

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.237: 681.3

В.И. Малюгин

**АЛГОРИТМЫ ТЕСТИРОВАНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ В МОДЕЛЯХ ВЕКТОРНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ СОСТОЯНИЙ**

*Для векторных авторегрессионных моделей с циклическими переключениями состояний предлагается метод исключения краткосрочных колебаний состояния системы, который основывается на последовательном применении двух алгоритмов, реализующих подстановочное байесовское решающее правило поточечной классификации и статистический критерий проверки гипотезы о значении ожидаемой вероятности ошибки классификации. Результаты компьютерного моделирования демонстрируют работоспособность предлагаемого метода.*

**Введение**

Под структурными изменениями, или структурными сдвигами, в статистических моделях понимаются скачкообразные изменения параметров модели сложной системы, обусловленные внешними «шоковыми» воздействиями [1]. Структурные изменения, как правило, не затрагивают фундаментальные зависимости между используемыми в модели переменными, т. е. не приводят к «разрушению» структуры модели, а отражаются только на значениях ее параметров. Целью анализа таких систем обычно является построение статистической модели с учетом установленных моментов структурных изменений с помощью соответствующих фиктивных переменных [2]. Методам анализа структурных изменений в статистических моделях при различных модельных предположениях посвящено значительное число исследований. Обзор наиболее важных результатов дается в [3].

Во многих приложениях актуальными являются сложные системы с фиксированным числом классов состояний и структурными сдвигами, приводящими к последовательной смене состояний. Такие сдвиги будем называть циклическими структурными изменениями. Для описания сложных систем в указанных условиях используются многомерные статистические модели с циклическими переключениями состояний (Regime Switching Models – RS-Models) [4]. Основными задачами анализа подобных систем являются: установление циклического характера смены классов состояний, оценивание моментов переключения состояний (датировка поворотных точек), а также оценивание параметров моделей [5].

Циклический характер смены состояний сложных систем обуславливает зависимость классов состояний. Традиционно предполагается, что эта зависимость описывается ненаблюдаемой однородной цепью Маркова. Это приводит к моделям с марковскими переключениями классов состояний (Markov Switching states model – MS model) [6]. В случае неизвестной модели зависимости либо высокой неопределенности относительно состояния системы в рамках марковской модели целесообразно использовать модели с независимыми классами состояний (Independent Switching states model – IS model) [7]. При наличии обучающих реализаций временных рядов, соответствующих различным классам состояний, для оценивания классов состояний могут применяться методы дискриминантного анализа указанных моделей [8]. Для решения перечисленных выше задач анализа при отсутствии классифицированной обучающей выборки активно используются EM-алгоритмы (expectation-maximization algorithms) расщепления смесей распределений наблюдений, описываемых многомерными статистическими моделями [5, 9, 10]. EM-алгоритмы обеспечивают совместное решение таких задач, как классификация многомерных наблюдений, описываемых статистическими моделями, на заданное число классов состояний и оценивание параметров моделей для различных классов состояний. Полученная в результате классификации наблюдений последовательность классов используется да-

лее для установления циклического характера изменения состояния и определения моментов переключения (поворотных точек).

Решение перечисленных выше задач с помощью методов статистической классификации временных рядов может осложняться недостаточной точностью лежащих в их основе статистических решающих правил классификации [10]. Вследствие этого возможно появление значительного числа «ложных сигналов», соответствующих изменениям, приводящим не к смене классов состояний, а к случайным колебаниям состояния системы, которые не должны приниматься во внимание. Доля ложных сигналов при использовании статистических решающих правил классификации ограничена снизу вероятностью ошибки соответствующего байесовского решающего правила, оптимального в смысле минимума вероятности ошибки [2]. Необходимость исключения краткосрочных колебаний может быть также обусловлена ограничениями, имеющими содержательную интерпретацию. Например, при анализе макроэкономических циклов с двумя классами состояния экономики (рост и рецессия) по квартальным временным рядам для перехода из состояния «рост» в состояние «рецессия» может устанавливаться ограничение: не менее двух кварталов пребывания экономической системы в состоянии «рецессия» [8].

Таким образом, при анализе сложных систем с циклической сменой состояний с помощью алгоритмов статистической классификации актуальной является задача тестирования установленных с помощью указанных алгоритмов моментов переключения состояний с целью исключения краткосрочных колебаний, не имеющих содержательной интерпретации. Решение данной задачи с помощью специальных статистических алгоритмов позволяет автоматизировать процесс обработки данных, не прибегая к экспертному анализу. В статье предлагается метод решения данной задачи, описываются реализующие его базовые алгоритмы и приводятся результаты экспериментального исследования эффективности алгоритмов на основе компьютерных модельных экспериментов.

### 1. Модели RS-VARX и задача тестирования циклических структурных изменений

Пусть сложная система в момент времени  $t$  характеризуется случайным вектором наблюдений  $\mathbf{y}_t \in \mathfrak{R}^n$ , определенным на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ , где  $\Omega$  – пространство элементарных объектов ( $\omega \in \Omega$  – элементарный объект);  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -алгебра подмножеств из  $\Omega$ ;  $\mathbf{P}$  – вероятностная мера:  $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\{\omega \in A\}$ ,  $A \in \mathfrak{F}$ . Пусть  $\{\Omega_0, \dots, \Omega_{L-1}\}$  – разбиение  $\Omega$  на конечное число непустых непересекающихся подмножеств, таких что  $\Omega_l \in \mathfrak{F}$ ,  $\mathbf{P}\{\Omega_l\} = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega_l\}) > 0$ ,  $\Omega_l \in \mathfrak{F}$ ,  $\mathbf{P}\{\Omega_l\} = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega_l\}) > 0$ ,  $\bigcup_{l \in S(L)} \Omega_l = \Omega$ ,  $S(L) = \{0, \dots, L-1\}$ . Подмножества  $\{\Omega_l\} (l \in S(L))$

называются *классами состояний сложной системы*, число которых равно  $L$ .

