

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.8; 517.958

Г.Ф. Громько<sup>1</sup>, В.Т. Ерофеев<sup>2</sup>, Г.М. Заяц<sup>1</sup>ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ  
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПЛЕНОЧНОМ ЭКРАНЕ

*Разрабатывается численный метод решения краевой задачи для нелинейного уравнения магнитостатики, описывающей проникновение постоянного внешнего магнитного поля через цилиндрическую пленочную оболочку. Изучается математическая модель задачи экранирования, основанная на использовании граничных условий третьего рода на поверхности пленки. Нелинейная зависимость магнитной проницаемости пленки от напряженности магнитного поля согласовывается с экспериментальными данными. Численно исследуется распределение напряженности магнитного поля в слое пленки и магнитной проницаемости материала пленки в зависимости от величины напряженности внешнего магнитного поля.*

**Введение**

В настоящее время в современной технике разрабатываются электронные устройства, которые, как правило, чувствительны к воздействию внешних электромагнитных полей, в частности магнитостатических полей. В связи с этим актуальной является проблема электромагнитной совместимости технических систем и защиты приборов от внешних электромагнитных воздействий [1–3]. Для решения этой проблемы используются тонкостенные экраны и покрытия различной геометрии из специальных материалов. Как правило, для исследования экранирующих свойств экранов методами аналитического моделирования [4] рассматривают экраны геометрически правильной формы [5–7]. Важнейшую роль в математическом моделировании экранов играют численные методы решения краевых задач экранирования [8]. Также проводят натурные эксперименты по измерению коэффициентов эффективности экранирования полей экранами типовых геометрий [9, 10]. Большинство научных публикаций по проблемам экранирования связано с экранами, выполненными из материалов с постоянными магнитной и диэлектрической проницаемостями. Экспериментально установлено, что при увеличении внешнего поля эффективность экранирования возрастает, а в дальнейшем при сильных внешних полях падает [10]. Известно, что для эффективных экранов магнитная проницаемость нелинейно зависит от напряженности магнитного поля [11, 12]. Это требует изучения влияния нелинейных эффектов на прохождение полей через экран.

Целью настоящей работы является численное исследование поведения магнитной проницаемости материала пленки – основного параметра, обеспечивающего эффективность экрана, в зависимости от величины внешнего магнитного поля.

**1. Постановка задачи экранирования**

В пространстве  $R^3$  с цилиндрической системой координат  $O\rho\varphi z$  размещен цилиндрический экран  $D(R_1 < \rho < R_2, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty)$  толщиной  $\Delta = R_2 - R_1$ , ограниченный цилиндрическими поверхностями  $\Gamma_1 (\rho = R_1)$ ,  $\Gamma_2 (\rho = R_2)$  (рис. 1). Экран выполнен из материала  $Fe_{20}Ni_{80}$  с относительной магнитной проницаемостью  $\mu \approx 10^3 \div 10^4$ . Внутри экрана в области  $D_1 (0 \leq \rho < R_1)$  и вне экрана в области  $D_2 (\rho > R_2)$  – вакуум ( $\mu = 1$ ). Из области  $D_2$  на экран воздействует первичное магнитное поле  $\mathbf{H}_0 = -H_0 \mathbf{e}_x$ ,  $H_0 = \text{const}$ . В результате

взаимодействия образуются следующие поля:  $\mathbf{H}_1$  – поле в  $D_1$ ,  $\mathbf{H}$  – поле в слое экрана  $D$ ,  $\mathbf{H}'_2$  – отраженное поле в  $D_2$ ,  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'_2$  – суммарное поле в  $D_2$ .

Магнитные поля выразим через потенциальные функции  $u_1, u, u'_2, u_0, u_2 = u_0 + u'_2$ :  $\mathbf{H}_j = -\text{grad } u_j$ ,  $j=1, 2$ ;  $\mathbf{H}_0 = -\text{grad } u_0$ ;  $\mathbf{H} = -\text{grad } u$ ,  $u_0 = H_0 \rho \cos \varphi$ . Потенциалы определим, решая краевую задачу магнитостатики.

