УДК 511.343

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МНОГОЧЛЕНОВ НЬЮТОНА И ПРОЕКТИРОВАНИЕ НАПРАВЛЕННЫХ ОТРЕЗКОВ В МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Канд. физ.-мат. наук, доц. СОКОЛОВА Н. М.

Белорусский национальный технический университет

Геометризация математических объектов вызвана необходимостью объяснять суть и причину явлений, для описания которых применяются эти объекты. Введем геометрическую интерпретацию многочленов Ньютона, начав с бинома, где натуральный показатель степени n – это и размерность n-мерного пространства, и соответствующие обозначения чисел a_n и b_n в этих пространствах.

При $n = 1$ выберем любые два числа $a_1 > 0$; $b_1 > 0$ и их сумму обозначим через c: $c = a_1 + b_1$ $(c \neq 1)$.

При $n = 2$ $\quad c^2 = (a_1 + b_1)^2 = a_1^2 + 2a_1 b_1 + b_1^2$.

По Ньютону, площадь c^2 равна сумме $4 = 2^2$ площадей: двух квадратов a_1^2, b_1^2 и двух прямоугольников $a_1 b_1$. Пифагор эту же площадь определил как сумму двух квадратов

$$c^2 = (a_1 + b_1)^2 = (a_1 + b_1)c = a_1 c + b_1 c = a_2^2 + b_2^2,$$

где

$$a_1 c = a_2^2; \quad b_1 c = b_2^2,$$

или

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{c} = \cos\alpha_2; \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2}{c} = \cos\beta_2,$$

т. е. Пифагор ввел два квадрата $a_2^2 = a_1 c$ и $b_2^2 = b_1 c$, равновеликих двум прямоугольникам $a_1 c$ и $b_1 c$:

$$\left(\frac{a_2}{c}\right)^2 + \left(\frac{b_2}{c}\right)^2 \equiv (\cos\alpha_2)^2 + (\cos\beta_2)^2 \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 \equiv 1;$$

$$n = 3 \quad c^3 = (a_1 + b_1)^3 = a_1^3 + 3a_1^2 b_1 + 3a_1 b_1^2 + b_1^3.$$

По Ньютону, объем c^3 считается как сумма $8 = 2^3$ объемов: двух кубов a_1^3, b_1^3, трех прямоугольных параллелепипедов с объемами $a_1^2 b_1$ и трех прямоугольных параллелепипедов с объемами $a_1 b_1^2$.

По логике Пифагора, этот объем c^3 можно представить суммой двух кубов a_3^3 и b_3^3:

$$c^3 = (a_1 + b_1)^3 = (a_1 + b_1)c^2 = a_1 c^2 + b_1 c = a_3^3 + b_3^3,$$

где

$$a_3^3 = a_1 c^2; \quad b_3^3 = b_1 c^2,$$

или

$$\frac{a_1}{a_3} = \cos\alpha_3 = \left(\frac{a_3}{c}\right)^2; \quad \frac{b_1}{b_3} = \cos\beta_3 = \left(\frac{b_3}{c}\right)^2.$$

Из последних двух равенств следует:

$$\frac{a_3}{c} = (\cos\alpha_3)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{b_3}{c} = (\cos\beta_3)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{b_1}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

и тогда

$$\left(\frac{a_3}{c}\right)^3 + \left(\frac{b_3}{c}\right)^3 = (\cos\alpha_3)^{\frac{3}{2}} + (\cos\beta_3)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b_1}{b_3}\right)^{\frac{3}{2}} = 1.$$

В пространстве размерности n получим:

$$c^n = (a_1 + b_1)^n = (a_1 + b_1)c^{n-1} =$$

$$= a_1 c^{n-1} + b_1 c^{n-1} = a_n^n + b_n^n,$$

где

$$a_n^n = a_1 c^{n-1},\ b_n^n = b_1 c^{n-1},$$

или

$$\frac{a_1}{a_n} = \cos\alpha_n = \left(\frac{a_n}{c}\right)^{n-1};\ \frac{b_1}{b_n} = \cos\beta_n = \left(\frac{b_n}{c}\right)^{n-1},$$

откуда следует

$$\frac{a_n}{c} = (\cos\alpha_n)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n-1}};$$

$$\frac{b_n}{c} = (\cos\beta_n)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{b_1}{b_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

и

$$\left(\frac{a_n}{c}\right)^n + \left(\frac{b_n}{c}\right)^n \equiv (\cos\alpha_n)^{\frac{n}{n-1}} + (\cos\beta_n)^{\frac{n}{n-1}} \equiv$$
$$\equiv \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{b_1}{b_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \equiv 1. \tag{1}$$

Ничего не меняется в доказательстве возможности представления n-й степени многочлена Ньютона суммой n-х степеней соответствующих проекций из одномерного в n-мерные пространства:

$$c = a_1 + b_1 + \cdots + s_1;$$

$$c^n = (a_1 + b_1 + \cdots + s_1)^n = (a_1 + b_1 + \cdots + s_1)c^{n-1} =$$
$$= a_1 c^{n-1} + b_1 c^{n-1} + \cdots + s_1 c^{n-1} =$$
$$= a_n^n + b_n^n + \cdots + s_n^n,$$

