

УДК 621.824:51

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ВАЛИКО-КОЛЬЦЕВЫМ МЕХАНИЗМОМ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ РАУСА

Инж. ЛАПАНОВИЧ И. О.

Белорусский национальный технический университет

Валико-кольцевые механизмы (ВКМ) нашли широкое применение в технике для преобразования вращательного движения вала в возвратно-поступательное движение каретки [1]. При этом конструктивные особенности ВКМ позволяют не только преобразовывать, но и управлять исполнительным органом в процессе рабочих движений. Анализ и синтез переходных процессов такой системы возможен только на основе корректной динамической и математической модели.

Динамическая модель управляемой системы с ВКМ реализована в виде двух звеньев: вала 1 и кольца 2 с соответствующей геометрией приведения масс и моментов инерции звеньев и соответствующей схемой приведения сил, представленной на рис. 1.

Звенья приведения образуют неголономную кинематическую пару, допускающую движение вала и кольца по четырем обобщенным координатам  $\varphi, \Phi, z, \beta$ . Координаты  $\varphi, \Phi$  – углы поворота вала и кольца относительно осей  $z$  и  $z'$  соответственно;  $\beta$  – угол верчения кольца;  $z$  – координата перемещения кольца. Движения по двум координатам  $\varphi$  и  $\beta$  независимы, по двум другим координатам  $\Phi$  и  $z$  – связаны неинтегрируемыми кинематическими соотношениями.

Передаточная кинематическая функция скоростей для преобразования вращательного движения вала в поступательное движение кольца имеет вид:

$$u_{12} = \frac{z\dot{\varphi}}{\dot{z}}, \quad (1)$$

а во вращательное движение кольца по координате  $\Phi$

$$u_{13} = \frac{r\dot{\varphi}}{R\dot{\Phi}}, \quad (2)$$

где  $r, R$  – радиусы вала и кольца;  $\dot{\varphi}, \dot{\Phi}$  – угловые скорости вала и кольца;  $\dot{z}$  – скорость перемещения кольца вдоль образующей вала.

Полагая  $u_{12}, u_{13}$  независимыми функциями времени, т. е.  $u_{12} = f(t); u_{13} = f(t)$ , соотношения (1), (2) следует рассматривать как уравнения неголономных связей. Предполагается при этом, что валико-кольцевой механизм является идеальным, т. е. его кинематические передаточные функции не зависят от нагрузки, приведенные массы и моменты инерции постоянны.

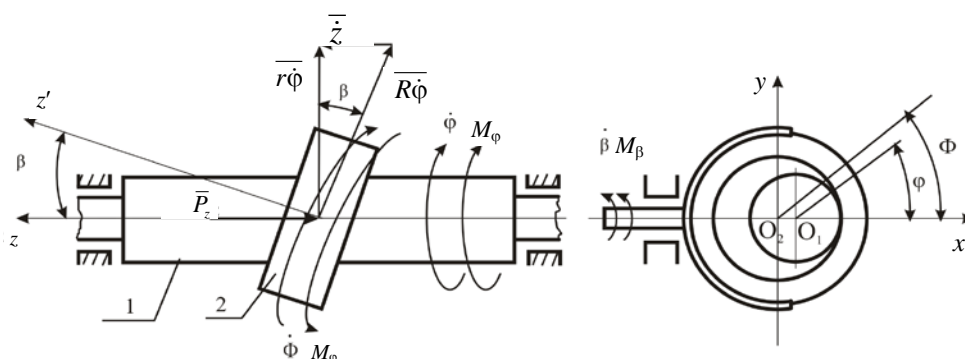


Рис. 1. Схема распределения скоростей, сил и моментов

Целесообразно введение функций  $u_{21}, u_{31}$ , обратных функциям скоростей  $u_{12}, u_{13}$  соответственно:

$$u_{21} = \frac{\dot{z}}{r\dot{\Phi}}; \quad (3)$$

$$u_{31} = \frac{R\dot{\Phi}}{r\dot{\Phi}}. \quad (4)$$

Таким образом, машина с ВКМ требует для описания движения минимум четырех обобщенных координат при двух условиях неголономных связей. Движение системы с ВКМ может быть описано с помощью методов неголономной механики. В частности, в [2] с этой целью использованы уравнения Аппеля.