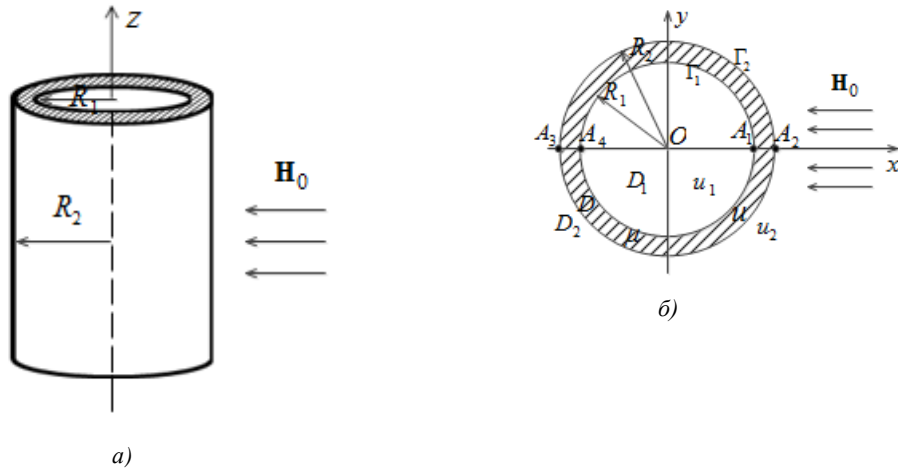


Рис. 1. Цилиндрический экран:  
а) пленочный экран под воздействием постоянного магнитного поля; б) сечение экрана

*Краевая задача 1.* Для заданного потенциала  $u_0$  требуется определить потенциалы  $u_1, u, u'_2$ , которые удовлетворяют:

– уравнениям [4, с. 15]

$$\Delta u_j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u_j}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial \varphi^2} = 0 \text{ в } D_j \quad (j=1, 2), \quad u_2 = u_0 + u'_2; \quad (1)$$

$$\text{div}(\mu \text{grad } u) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \mu \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\mu}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0 \text{ в } D, \quad (2)$$

$$\mu = \mu \left( \rho, \varphi, \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right);$$

– граничным условиям сопряжения на поверхностях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  [4, с. 185]

$$u|_{\rho=R_1} = u_1|_{\rho=R_1}, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1} = \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_1}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad (3)$$

$$u|_{\rho=R_2} = (u_0 + u'_2)|_{\rho=R_2}, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_2} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial \rho} + \frac{\partial u'_2}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=R_2}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad (4)$$

– условию на бесконечности

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u'_2 = 0. \quad \blacksquare \quad (5)$$

Решение задачи заключается в численном исследовании поведения магнитного поля в слое экрана  $D$ . Для определения потенциала  $u(M)$ ,  $M \in D$ , сформулируем краевую задачу для области  $D$  с использованием классических граничных условий третьего рода на поверхностях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , которые в рамках рассматриваемой математической модели краевой задачи (1)–(5) следуют из граничных условий (3), (4) с точностью до величины  $1/\rho^n$ ,  $n=2, 3, \dots$  ( $\rho \rightarrow \infty$ ) в области  $D_2$ . В результате такой формулировки поле в области  $D_2$  исключается из рассмотрения.

*Краевая задача 2.* При заданном внешнем магнитном поле  $H_0$  требуется определить потенциал  $u$  в области  $D$ , который удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \mu \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad \text{в } D; \quad (6)$$

$$\left( R_1 \mu \frac{\partial u}{\partial \rho} - u \right) \Big|_{\rho=R_1} = 0, \quad \left( R_2 \mu \frac{\partial u}{\partial \rho} + u \right) \Big|_{\rho=R_2} = 2H_0 R_2 \cos \varphi, \quad (7)$$