где

$$a_n^n = a_1 c^{n-1};\ b_n^n = b_1 c^{n-1}, \ldots,\ s_n^n = s_1 c^{n-1},$$

или

$$\frac{a_1}{a_n} = \left(\frac{a_n}{c}\right)^{n-1} = \cos\alpha_n;\ \frac{b_1}{b_n} = \left(\frac{b_n}{c}\right)^{n-1} = \cos\beta_n, \ldots,$$

$$\frac{s_1}{s_n} = \left(\frac{s_n}{c}\right)^{n-1} = \cos\omega_n,$$

откуда следует:

$$\frac{a_n}{c} = (\cos\alpha_n)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n-1}};\ \ldots;$$

$$\frac{s_n}{c} = (\cos\omega_n)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{s_1}{s_n}\right)^{\frac{1}{n-1}};$$

$$\left(\frac{a_n}{c}\right)^n + \left(\frac{b_n}{c}\right)^n + \cdots + \left(\frac{s_n}{c}\right)^n \equiv (\cos\alpha_n)^{\frac{n}{n-1}} +$$
$$+ (\cos\beta_n)^{\frac{n}{n-1}} + \cdots + (\cos\omega_n)^{\frac{n}{n-1}} \equiv \tag{2}$$
$$\equiv \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{b_1}{b_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \ldots + \left(\frac{s_1}{s_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \equiv 1.$$

Отметим следующий важный результат, который вытекает из (2) при $n = 2$: $c^2 = a_2^2 + b_2^2 + \cdots + s_2^2$. Величина c^2 есть квадрат длины отрезка c, разделенного на конечное (p) число отрезков a_1, b_1, …, s_1, и не является теоремой Пифагора в p-мерном пространстве, как это принято рассматривать по определению. На плоскости величина c^2 представляет собой квадрат p-линейной формы.

Итак, тождества (1) – n-я степень бинома Ньютона – идентифицируются как теорема Пифагора в n-мерном пространстве для двух слагаемых; тождества (2) – n-я степень многочлена Ньютона – это теорема Пифагора в n-мерном пространстве для конечного числа слагаемых.

Тот факт, что на плоскость всегда можно отобразить величины a_n, b_n, …, s_n и $\frac{a_1}{a_n} = \cos\alpha_n$, $\frac{a_1}{a_n} = \cos\alpha_n$, $\frac{b_1}{b_n} = \cos\beta_n$, …, $\frac{s_1}{s_n} = \cos\omega_n$, свидетельствует о наличии «следов» n-мерных пространств на плоскости в виде соответствующих проекций. Этими проекциями можно легко и эффективно оперировать, а затем пересчитывать результаты в пространство нужной размерности.

Если какие-либо слагаемые в одномерном пространстве отрицательные, то необходимо рассматривать их модули.

В связи с новой геометрической интерпретацией теоремы Пифагора в многомерных пространствах появилась возможность введения единственной «инвариантной» системы координат, естественным образом связанной с самим геометрическим или физическим объектом.

В этой системе координат уже не нужно отделять результаты исследования инвариантных свойств объекта от результатов, привнесенных случайным выбором системы координат, что является основной задачей тензорного исчисления.

Тождества (1) не противоречат великой теореме Ферма – утверждению, что для любого натурального $n > 2$ уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений в целых ненулевых числах *a*, *b*, *c*.

На самом деле, уравнение $a^n + b^n = c^n$ представим в виде

$$a^n + b^n = c^n \equiv (a_1 + b_1)^n = (a_1 + b_1)c^{n-1} =$$

$$= a_1 c^{n-1} + b_1 c^{n-1} = a_n^n + b_n^n,$$

откуда следует: $a \equiv a_n$; $b \equiv b_n$,

$$a_n^n + b_n^n = c^n \Rightarrow \left(\frac{a_n}{c}\right)^n + \left(\frac{b_n}{c}\right)^n \equiv$$

$$\equiv (\cos\alpha_n)^{\frac{n}{n-1}} + (\cos\beta_n)^{\frac{n}{n-1}} \equiv \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{b_1}{b_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \equiv 1.$$

Показатель степени $\dfrac{n}{n-1}$ может быть целым в единственном случае $n = 2$. Иными словами, сумма любых двух чисел при переходе из пространства одной размерности в пространство другой размерности преобразуется по закону суммы нецелых степеней $\dfrac{n}{n-1}$, которая (степень) является целой только при $n = 2$.

Геометрические построения тождеств (1) приведены в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вахитов М. Ф., Соколова Н. М.** Новая интерпретация теоремы Пифагора в многомерных пространствах // Вестник БНТУ. – 2002. – № 4. – С. 76–78.

УДК 51 (077)

О МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЯХ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ С ИЗУЧЕНИЕМ ПРОФИЛИРУЮЩИХ ДИСЦИПЛИН ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

ГОЛУБЕВА И. А.

Белорусский национальный технический университет

Изложение общего курса математики (или дисциплин математического цикла) на факультетах нематематического профиля без учета потребности в математике той специальности, для которой он читается, приводит к тому, что курс в учебном процессе превращается в замкнутую систему. При такой ситуации математическая подготовка студентов обладает существенными недостатками, среди которых следует выделить:

- неоправданную формализацию содержания курса математики;
- рецептурный характер усвоения математических объектов;
- слабые умения в использовании математического аппарата при изучении специальных курсов (физики, сопротивления материалов, строительной механики и т. п.);
- низкий уровень навыков математического самообразования;
- отсутствие современных учебных пособий по математике, соответствующих данной специальности.

Одним из способов ликвидации этих недостатков является перестройка процесса обучения математике, базирующаяся на известной парадигме профессиональной направленности преподавания математики на факультетах нематематического профиля. Эта концепция представляет собой целостную динамическую структуру, которая состоит из методических принципов изложения курса математики и позволяет студентам с помощью современных форм и средств обучения овладевать содержанием этого курса для решения задач, соответствующих данной специальности [1, с. 9].