Предполагается, что случайный вектор наблюдений допускает разбиение  $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^n$  (где  $'$  – знак транспонирования,  $n = N + M$ ,  $N \geq 1$ ,  $M \geq 1$ ) на подвекторы эндогенных переменных  $\mathbf{x}_t = (x_{ij}) \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{R}^N$ , характеризующих состояние сложной системы, и экзогенных переменных  $\mathbf{z}_t = (z_{ik}) \in \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^M$ , описывающих внешние воздействия на систему. В качестве базовой модели наблюдений будем использовать модель векторной авторегрессии с неоднородной циклически изменяющейся эндогенно-экзогенной структурой [4]. В общем случае будем полагать, что временной ряд  $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)'$  описывается моделью RS-VARX  $(p)(p \geq 1)$  вида

$$\mathbf{x}_t = \sum_{i=1}^p A_{d(t),i} \mathbf{x}_{t-i} + B_{d(t)} \mathbf{z}_t + \boldsymbol{\eta}_{d(t),t}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}_{1-p}, \dots, \mathbf{x}_0 \in \mathfrak{R}^N$  – заданные начальные значения;  $\boldsymbol{\eta}_{d(t),t} \in \mathfrak{R}^N$  – определенные на  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$  случайные величины, соответствующие ошибкам наблюдения;  $d(t) \equiv d_t \in S(L) = \{0, \dots, L-1\}$  – номер класса состояния;  $\mathbf{D} = (d_t) \in S^T(L)$  – вектор состояний сложной системы на заданном временном интервале.

Относительно модели (2) сделаем следующие предположения:

М.1. Матрицы коэффициентов авторегрессии  $\{A_{l,i}\}$  ( $i=1,\dots,p$ ) для каждого класса состояний  $l \in S(L)$  удовлетворяют условию стационарности модели VAR( $p$ ) [1].

М.2. Ошибки наблюдения  $\{\boldsymbol{\eta}_{l,r}\}$  ( $t=1,\dots,T$ ) являются независимыми в совокупности гауссовскими случайными векторами с нулевым вектором математического ожидания и ковариационной матрицей  $\Sigma_l : \mathbf{E}\{\boldsymbol{\eta}_{l,r}\} = \mathbf{0}_N \in \mathfrak{R}^N$ ,  $\mathbf{E}\{\boldsymbol{\eta}_{l,r}\boldsymbol{\eta}_{l,s}'\} = \delta_{r,s}\Sigma_l$  ( $r,s=1,\dots,T, l \in S(L)$ ),  $\delta_{r,s}$  – символ Кронекера.

М.3. Значения экзогенных переменных  $\mathbf{z}_t = (z_{t1}, \dots, z_{tM})' \in \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^M$  являются заданными.

М.4. Выполняется условие структурной параметрической неоднородности модели, которое означает, что для разных классов состояний  $\{\Omega_0, \dots, \Omega_{L-1}\}$  параметры модели частично либо полностью различны:  $A_l \neq A_k$  и (или)  $B_l \neq B_k \quad \forall k \neq l, k, l \in S(L)$ .

При выполнении предположений М.1–М.4 модель RS-VARX вида (1) является кусочно-стационарной [3]. Будем рассматривать кусочно-стационарные модели с  $L$  классами состояний, для которых  $2 \leq L < s+1$ , где  $s \geq 1$  – число структурных изменений, соответствующих смене классов состояний, в неизвестные моменты времени  $1 < \tau_1 < \dots < \tau_s < T$ . Относительно номеров классов состояний  $d_t \in S(L)$  ( $t=1,\dots,T$ ) возможны два типа предположений:

d.1.  $\{d_t\}$  ( $t=1,\dots,T$ ) – ненаблюдаемые независимые в совокупности случайные величины с распределением вероятностей  $P\{d_t=l\} = \pi_l > 0$  ( $l \in S(L)$ ),  $\sum_{l \in S(L)} \pi_l = 1$ .

d.2.  $\{d_t\}$  ( $t=1,\dots,T$ ) – ненаблюдаемая однородная эргодическая цепь Маркова (ОЦМ) с распределением, которое определяется вектором вероятностей начального состояния  $\boldsymbol{\pi}$  и матрицей вероятностей одношаговых переходов  $P$  соответственно:

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_l), \pi_l = \mathbf{P}\{d_1=l\} > 0 \quad (l \in S(L)), \sum_{l \in S(L)} \pi_l = 1;$$

$$P = (p_{kl}), p_{kl} = \mathbf{P}\{d_{t+1}=l \mid d_t=k\} \geq 0 \quad (k,l \in S(L)), \sum_{l \in S(L)} p_{kl} = 1, k \in S(L).$$

В случае двух классов состояний ( $L=2$ ) будем использовать следующие предположения относительно параметров вероятностной модели для  $\{d_t\}$ :

$$d.1. \pi_0 = \pi_1 = 0,5; \quad d.2. \pi_0 = \pi_1 = 0,5; \quad P = \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega \\ \omega & 1-\omega \end{pmatrix} \quad (0 < \omega < 0,5). \quad (2)$$

При условии d.1 модель (1) будем называть *моделью VARX с независимыми случайными переключениями состояний (IS-VARX)*, а в случае d.2 – *моделью VARX с марковскими переключениями состояний (MS-VARX)*.

Истинные значения параметров  $\{A_l, B_l, \Sigma_l\}$  ( $l \in S(L)$ ),  $\boldsymbol{\pi}, P$ , а также моменты структурных изменений  $1 < \tau_1 < \dots < \tau_s < T$  в тестируемом временном ряде  $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^n$  ( $t=1,\dots,T$ ) неизвестны. Имеются обучающие реализации временных рядов для каждого класса состояний  $\mathbf{Y}_l = (\mathbf{X}'_l, \mathbf{Z}'_l)' \in \mathfrak{X}^{T^l} \times \mathfrak{Z}^{T^l} \subseteq \mathfrak{R}^{nT^l}$  ( $l \in S(L)$ ), где  $\mathbf{X}'_l = (\mathbf{x}'_{l1}, \dots, \mathbf{x}'_{lT_l}) \in \mathfrak{X}^{T_l}$ ,  $\mathbf{Z}'_l = (\mathbf{z}'_{l1}, \dots, \mathbf{z}'_{lT_l}) \in \mathfrak{Z}^{T_l}$ ,  $T_l$  – длина временных рядов для класса  $\Omega_l$ ,  $T^L = T_1 + \dots + T_L$  – суммарная длина временных рядов. Будем называть совокупность наблюдений  $\{\mathbf{X}_l, \mathbf{Z}_l\}$  ( $l \in S(L)$ ) *классифицированной обучающей выборкой* наблюдений объема  $T^L$ .

Имеют место следующие основные задачи анализа рассматриваемых моделей:

1) оценивание вектора состояний сложной системы  $\mathbf{D} = (d_i) \in S^T(L)$  для тестируемого временного ряда  $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{R}^n$  ( $t=1, \dots, T$ ) с помощью решающих правил статистической классификации и нахождение оценок числа  $\hat{s}$  и моментов структурных изменений  $\{\hat{\tau}_i\}$  ( $i=1, \dots, \hat{s}$ ) на основании полученной оценки  $\hat{\mathbf{D}} = (\hat{d}_i) \in S^T(L)$ ;

2) тестирование оценок моментов структурных изменений  $\{\hat{\tau}_i\}$  ( $i=1, \dots, \hat{s}$ ) с целью исключения краткосрочных колебаний состояния сложной системы и определения точек переключения состояний  $\{\tilde{\tau}_i\}$  ( $i=1, \dots, \tilde{s}$ ,  $\tilde{s} \leq \hat{s}$ ).