где  $\mu = \mu(|\text{grad } u(\rho, \varphi)|)$ . ■

## 2. Преобразование расчетной области краевой задачи

Величины задачи имеют физические размерности в системе СИ:  $[\rho, R_1, R_2, \Delta] = \text{м}$ ,  $[H, H_0] = \frac{\text{А}}{\text{м}}$ ,  $[u] = \text{А}$ ,  $[\mu] = 1$ . Для численной реализации задачи произведем ряд замен, полагая  $\mu = 10^3 \bar{\mu}$ ,  $H_0 = 10^2 \bar{H}_0$ ,  $H = 10^2 \bar{H}$ ,  $\Delta = 10^{-3} h$ ,  $R_2 = 10^{-2} R$ , где  $h$  – толщина экрана, мм;  $R$  – внешний радиус цилиндрического экрана, см;  $\bar{\mu}$  – нормированная относительная магнитная проницаемость,  $H = |\mathbf{H}| = |\text{grad } u|$ .

Введем новые координаты  $x, y$ :

$$\varphi = y, \quad \rho = (R_2 - R_1)x + R_1 = \Delta(x + \bar{\alpha}), \quad (8)$$

где  $\bar{\alpha} = \alpha - 1$ ,  $\alpha = \frac{R_2}{\Delta} = 10 \frac{R}{h}$ .

Преобразуем задачу (6), (7) в задачу для полукольца  $\bar{D}(R_1 \leq \rho \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq \pi)$ , используя симметрию функции  $u$  и дополнительные граничные условия. На отрезках  $A_1 A_2$  и  $A_3 A_4$  (рис. 2, а) справедливы условия

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi} = 0. \quad (9)$$

Записывая уравнение (6) и граничные условия (7), (9) в новых переменных (8), сформулируем краевую задачу.

Краевая задача 3. Требуется определить потенциал  $u$  в области  $\Omega(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi)$  (рис. 2, б) при заданных  $R, h, \bar{H}_0$ , который удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( B \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi; \quad (10)$$

$$\left( 10^3 (\alpha - 1) \bar{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} - u \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad (11)$$

$$\left( 10^3 \alpha \bar{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} + u \right) \Big|_{x=1} = 2 \bar{H}_0 R \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\pi} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (12)$$

где  $A = (x + \bar{\alpha}) \bar{\mu}(\bar{H})$ ,  $B = \frac{1}{(x + \bar{\alpha})} \bar{\mu}(\bar{H})$ . ■

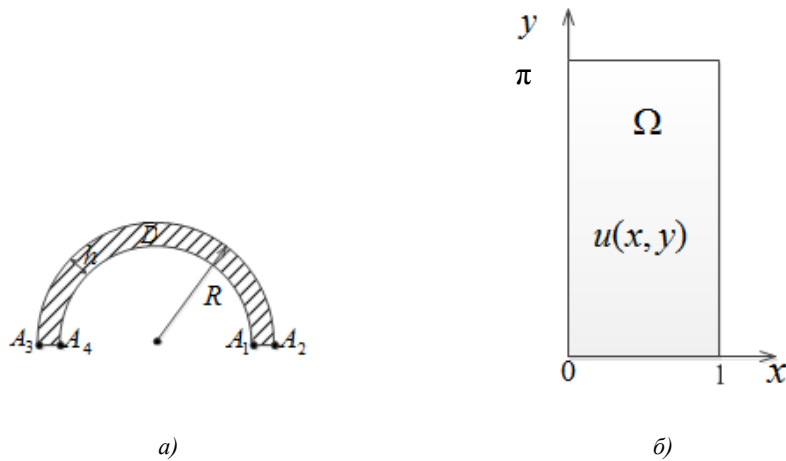


Рис. 2. Расчетная область:

а) полукольцо  $A_1 A_2 A_3 A_4$ ; б) полукольцо в преобразованных координатах

Зависимость магнитной проницаемости от магнитного поля с учетом экспериментальных данных [10] зададим формулой

$$\bar{\mu}(\bar{H}) = \frac{B_m(h) \bar{H} + C_1(h)}{\bar{H}^2 + C_2(h) \bar{H} + C_1(h)}, \quad 0 < h < 0,2, \quad (13)$$