Теоретический и практический интерес для анализа сил системы имеет вывод уравнений движения ВКМ, преобразующего вращательное движение в поступательное, на основе уравнений Рауса. Так как минимальное число обобщенных координат, определяющих всевозможные конфигурации модели ВКМ четыре, для описания его движения в форме Рауса необходимо составить четыре уравнения вида и дополнить их уравнениями неголономных связей вида:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \Phi} &= Q_{\Phi} + \lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{21}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} &= Q_z + \lambda_1 A_{12}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \Phi} &= Q_{\Phi} + \lambda_2 A_{23}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= Q_{\beta}; \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} r\dot{\Phi} - \frac{1}{u_{21}} \dot{z} &= 0; \\ r\dot{\Phi} - \frac{1}{u_{31}} R\dot{\Phi} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

В уравнениях (5)  $Q_{\Phi}, Q_z, Q_{\Phi}, Q_{\beta}$  – обобщенные силы, выражающие действия внешних активных сил:

$$Q_{\Phi} = M_{\Phi}; \quad Q_z = -P_z; \quad Q_{\Phi} = -M_{\Phi}; \quad Q_{\beta} = M_{\beta},$$

где  $M_{\Phi}$  – движущий момент, приведенный к валу;  $P_z$  – приведенная к кольцу в точке контакта с валом сила технологического сопротивления, действующая на каретку вдоль оси  $Oz$ ;  $M_{\Phi}$  – приведенный момент сил сопротивления качению кольца;  $M_{\beta}$  – то же сил вращению кольца на угол  $\pm\beta$ ;  $A_{11}, A_{21}, A_{12}, A_{23}$  – соответствующие коэффициенты уравнений неголономных связей (6), т. е.

$$A_{11} = r; \quad A_{21} = r; \quad A_{12} = -\frac{1}{u_{21}}; \quad A_{23} = -R\frac{1}{u_{31}};$$

$\lambda_1, \lambda_2$  – неопределенные множители, пропорциональные обобщенным силам реакций неголономных связей по координатам  $z$  и  $\Phi$  соответственно.

Кинетическая энергия  $T$  движущихся масс двузвенной модели машины с ВКМ:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2} (m\dot{z}^2 + I_2 \dot{\Phi}^2) + \frac{1}{2} I_3 \dot{\beta}^2,$$

где  $I_1$  – момент инерции всех звеньев ведущей части машины с ВКМ, приведенный к валу;  $m$  – масса поступательно перемещающейся каретки, приведенная к кольцу;  $I_2$  – момент инерции вращающегося кольца, приведенный к кольцу относительно оси  $Oz'$ ;  $I_3$  – то же масс звеньев управляющей части, приведенный к кольцу относительно оси  $O_2x$ .

Выполнив соответствующие операции дифференцирования по уравнениям (5), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\Phi} = M_{\Phi} + \lambda_1 r + \lambda_2 r; \end{cases} \quad (7a)$$

$$\begin{cases} m\ddot{z} = -P_z - \lambda_1 \frac{1}{u_{21}}; \end{cases} \quad (7б)$$

$$\begin{cases} I_2 \ddot{\Phi} = -M_{\Phi} - \lambda_2 R \frac{1}{u_{31}}; \end{cases} \quad (7в)$$

$$\begin{cases} I_3 \ddot{\beta} = M_{\beta}. \end{cases} \quad (7г)$$

Вместе с уравнениями связи (6) уравнения (7) образуют достаточную систему для определения шести неизвестных функций  $\lambda_1, \lambda_2, \ddot{\Phi}, \ddot{z}, \ddot{\Phi}, \ddot{\beta}$ .