Предполагается, что классифицированная обучающая выборка при ее отсутствии может быть сформирована на основе ретроспективных данных с помощью EM-алгоритмов для рассматриваемых моделей RS-VARX [2] и экспертного анализа. Обучающая выборка  $\{\mathbf{X}_l, \mathbf{Z}_l\}$  ( $l \in S(L)$ ) используется для построения «подстановочного» решающего правила классификации и оценивания его условных вероятностей ошибок в рамках задачи 1, которые применяются в предлагаемом методе тестирования краткосрочных колебаний при решении задачи 2.

## 2. Метод и алгоритмы тестирования структурных изменений в модели RS-VARX

Метод тестирования моментов циклических структурных изменений основан на последовательном решении задач классификации многомерных авторегрессионных наблюдений и тестирования моментов структурных изменений с помощью предлагаемого ниже статистического критерия проверки гипотезы о значении ожидаемой вероятности ошибки классификации для применяемого решающего правила классификации. Детальное описание и исследование используемых решающих правил поточечной и групповой классификации для моделей RS-VARX приводится в [9]. Поэтому далее дается лишь краткое описание применяемого решающего правила, а основное внимание уделяется обоснованию предлагаемого статистического критерия.

### 2.1. Решающее правило поточечной классификации

Задача поточечной классификации векторных авторегрессионных наблюдений, описываемых моделью (1), заключается в оценивании номера класса состояния сложной системы  $d_i \in S(L)$  по наблюдениям  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)$  при заданных значениях экзогенных переменных  $\mathbf{x}_{t-p}, \dots, \mathbf{x}_{t-1}$  ( $t=1, \dots, T$ ).

В работе [9] установлено, что если модель (1) удовлетворяет предположениям М.1–М.4,  $d.1$ , а  $\{A_{l,i}\}$ ,  $\{B_l\}$ ,  $\{\pi_l\}$  ( $i=1, \dots, p$ ;  $l \in S(L)$ ) – истинные значения параметров модели, то оптимальное в смысле минимума вероятности ошибки байесовское решающее правило (БРП) поточечной классификации наблюдений  $(x_t, z_t)$  ( $t=1, \dots, T$ ) единственное и определяется соотношениями

$$d_i \equiv d(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) = \arg \min_{l \in S(L)} \left\{ \text{tr}(\Sigma_l^{-1} S_t) + \ln |\Sigma_l| - 2 \ln \pi_l \right\}, \quad S_t = \bar{\boldsymbol{\eta}}_{l,t} \bar{\boldsymbol{\eta}}'_{l,t}, \quad \bar{\boldsymbol{\eta}}_{l,t} = \mathbf{x}_t - \sum_{i=1}^p A_{l,i} \mathbf{x}_{t-i} - B_l \mathbf{z}_t, \quad (3)$$

где для класса  $\Omega_l$   $\boldsymbol{\eta}_{l,t} \in \mathfrak{R}^N$  – случайный вектор отклонений в момент  $t$  значений эндогенных переменных от модельных значений;  $S_t$  – матричная сумма квадратов отклонений.

В предположениях М.1–М.4,  $d.1$  для модели (1) могут быть получены состоятельные оценки максимального правдоподобия параметров  $\{\hat{A}_{l,i}\}$ ,  $\{\hat{B}_l\}$ ,  $\{\hat{\pi}_l\}$  ( $i=1, \dots, p$ ,  $l \in S(L)$ ) по классифицированной обучающей выборке  $\{\mathbf{X}_l, \mathbf{Z}_l\}$  ( $l \in S(L)$ ) [2]. Путем подстановки оценок параметров в БРП (3) получается состоятельное в смысле минимума вероятности ошибки подстановочное байесовское решающее правило (ПБРП) поточечной классификации наблюдений  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)$ :  $\hat{d}_i \equiv \hat{d}(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)$  ( $t=1, \dots, T$ ). В качестве характеристик точности решающих правил классификации используются условные вероятности ошибок для альтернативных классов состоя-

ний. Для простоты описания далее рассматривается случай двух классов, т. е. полагается, что  $L=2$ ,  $d_t \in S(2) = \{0, 1\}$  ( $t=1, \dots, T$ ).

Введем обозначения:  $r_0^{(l)} = \mathbf{P}\{d_t = 1 - l \mid d_t^0 = l\}$  – условная вероятность ошибки при классификации наблюдений из класса  $\Omega_l$  ( $l \in \{0, 1\}$ ), где  $d_t^0 \in \{0, 1\}$  – истинный номер класса состояния системы в момент времени  $t$ ;  $r_1^{(l)}$  ( $r_1^{(l)} > r_0^{(l)}$ ) – недопустимое значение вероятности ошибки классификации для класса  $\Omega_l$ , которое интерпретируется как переход системы в альтернативный класс  $\Omega_{1-l}$  и, соответственно, определяется по формуле

$$r_1^{(l)} = \mathbf{P}\{d_t = 1 - l \mid d_t^0 = 1 - l\} = 1 - \mathbf{P}\{d_t = l \mid d_t^0 = 1 - l\} = 1 - r_0^{(1-l)}. \quad (4)$$

Условные вероятности ошибок  $\{r_0^{(l)}, r_1^{(l)}\}$  ( $l \in \{0, 1\}$ ) неизвестны и могут быть оценены по обучающей выборке  $\{\mathbf{X}_l, \mathbf{Z}_l\}$  ( $l \in S(L)$ ) при построении ПБРП [9].