где

$$C_1(h) = \frac{M(h) H_m^2(h)}{M(h) - 1}, \quad C_2(h) = \frac{B_m(h)}{M(h)} - 2H_m(h),$$

$$B_m(h) = 269,21679 \cdot h^2 - 100,3814 \cdot h + 12,346025,$$

$$H_m(h) = 13,461364 \cdot h^2 - 5,0167164 \cdot h + 0,6173063,$$

$$M(h) = 40,386796 \cdot h^2 + 9,94182 \cdot h + 7,80194;$$

$$\bar{H} = \frac{10}{h} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{(x+\bar{\alpha})^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}. \quad (14)$$

Здесь  $\bar{\mu}(H_m(h)) = M(h)$  – максимальное значение магнитной проницаемости (13) для экрана толщиной  $h$ ,  $H_m(h)$  – точка достижения максимума функции (13) для экрана толщиной  $h$ . Для  $h=0,1$  имеем  $B_m = 5$ ,  $H_m = 0,25$ ,  $M = 9,3$ .

### 3. Метод численного решения краевой задачи (10)–(14)

Для решения нелинейной задачи (10)–(14) воспользуемся конечно-разностным методом, согласно которому дифференциальные уравнения заменяются дискретными аналогами, полученными на разностной сетке [13].

Предварительно преобразуем граничные условия (11) к виду

$$\left( A \frac{\partial u}{\partial x} - 10^{-3} u \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad (15)$$

$$\left( A \frac{\partial u}{\partial x} + 10^{-3} u \right) \Big|_{x=1} = 2 \cdot 10^{-3} \bar{H}_0 R \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Введем замену переменных  $x = x'$ ,  $y = \pi y'$ . Учитывая (15), рассмотрим следующую задачу (верхний символ ' опустим для упрощения записи): требуется определить потенциал  $u$  в области  $\tilde{\Omega} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  при заданных  $R, h, \bar{H}_0$ , который удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( B \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1; \quad (16)$$

$$\left( A \frac{\partial u}{\partial x} - 10^{-3} u \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (17)$$

$$\left( A \frac{\partial u}{\partial x} + 10^{-3} u \right) \Big|_{x=1} = 2 \cdot 10^{-3} \bar{H}_0 R \cos \pi y, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (18)$$

где  $A = (x + \bar{\alpha}) \bar{\mu} \left( x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ ,  $B = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(x + \bar{\alpha})} \bar{\mu} \left( x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ , а функция  $\bar{\mu}$  определяется формулой (13), в которой

$$\bar{H} = \frac{10}{h} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(x+\bar{\alpha})^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}. \quad (19)$$

В области решения задачи  $\tilde{\Omega}$  построим неравномерную сетку  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_y$ , где  $\bar{\omega}_x = \{x_i \in [0,1], i = 0,1,\dots,N, x_0 = 0, x_N = 1\}$  и  $\bar{\omega}_y = \{y_j \in [0,1], j = 0,1,\dots,M, y_0 = 0, y_M = 1\}$  – неравномерные сетки по направлениям  $x$  и  $y$  соответственно;  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$  – сеточные шаги по соответствующим направлениям;  $(x_i, y_j)$  – узлы сетки  $\bar{\omega}$  (рис. 3, а). Обозначим  $\bar{\Delta x}_i = 0,5(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$  и  $\bar{\Delta y}_j = 0,5(\Delta y_j + \Delta y_{j+1})$ . Значения неизвестной функции  $u(x, y)$  в узлах сетки обозначим через  $u_{i,j}$ , т. е.  $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ ,  $i = \overline{0, N}$ ,  $j = \overline{0, M}$ . Обозначения для разностных производных введем в соответствии с [13].

