2001. – С. 5–16.

18. **Сеськов, В. Е.** Биогенные грунты Беларуси и использование их в качестве оснований под здания и сооружения / В. Е. Сеськов. – Минск: БелНИИТИ, 1989. – 48 с.

19. **Сеськов, В. Е.** Физико-механические характеристики погребенных биогенных грунтов / В. Е. Сеськов // Современные архитектурно-конструктивные системы зданий и сооружений, новые строительные материалы и технологии: сб. науч. тр. – Минск: Стринко, 2000. – С. 119–128.

Поступила 19.11.2007