### 2.2. Алгоритм тестирования моментов циклических структурных изменений

Пусть имеются тестируемый временной ряд  $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{R}^n$  ( $t=1, \dots, T$ ), описываемый моделью RS-VARX (1), М.1–М.4 в предположениях  $d.1$  или  $d.2$ , и классифицированная обучающая выборка  $\{\mathbf{X}_l, \mathbf{Z}_l\}$  ( $l \in S(L)$ ). Предлагаемый алгоритм тестирования структурных изменений основан на использовании ПБРП поточечной классификации, а также оценок его условных вероятностей ошибок по выборке  $\{\mathbf{X}_l, \mathbf{Z}_l\}$  ( $l \in S(L)$ ). Он реализуется посредством выполнения следующих этапов:

1. Построение ПБРП и оценивание условных вероятностей ошибок. По обучающей выборке строится ПБРП поточечной классификации  $\hat{d}_t \equiv \hat{d}(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)$  вида (3). Оценки условных вероятностей ошибок  $\{\hat{r}_0^{(l)}\}$  вычисляются по формуле

$$\hat{r}_0^{(l)} = 1 - \frac{1}{T_l} \sum_{t=1}^{T_l} \delta_{l, \hat{d}_t} \quad (l \in S(2)). \quad (5)$$

2. Классификация тестируемого временного ряда. С помощью оцененного на этапе 1 решающего правила ПБРП  $\hat{d}(\cdot; \cdot)$  осуществляется поточечная классификация тестируемого временного ряда  $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{R}^n$  ( $t=1, \dots, T$ ), в результате чего находится оценка вектора состояний сложной системы  $\hat{\mathbf{D}} = (\hat{d}_1, \dots, \hat{d}_T)' \in S^T(2)$ . Для упрощения записи далее для оценок и истинных значений рассматриваемых характеристик используются одинаковые обозначения  $\{r_0^{(l)}\}$  и  $\{d_t\}$ .

3. Оценивание условных вероятностей ошибок в сериях наблюдений. Случайная последовательность  $d_1, \dots, d_T \in \{0, 1\}$  разбивается на  $\gamma = T/m$  серий  $\mathbf{D}_j = (d_{(j-1)m+1}, \dots, d_{jm})' \in \mathfrak{R}^m$  ( $j=1, \dots, \gamma$ ) фиксированной длины  $m$  ( $p+1 < m \ll T$ ). Для простоты описания алгоритма считается, что  $T$  кратно  $m$ . Будем полагать, что в момент наблюдения серии  $\mathbf{D}_j$   $\Omega_l$  – текущее состояние системы (исходное), а  $\Omega_{1-l}$  – альтернативное ( $l \in \{0, 1\}$ ). Для каждой серии  $\mathbf{D}_j$  вычисляются число решений в пользу альтернативного класса состояния  $\Omega_{1-l}$ , обозначаемое  $k_j^{(l)}(m) \in \{0, 1, \dots, m\}$ , а также доля таких решений (оценка условной вероятности ошибки)  $k_{j,m}^{(l)} \in (0, 1)$  по формулам

$$k_{j,m}^{(l)} = \frac{k_j^{(l)}}{m}, \quad k_j^{(l)} = \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \delta_{d_i, 1-l} \quad (j=1, \dots, \gamma). \quad (6)$$

4. Тестирование моментов структурных изменений. Тестирование осуществляется с помощью статистического критерия на основе сравнения ожидаемой и оцененной условной веро-

ятностей ошибки для текущего состояния системы. Опишем соответствующую задачу статистической проверки гипотез. Пусть  $\Omega_l$  ( $l \in \{0, 1\}$ ) – текущее состояние системы,  $r^{(l)}$  – неизвестное фактическое значение условной вероятности ошибки в пользу альтернативного класса  $\Omega_{1-l}$  при оценивании состояния системы по серии  $D_j$ ;  $r_0^{(l)}$  – условная вероятность ошибки ПБРП (3), которая интерпретируется как ожидаемое значение вероятности ошибки для состояния  $\Omega_l$ ;  $r_1^{(l)}$  – недопустимое значение вероятности ошибки для класса  $\Omega_l$ .

Задача проверки гипотезы об отсутствии циклического структурного изменения, приводящего к изменению состояния системы, формулируется следующим образом: в состоянии системы  $\Omega_l$  по серии наблюдений  $D_j$  ( $j=1, \dots, \gamma$ ) для заданного значения вероятности ошибки первого рода  $\alpha_0$  ( $0 < \alpha_0 < 0,5$ ) проверить гипотезу

$$H_0 : r^{(l)} = r_0^{(l)} \text{ при альтернативе } H_1 : r^{(l)} = r_1^{(l)} > r_0^{(l)}. \quad (7)$$

Имеет место следующая интерпретация гипотез в (7). Если доля решений в пользу альтернативного класса состояния системы  $\Omega_{1-l}$  соответствует вероятности ошибки решающего правила для класса  $\Omega_l$ , то гипотеза  $H_0$  не отклоняется и, следовательно, нет оснований предполагать наличие смены состояния на тестируемом отрезке временного ряда. В этом случае считается, что момент переключения состояния  $\tau > jm$  и осуществляется переход к тестированию следующей  $(j+1)$ -й серии. Если доля решений в пользу альтернативного класса больше условной вероятности ошибки решающего правила для класса  $\Omega_l$ , то это может быть следствием перехода системы из состояния  $\Omega_l$  в альтернативное состояние  $\Omega_{1-l}$  в момент времени  $\bar{\tau} \in [(j-1)m+1, \dots, jm]$ . В этом случае гипотеза  $H_0$  отклоняется.

5. Выявление ложных сигналов» о смене класса состояния системы. Как отмечалось ранее, в ходе поточечной классификации временных рядов возможно появление «ложных сигналов» о смене класса состояния системы. В рамках предлагаемой процедуры сигнал о смене состояния  $\Omega_l$  на  $\Omega_{1-l}$  в некоторый момент времени  $\tau$  считается ложным, если при тестировании очередной серии наблюдений было принято решение о возврате системы из состояния  $\Omega_{1-l}$  в состояние  $\Omega_l$ . Такие изменения состояния системы называются *случайными краткосрочными колебаниями*. В противном случае при сохранении нового состояния системы  $\Omega_{1-l}$  в течение двух и более серий момент времени  $\tau$  считается истинным моментом смены класса состояния (моментом циклического структурного изменения). Таким образом, в одной серии наблюдений длины  $m$  ( $m \ll T$ ) не может быть более одного циклического структурного изменения, что исключает зависимость классов состояний внутри серий и дает возможность использовать решающее правило (3) поточечной классификации для случая независимых переключений состояний сложной системы.

### 2.3. Статистический критерий циклических структурных изменений

Сформулируем статистический критерий для решения задачи (7). Обозначим через  $B(r_0^{(l)}, m, 1-\alpha_0)$  квантиль уровня  $1-\alpha_0$  биномиального закона распределения с параметрами  $m, r_0^{(l)}$ .