С помощью метода контрольного объема построим неявную конечно-разностную схему, аппроксимирующую дифференциальное уравнение (16) со вторым порядком точности на введенной сетке. Для этого, проинтегрировав (16) по внутреннему контрольному объему  $[x_{i-0,5}, x_{i+0,5}] \times [y_{j-0,5}, y_{j+0,5}]$ , окружающему сеточный узел  $(x_i, y_j)$  (рис. 3, б),

$$\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} \int_{y_{j-0,5}}^{y_{j+0,5}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( B \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) dx dy = 0$$

и воспользовавшись некоторыми усреднениями на границах контрольного объема, получим разностную схему вида

$$\frac{1}{\Delta x_i} \left( A_{i+0,5,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x_{i+1}} - A_{i-0,5,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x_i} \right) + \frac{1}{\Delta y_j} \left( B_{i,j+0,5} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y_{j+1}} - B_{i,j-0,5} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y_j} \right) = 0, \quad (20)$$

$$i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1}.$$

Граничные условия (17), (18) аппроксимируем со вторым порядком точности, используя уравнение (16).

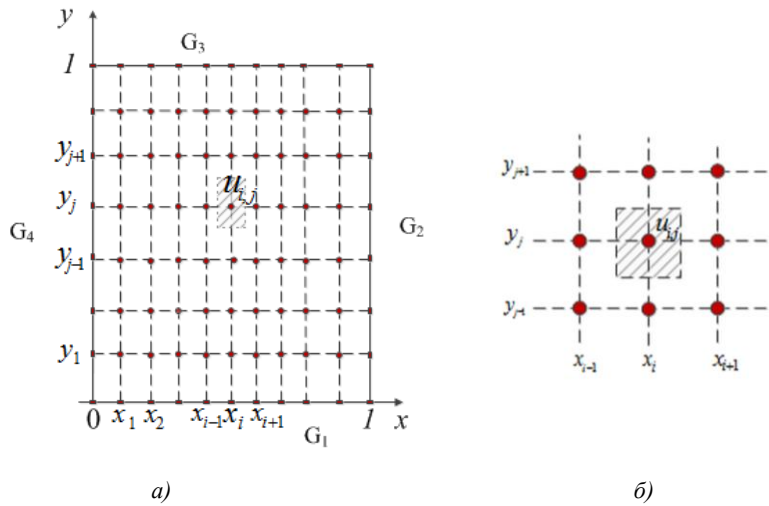


Рис. 3. Вычислительная область: а) сеточная область  $\bar{\omega}$ ; б) фрагмент сетки с контрольным объемом

На границе  $G_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$  построим разностное соотношение

$$B_{i,0,5} \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{(\Delta y_1)^2} + \frac{1}{2\Delta x_i} \left( A_{i+0,5,0} \frac{u_{i+1,0} - u_{i,0}}{\Delta x_{i+1}} - A_{i-0,5,0} \frac{u_{i,0} - u_{i-1,0}}{\Delta x_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, N-1};$$

на границе  $G_2 = \{(x, y) : x = 1, 0 < y < 1\}$  –

$$A_{N-0,5,j} \frac{u_{N,j} - u_{N-1,j}}{(\Delta x_N)^2} - \frac{1}{2\Delta y_j} \left( B_{N,j+0,5} \frac{u_{N,j+1} - u_{N,j}}{\Delta y_{j+1}} - B_{N,j-0,5} \frac{u_{N,j} - u_{N,j-1}}{\Delta y_j} \right) + \frac{10^{-3} u_{N,j}}{\Delta x_N} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{-3} \bar{H}_0 R \cos \pi y_j}{\Delta x_N}, \quad j = \overline{1, M-1}; \quad (21)$$

на границе  $G_3 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 1\}$  –

$$B_{i,M-0,5} \frac{u_{i,M} - u_{i,M-1}}{(\Delta y_M)^2} - \frac{1}{2\Delta x_i} \left( A_{i+0,5,M} \frac{u_{i+1,M} - u_{i,M}}{\Delta x_{i+1}} - A_{i-0,5,M} \frac{u_{i,M} - u_{i-1,M}}{\Delta x_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, N-1};$$

на границе  $G_4 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}$  –

$$A_{0,5,j} \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{(\Delta x_1)^2} + \frac{1}{2\Delta y_j} \left( B_{0,j+0,5} \frac{u_{0,j+1} - u_{0,j}}{\Delta y_{j+1}} - B_{0,j-0,5} \frac{u_{0,j} - u_{0,j-1}}{\Delta y_j} \right) - \frac{10^{-3} u_{0,j}}{\Delta x_1} = 0, \quad j = \overline{1, M-1}.$$