Продифференцировав по времени уравнения связи (6), найдем значение ускорения перемещения кольца:

$$\ddot{z} = ru_{21}\ddot{\phi} + r\dot{u}_{21}\dot{\phi}, \quad (8)$$

и значение углового ускорения кольца

$$\ddot{\Phi} = \frac{r}{R}u_{31}\ddot{\phi} + \frac{r}{R}\dot{u}_{31}\dot{\phi}. \quad (9)$$

Неопределенный множитель  $\lambda_1$  определяется совместным решением уравнений (7б), (8)

$$\lambda_1 = -P_z u_{21} - mru_{21}^2\ddot{\phi} - mru_{21}\dot{u}_{21}\dot{\phi}, \quad (10)$$

а неопределенный множитель  $\lambda_2$  – совместным решением уравнений (7в), (9)

$$\lambda_2 = -M_\phi \frac{1}{R}u_{31} - I_2 \frac{r}{R^2}u_{31}^2\ddot{\phi} - I_2 \frac{r}{R^2}u_{31}\dot{u}_{31}\dot{\phi}. \quad (11)$$

Подставив (10), (11) в уравнение (7а) и выполнив соответствующие преобразования, получим основную систему двух дифференциальных уравнений, составленных относительно углового ускорения ведущего вала  $\ddot{\phi}$  и углового ускорения вращения кольца  $\ddot{\beta}$ :

$$\begin{cases} \left( I_1 + mr^2u_{21}^2 + I_2 \frac{r^2}{R^2}u_{31}^2 \right) \ddot{\phi} + \\ + \left( mr^2u_{21}\dot{u}_{21} + I_2 \frac{r^2}{R^2}u_{31}\dot{u}_{31} \right) \dot{\phi} = \\ = M_\phi - P_z ru_{21} - M_\phi \frac{r}{R}u_{31}, \\ I_3 \ddot{\beta} = M_\beta. \end{cases} \quad (12)$$

Для получения уравнений движения машины с ВКМ относительно параметров движения ведомого кольца используем уравнения связи в виде:

$$\begin{cases} r\dot{\phi} - u_{12}\dot{z} = 0; \\ r\dot{\phi} - u_{13}R\dot{\Phi} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

После операций дифференцирования уравнений (5) с учетом (13) имеем систему:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\phi} = M_\phi + \lambda_1 r + \lambda_2 r; \\ m\ddot{z} = -P_z - \lambda_1 u_{12}; \\ I_2 \ddot{\Phi} = -M_\phi - \lambda_2 R u_{13}; \\ I_3 \ddot{\beta} = M_\beta. \end{cases} \quad (14)$$

Дифференцируя уравнение связи (13), найдем значение углового ускорения

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{r}u_{12}\ddot{z} + \frac{1}{r}\dot{u}_{12}\dot{z}. \quad (15)$$

Совместным решением уравнений (13) и последующим дифференцированием получаем выражение для углового ускорения

$$\ddot{\Phi} = \frac{1}{R} \frac{u_{12}}{u_{13}} \ddot{z} + \frac{1}{R} \left( \frac{u_{12}}{u_{13}} \right) \dot{z}. \quad (16)$$

Совместным решением уравнений (14), (15), (16) окончательно получаем систему дифференциальных уравнений, составленных относительно параметров ведомого управляемого кольца:

$$\begin{cases} \left[ m + \frac{I_1}{r^2}u_{12}^2 + \frac{I_2}{R^2} \left( \frac{u_{12}}{u_{13}} \right)^2 \right] \ddot{z} + \\ + \left[ \frac{I_1}{r^2}u_{12}\dot{u}_{12} + \frac{I_2}{R^2} \frac{u_{12}}{u_{13}} \left( \frac{u_{12}}{u_{13}} \right) \dot{z} \right] = \\ = \frac{M_\phi}{r}u_{12} - P_z - \frac{M_\phi}{R} \left( \frac{u_{12}}{u_{13}} \right); \\ I_3 \ddot{\beta} = M_\beta. \end{cases} \quad (17)$$

### ВЫВОД

Таким образом, на основе метода Рауса получены уравнения движения (12), (17) негеломного механизма с двумя степенями свободы. Уравнения представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Uhing J.** Rolling nut for transforming a rotary movement of a shaft into a thrust movement of the rolling unit. United States Patent № 4,614,124. U.S. Cl. 74/89, 74/25, Int. Cl. F16H 21/16. Date of Patent: Sept. 30, 1986.
2. **Насонова, Л. С.** Уравнения движения машинного агрегата с валико-кольцевым механизмом, преобразующим вращательное движение в поступательное / Л. С. Насонова // Машиностроение... (Изв. высш. учеб. заведений). – 1975. – № 4. – С. 52–55.

Поступила 10.01.2007