**Теорема.** Если тестируемый временной ряд  $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{R}^n$  ( $t=1, \dots, T$ ) описывается моделью RS-VARX (1), M.1–M.4 в предположениях d.1 или d.2, а описанный выше алгоритм тестирования циклических структурных изменений удовлетворяет следующим условиям: 1) для поточечной классификации наблюдений  $\{\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t\}$  ( $t=1, \dots, T$ ) используется ПБРП вида (3) для независимых классов состояний с условными вероятностями ошибок  $\{r_0^{(l)}\}$  ( $l \in S(2)$ ); 2) серии наблюдений  $\mathbf{D}_j = (d_{(j-1)m+1}, \dots, d_{jm})' \in \mathcal{R}^m$  ( $j=1, \dots, \gamma$ ) имеют длину  $m$  ( $p+1 < m \ll T$ ), исключая возможность существования нескольких циклических структурных изменений

внутри серии, то статистический критерий проверки гипотез  $H_0, H_1$  вида (7), имеющий заданный размер  $\alpha_0$ , формулируется следующим образом:

$$\text{гипотеза } H_0 \begin{cases} \text{не отклоняется, если } k_j^{(l)}(m) < B(r_0^{(l)}, m, 1 - \alpha_0); \\ \text{отклоняется, если } k_j^{(l)}(m) \geq B(r_0^{(l)}, m, 1 - \alpha_0). \end{cases} \quad (8)$$

Доказательство. Число ошибочных решений  $k_j^{(l)}(m) \in \{0, 1, \dots, m\} (l \in S(2))$  при оценке состояния системы по серии  $\mathbf{D}_j (j=1, \dots, \gamma)$  соответствует числу наступлений некоторого события в серии из  $m$  независимых экспериментов при условии, что вероятность наступления события равна некоторой величине  $r^{(l)}$ . Это означает, что при верной гипотезе  $H_0$  случайная величина  $k_j^{(l)}(m) \in \{0, 1, \dots, m\}$  имеет биномиальный закон распределения с параметрами  $m, r_0^{(l)}$  ( $l \in S(2)$ ). Тогда задача (7) заключается в проверке гипотезы  $H_0$  о значении параметра биномиального закона распределения при простой альтернативе  $H_1$  по серии наблюдений длиной  $m$ . В этом случае в соответствии с определением квантиля уровня  $1 - \alpha_0$  распределения случайной величины  $k_j^{(l)}(m)$  получаем

$$\mathbf{P}\{k_j^{(l)}(m) \leq B(r_0^{(l)}, m, 1 - \alpha_0) | H_0\} = \mathbf{P}\{H_0 | H_0\} = 1 - \alpha_0,$$

откуда следует, что размер критерия (7) равен  $\mathbf{P}\{H_1 | H_0\} = \alpha_0$ . ■

**Следствие 1.** Для заданного значения  $1 - \beta_0$  мощности критерия (8) длина серии  $m$  находится из уравнения

$$\pi(m) = 1 - \mathbf{P}\{H_0 | H_1\} = \mathbf{P}\{H_1 | H_1\} = \mathbf{P}\{k_j^{(l)}(m) \geq B(r_0^{(l)}, m, 1 - \alpha_0) | H_1\} = 1 - \beta_0. \quad (9)$$

Доказательство. Формула (9) следует из определения мощности критерия. ■

Для вычисления квантилей биномиального закона могут применяться как точные формулы, основанные на использовании бета-распределения [11], так и приближенные формулы, для получения которых применяются различные аппроксимации биномиального распределения. На практике часто удобнее использовать аппроксимацию биномиального распределения нормальным законом. В этом случае асимптотическое распределение случайной величины  $k_j^{(l)}(m) (j=1, \dots, \gamma)$  вида (6) при  $m \rightarrow \infty$  и верной нулевой гипотезе в (7) согласно формуле Муавра – Лапласа удовлетворяет следующему соотношению [12]:

$$\mathbf{P}\{k_j^{(l)}(m) \leq k/m | H_0\} = \sum_{h=0}^k \binom{m}{h} (r_0^{(l)})^h (1 - r_0^{(l)})^{m-h} = \Phi\left(\frac{k/m - r_0^{(l)} + c}{\sqrt{r_0^{(l)}(1 - r_0^{(l)})/m}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right), \quad (10)$$

где  $\Phi(\cdot)$  – функция распределения стандартного нормального закона.

**Следствие 2.** Если используется аппроксимация (10) биномиального закона нормальным распределением, для критерия (8) справедливо представление

$$\text{гипотеза } H_0 \begin{cases} \text{не отклоняется, если } k_j^{(l)} < k^{(l)}; \\ \text{отклоняется, если } k_j^{(l)} \geq k^{(l)}, \end{cases} \quad (11)$$

где для заданных значений  $\alpha_0, \beta_0 (0 < \alpha_0, \beta_0 < 0,5)$  статистика критерия  $k_j^{(l)}$  вычисляется согласно (6), пороговое значение  $k^{(l)}$  критерия находится из ограничения на вероятность ошибки первого рода  $\mathbf{P}(H_1 | H_0) = \mathbf{P}(d_l = 1 - l | d_l^0 = l) = \alpha_0$  и имеет вид

$$k^{(l)} = r_0^{(l)} + \frac{0,5}{m} + \Phi^{-1}(1 - \alpha_0) \frac{\sigma_0}{\sqrt{m}}, \quad \sigma_0 = \sqrt{r_0^{(l)}(1 - r_0^{(l)})}; \quad (12)$$

длина серии  $m$ , необходимая для достижения требуемого значения мощности критерия  $\pi(m) = 1 - \mathbf{P}(H_0 | H_1) = 1 - \mathbf{P}(d_i = l | d_i^0 = 1 - l) = 1 - \beta_0$  при заданном значении  $r_1^{(l)}$ , определяется по формуле

$$m = \left( \frac{\sigma_0 \Phi^{-1}(1 - \alpha_0) + \sigma_1 \Phi^{-1}(1 - \beta_0)}{\rho} \right)^2, \quad \sigma_i = \sqrt{r_i^{(l)}(1 - r_i^{(l)})} (i = 0, 1), \quad \rho = r_1^{(l)} - r_0^{(l)}. \quad (13)$$

Доказательство. С учетом введенных обозначений при использовании аппроксимации (10) выражения (11)–(13) непосредственно следуют из (8) и (9) согласно [12]. ■

Нормальная аппроксимация вида (10) биномиального распределения имеет скорость сходимости  $O(1/\sqrt{m})$  и, как отмечается в [11], является удовлетворительной в смысле точности вычисления значений функции распределения, если  $mr^{(l)}(1 - r^{(l)}) \geq 9$ . В то же время, как показывает экспериментальное исследование предлагаемых алгоритмов [2], нормальная аппроксимация биномиального распределения обеспечивает приемлемую точность вычисления характеристик в контексте решаемой задачи в условиях структурных изменений, приводящих к существенным различиям в значениях параметров модели для различных классов состояний.

#### 2.4. Задание и интерпретация управляемых параметров

Пусть в алгоритме тестирования структурных изменений используется ПБРП с оценками условных вероятностей ошибок  $\{\tilde{r}_0^{(l)}\} (l \in \{0, 1\})$  по обучающим выборкам объема  $\{T_l^L\} (l \in S(L))$ . Выбор значений управляемых параметров описанной выше процедуры основывается на минимаксной стратегии, в соответствии с которой

$$r_0^{(l)} = \begin{cases} \tilde{r}_0^{(l)}, & \text{если } T_l^L > 500, \\ \delta_l^+(q, T_l^L), & \text{если } T_l^L \leq 500; \end{cases} \quad r_1^{(l)} = \begin{cases} 1 - \tilde{r}_0^{(1-l)}, & \text{если } T_{1-l}^L > 500, \\ 1 - \delta_{1-l}^+(q, T_{1-l}^L), & \text{если } T_{1-l}^L \leq 500, \end{cases} \quad (14)$$

где  $[\delta_l^-(q, T_l^L), \delta_l^+(q, T_l^L)] (l \in \{0, 1\})$  – доверительные интервалы с доверительной вероятностью  $q$  для условных вероятностей ошибок ПБРП  $\{r_0^{(l)}\}: \mathbf{P}\{r_0^{(l)} \in [\delta_l^-(q, \tilde{T}_l), \delta_l^+(q, \tilde{T}_l)]\} = q$ . Для вычисления границ доверительных интервалов в случае аппроксимации (10) удобно применять приближенную формулу [11]

$$\delta_l^\mp(q, \tilde{T}_l) = \frac{1}{\tilde{T}_l + \phi_q^2} \times \left( k_l + \frac{\phi_q^2}{2} \mp \phi_q \sqrt{\frac{k_l(\tilde{T}_l - k_l) + \phi_q^2}{\tilde{T}_l} + \frac{\phi_q^2}{4}} \right) (l \in S(L)), \quad (15)$$

где  $k_l$  – число ошибок при поточечной классификации  $\tilde{T}_l$  наблюдений из класса  $\Omega_l$ ;  $\phi_q \equiv \Phi^{-1}(q)$  – квантиль стандартного нормального распределения уровня  $q$ .

В контексте рассматриваемой проблемы параметры  $\alpha_0, \beta_0$  имеют важную содержательную интерпретацию. Размер  $\alpha_0$  критерия (8) определяет среднюю длину серий (СДС) наблюдений между ложными сигналами о структурном изменении  $L_0 = 1/\alpha_0$ , а значение  $1 - \beta_0$  мощности данного критерия – среднее число серий наблюдений, необходимое для обнаружения структурного изменения, если оно наступило,  $L_1 = 1/(1 - \beta_0)$ . Таким образом, параметры  $\alpha_0, \beta_0$  задают ограничения соответственно на число ложных сигналов о структурном изменении и скорость обнаружения структурного изменения, определяемую необходимыми для этого значениями СДС. Параметр  $q$  существенно влияет на ширину доверительного интервала (15) и согласно (13) – на длину серии  $m$ : чем больше  $q$ , тем больше значение  $m$ . Очевидно, большие значения  $m$  могут приводить к более позднему обнаружению структурного изменения в реальном времени. Для рассматриваемых задач целесообразными представляются значения  $L_0 \in \{10, 20\}, L_1 \in \{1, 05; 1, 1\}, q \in \{0, 95; 0, 975\}$ .



### 3. Результаты компьютерного моделирования

Для описания циклических изменений временных рядов  $\mathbf{y}_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{z}'_t)' \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_t = (x_{ij}) \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{R}^N$ ,  $\mathbf{z}_t = (z_{ik}) \in \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^M$  ( $n = N + M$ ,  $t = 1, \dots, T$ ) используется модель MS-VARX с двумя ( $L = 2$ ) чередующимися классами состояний  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ , которым соответствуют рост и снижение значений анализируемых эндогенных переменных. В задачах анализа циклических изменений экономических систем указанные состояния интерпретируются как фазы роста и спада экономического цикла. Предполагается, что смена состояний происходит в случайные моменты времени  $\{\tau_i\}$  ( $i = 1, \dots, s$ ), причем количество  $s$  циклических структурных изменений, приводящих к смене состояния системы, априори неизвестно. Для классификации временных рядов  $\{y_t\}$  используется алгоритм EM MS-VARX [10].

Приведем результаты численных экспериментов, целью которых является исследование эффективности предлагаемого метода тестирования циклических структурных изменений на тестовых модельных данных.

#### 3.1. Описание тестовых модельных данных

Рассматриваются модели MS-VARX вида (1) с циклическими структурными изменениями в матрице регрессионных коэффициентов. При статистическом моделировании тестовых данных предполагается, что вектор экзогенных переменных  $\mathbf{z}_t = (z_{ij}) \in \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^M$  является случайным и имеет равномерное распределение в области  $\mathfrak{Z} = Z^M \in \mathfrak{R}^M$ ,  $Z = [1, 10]$ . Рассматриваются различные варианты спецификации модели MS-VARX, различающиеся сложностью задачи обнаружения структурных изменений. Степень сложности задачи характеризуется значением межклассового расстояния  $\Delta(\tilde{\mathbf{z}}) = \sqrt{\tilde{\mathbf{z}}'(B_1 - B_0)' \Sigma^{-1} (B_1 - B_0) \tilde{\mathbf{z}}}$ ,  $\tilde{\mathbf{z}} = (5,5; 5,5; 5,5)'$ , и параметром ОЦМ  $\omega$ . В работе [10] было показано, что, если  $\Delta(\tilde{\mathbf{z}}) \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0,5$ , задача классификации усложняется и точность алгоритма классификации EM MS-VARX снижается. С учетом этих особенностей используются девять тестовых примеров, определяемых следующими наборами параметров модели:

- размерность модели:  $L = 2$ ,  $N = 2$ ,  $M = 3$ ; число оцениваемых параметров 29;
- матрицы параметров VARX и переходных вероятностей:

$$A_1 = A_0 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, \Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};$$

- матрицы коэффициентов регрессии:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = B_0 + H,$$

$$1) H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2) H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3) H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. структурное изменение касается только параметров второго уравнения.

В табл. 1 для вариантов модели, определяемых матрицей  $H$ , приводятся значения межклассового расстояния  $\Delta(\tilde{\mathbf{z}})$ , условных вероятностей ошибок классификации  $r_0(\tilde{\mathbf{z}})$  для БРП, не учитывающего марковскую зависимость номеров классов состояний, а также ожидаемое число «ложных сигналов» на 1000.

Таблица 1

Характеристики сложности задачи классификации

Вариант	$\Delta(\tilde{\mathbf{z}})$	$r_0(\tilde{\mathbf{z}})$	Ожидаемое число «ложных сигналов»
1	1,23	0,269	269
2	2,46	0,109	109
3	4,92	0,007	7

### 3.2. Тестирование моментов смены состояний

Для каждого варианта модели используются по три тестовых примера (ТП), различающихся значениями параметра ОЦМ  $\{d_t\}(t=1,\dots,T)$ :  $\omega \in \{0,02; 0,05; 0,1\}$ . В табл. 2 приведены вычисленные по обучающим реализациям временных рядов длиной  $T_0^L = T_1^L = 300$  точечные оценки условных вероятностей ошибок  $\{\hat{r}_0^{(l)}\}(l \in \{0, 1\})$  и границы доверительных интервалов (15) для доверительной вероятности  $q=0,95$ . Полученные оценки применяются для расчета длин серий и пороговых значений критериев. При вычислении пороговых значений критерия (8), а также длины серий  $m$  полагается  $\alpha_0=0,05$  ( $L_0=20$ ),  $\beta_0=0,1$  ( $L_1=1,1$ ). В формулах (12), (13) им соответствуют значения квантилей стандартного нормального распределения:  $\Phi^{-1}(0,95)=1,64$ ,  $\Phi^{-1}(0,9)=1,29$ . Результаты расчетов представлены в табл. 3.

Таблица 2  
Оценки вероятностей ошибок и числа циклических структурных изменений

Тестовый пример	$\delta_0^-$	$\hat{r}_0^{(0)}$	$\delta_0^+$	$\delta_1^-$	$\hat{r}_0^{(1)}$	$\delta_1^+$
$\omega = 0,02, T^E = 200, s = 5$						
1.1	0,023	0,041	0,067	0,009	0,025	0,055
2.1	0,000 07	0,003	0,015	0,050	0,017	0,043
3.1	0,000 07	0,003	0,015	0,000	0,000	0,016
$\omega = 0,05, T^E = 300, s = 12$						
1.2	0,056	0,084	0,012	0,033	0,057	0,091
2.2	0,003	0,012	0,032	0,002	0,011	0,031
3.2	0,0008	0,006	0,022	0,020	0,004	0,002
$\omega = 0,1, T^E = 100, s = 11$						
1.3	0,129	0,174	0,226	0,038	0,061	0,091
2.3	0,009	0,024	0,051	0,018	0,035	0,060
3.3	0,002	0,012	0,034	0,000 07	0,003	0,016

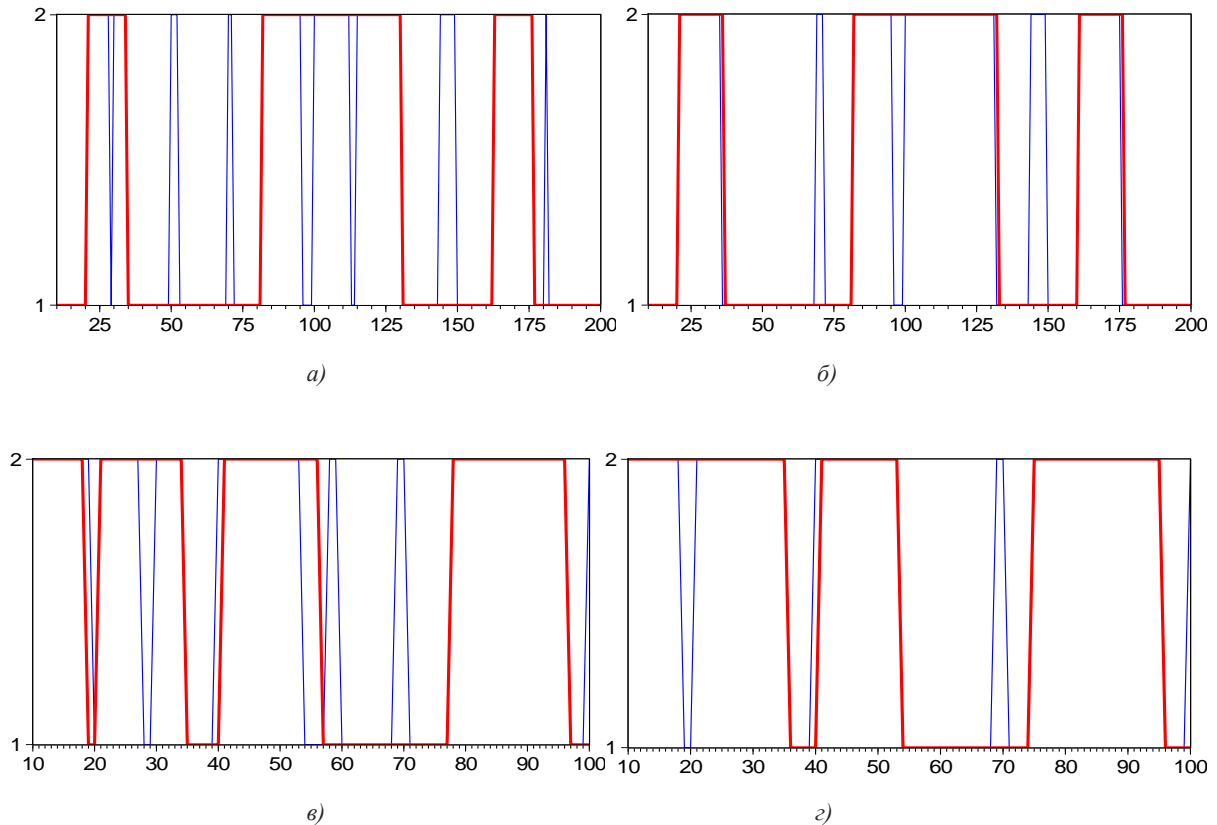
Таблица 3  
Расчет длины серии и порогового значения критерия (текущее состояние  $\Omega_0$ )

Тестовый пример	$r_0^{(0)} \equiv \delta_0^+$	$r_1^{(0)} \equiv 1 - \delta_1^+$	$\rho$	$\sigma_0$	$\sigma_1$	$[m]+1$	$\kappa_+^1$
$\omega = 0,02, T^E = 200, s = 5$							
1.1	0,067	0,945	0,878	0,25	0,227	4	0,398
2.1	0,015	0,957	0,942	0,122	0,202	4	0,241
3.1	0,015	0,984	0,969	0,122	0,124	4	0,241
$\omega = 0,05, T^E = 300, s = 12$							
1.2	0,121	0,909	0,788	0,325	0,288	4	0,513
2.2	0,032	0,969	0,937	0,175	0,173	4	0,301
3.2	0,022	0,980	0,958	0,148	0,139	4	0,269
$\omega = 0,1, T^E = 100, s = 11$							
1.3	0,226	0,909	0,683	0,418	0,288	4	0,696
2.3	0,051	0,940	0,889	0,220	0,237	4	0,357
2.4	0,034	0,984	0,950	0,182	0,125	4	0,309

Анализ условных вероятностей ошибок ПБРП  $\hat{r}_0^{(l)}(l \in \{0, 1\})$  из табл. 3, полученных для различных вариантов значений  $\Delta(\bar{z})$  и  $\omega$ , подтверждает установленную в [10] закономерность: снижение точности классификации при уменьшении межклассового расстояния и ослаблении

зависимости классов наблюдений. В то же время наличие марковской зависимости номеров классов обуславливает достаточно малые значения межклассовых расстояний и минимально допустимую длину серий во всех рассматриваемых экспериментах.

На рисунке показаны результаты работы предлагаемого алгоритма тестирования моментов структурных изменений для четырех из описанных выше тестовых примеров, имеющих место при  $\Delta(\tilde{z}) \in \{2,46; 4,92\}$  и  $\omega \in \{0,05; 0,1\}$ . По оси абсцисс откладывается порядковый номер наблюдения  $t$  ( $t=1, \dots, T^E$ ), а по оси ординат – переменные  $\hat{d}_t + 1, \tilde{d}_t + 1$  ( $t=1, \dots, T^E$ ), указывающие на класс состояний сложной системы.



Результаты тестирования моментов структурных изменений:

- а) ТП 2.2:  $\Delta(\tilde{z}) = 2,46$ ,  $\omega = 0,05$ ,  $\hat{s} = 22$ ,  $\tilde{s} = 6$ ; б) ТП 3.2:  $\Delta(\tilde{z}) = 4,92$ ,  $\omega = 0,05$ ,  $\hat{s} = s = 12$ ,  $\tilde{s} = 6$ ;  
 в) ТП 2.3:  $\Delta(\tilde{z}) = 2,46$ ,  $\omega = 0,1$ ,  $\hat{s} = 15$ ,  $\tilde{s} = 6$ ; г) ТП 3.3:  $\Delta(\tilde{z}) = 4,92$ ,  $\omega = 0,1$ ,  $\hat{s} = s = 11$ ,  $\tilde{s} = 6$

Тонкие линии на графиках соответствуют значениям номеров классов  $\{\hat{d}_t\}$ , полученных с помощью алгоритма EM MS-VARX, жирные линии – номерам классов состояний  $\{\tilde{d}_t\}$  ( $t=1, \dots, T^E$ ) после исключения краткосрочных колебаний с помощью предлагаемого алгоритма тестирования. Значения переменных  $\hat{s}$  и  $\tilde{s}$  указывают на число структурных изменений до и после исключения краткосрочных колебаний.

## Заключение

Модели с циклическими переключениями состояний семейства RS-VARX в настоящее время применяются для анализа экономических циклов и циклических изменений в экономических системах, вызванных шокowymi воздействиями. Предлагаемые в статье алгоритмы классификации и тестирования моментов переключения состояний моделируемой системы позволяют отличать краткосрочные колебания в состоянии системы от долгосрочных циклических изменений. В основе алгоритмов лежат подстановочное байесовское решающее правило

поточечной классификации и статистический критерий проверки гипотезы о значении ожидаемой вероятности ошибки классификации.

### Список литературы

1. Харин, Ю.С. Эконометрическое моделирование / Ю.С. Харин, В.И. Малюгин, А.Ю. Харин. – Минск : БГУ, 2003. – 318 с.
2. Малюгин, В.И. Методы анализа многомерных эконометрических моделей с неоднородной структурой / В.И. Малюгин. – Минск : БГУ, 2014. – 351 с.
3. Perron, P. Dealing with structural breaks / P. Perron // *Palgrave handbook of econometrics*. – Vol. 1: *Econometric Theory*. – Basingstoke : Palgrave Macmillan, 2006. – P. 278–352.
4. Hamilton, J.D. Regime switching models / J.D. Hamilton // *New Palgrave Dictionary of Economics*. – 2nd edition. – Basingstoke : Palgrave Macmillan, 2008. – P. 1755–1804.
5. Krolzig, H.-M. Markov switching vector autoregressions. Modelling statistical inference and application to business cycle analysis / H.-M. Krolzig. – Berlin : Springer, 1997. – 166 p.
6. Hamilton, J.D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle / J.D. Hamilton // *Econometrica*. – 1989. – Vol. 57(2). – P. 357–384.
7. Малюгин, В.И. Об оптимальности классификации случайных наблюдений, различающихся уравнениями регрессии / В.И. Малюгин, Ю.С. Харин // *Автоматика и телемеханика*. – 1986. – № 7. – С. 61–69.
8. Малюгин, В.И. Дискриминантный анализ многомерных авторегрессионных моделей с неоднородной структурой / В.И. Малюгин // *Известия НАН Беларуси. Сер. 1: Физ. Мат. Информ.* – 2013. – № 3. – С. 43–53.
9. Малюгин, В.И. Статистический анализ смесей распределений регрессионных наблюдений / В.И. Малюгин // *Информатика*. – 2008. – № 4(20). – С. 79–88.
10. Малюгин, В.И. Анализ многомерных статистических моделей с неоднородной структурой в случае скрытой марковской зависимости состояний / В.И. Малюгин, А.Ю. Новопольцев // *Известия НАН Беларуси. Сер. 1: Физ. Мат. Информ.* – 2015. – № 2. – С. 26–36.
11. Большев, Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.
12. Браунли, К.А. Статистический анализ и методология в науке и технике / К.А. Браунли. – М. : Наука, 1977. – 407 с.

Поступила 31.07.2015

*НИИ прикладных проблем математики  
и информатики Белорусского  
государственного университета,  
Минск, пр. Независимости, 4  
e-mail: Malugin@bsu.by*

**V.I. Malugin**

### **TESTING OF CYCLIC STRUCTURAL CHANGES IN SWITCHING REGIME VECTOR AUTOREGRESSIVE MODELS**

For vector autoregressive models RS-VARX with cyclic regime switching of states the method of excluding of short-term system state fluctuations is proposed. The method is based on a sequential application of two algorithms, realizing the Bayesian “plug-in” decision rule of point wise classification and a statistical test for expected probability of misclassification. Accuracy of the approach is examined by means of computer simulation experiments.