Аппроксимация граничных условий в углах области  $\tilde{\Omega}$  имеет вид:

$$\text{– в узле } (0,0) \quad B_{0,0,5} \frac{u_{0,1} - u_{0,0}}{(\Delta y_1)^2} + A_{0,5,0} \frac{u_{1,0} - u_{0,0}}{(\Delta x_1)^2} - \frac{10^{-3} u_{0,0}}{\Delta x_1} = 0;$$

$$\text{– в узле } (1,0) \quad B_{N,0,5} \frac{u_{N,1} - u_{N,0}}{(\Delta y_1)^2} - A_{N-0,5,0} \frac{u_{N,0} - u_{N-1,0}}{(\Delta x_N)^2} - \frac{10^{-3} u_{N,0}}{\Delta x_N} = -\frac{2 \cdot 10^{-3} \bar{H}_0 R}{\Delta x_N}; \quad (22)$$

$$\text{– в узле } (0,1) \quad B_{0,M-0,5} \frac{u_{0,M} - u_{0,M-1}}{(\Delta y_M)^2} - A_{0,5,M} \frac{u_{1,M} - u_{0,M}}{(\Delta x_1)^2} + \frac{10^{-3} u_{0,M}}{\Delta x_1} = 0;$$

$$\text{– в узле } (1,1) \quad B_{N,M-0,5} \frac{u_{N,M} - u_{N,M-1}}{(\Delta y_M)^2} + A_{N-0,5,M} \frac{u_{N,M} - u_{N-1,M}}{(\Delta x_N)^2} + \frac{10^{-3} u_{N,M}}{\Delta x_N} = -\frac{2 \cdot 10^{-3} \bar{H}_0 R}{\Delta x_N}.$$

В разностной задаче (20)–(22)

$$A_{i+0,5,j} = (x_i + 0,5\Delta x_{i+1} + \bar{\alpha}) \bar{\mu}_{i+0,5,j},$$

где в соответствии с формулами (13), (19)

$$\bar{\mu}_{i+0,5,j} = \frac{B_m \bar{H}_{i+0,5,j} + C_1}{\bar{H}_{i+0,5,j}^2 + C_2 \bar{H}_{i+0,5,j} + C_1}, \quad \bar{H}_{i+0,5,j} = \frac{10}{h} \sqrt{\left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x_{i+1}} \right)^2 + \frac{(u_{cp,y})^2}{\pi^2 (x_i + 0,5\Delta x_{i+1} + \bar{\alpha})^2}}, \quad (23)$$

$$u_{cp,y} = \frac{\tilde{u}_{i+0,5,j+0,5} - \tilde{u}_{i+0,5,j-0,5}}{\Delta y_j}, \quad \tilde{u}_{i+0,5,j+0,5} = \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{4}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1};$$

$$B_{i,j+0,5} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\bar{\mu}_{i,j+0,5}}{x_i + \Delta x_{i+1} + \bar{\alpha}}.$$

Здесь

$$\bar{\mu}_{i,j+0,5} = \frac{B_m \bar{H}_{i,j+0,5} + C_1}{\bar{H}_{i+0,5,j}^2 + C_2 \bar{H}_{i,j+0,5} + C_1}, \quad \bar{H}_{i,j+0,5} = \frac{10}{h} \sqrt{\left(u_{cp,x}\right)^2 + \frac{\left((u_{i,j+1} - u_{i,j}) / \Delta y_{j+1}\right)^2}{\pi^2 (x_i + 0,5 \Delta x_i + \bar{\alpha})^2}}, \quad (24)$$

$$u_{cp,x} = \frac{\tilde{u}_{i+0,5,j+0,5} - \tilde{u}_{i-0,5,j+0,5}}{\Delta x_i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}.$$

Система (20)–(22) является замкнутой системой  $(N+1) \times (M+1)$  нелинейных уравнений относительно неизвестных  $u_{i,j}$ . Ее решение находим с помощью итерационного процесса методом матричной прогонки [14].

Согласно методу матричной прогонки приводим систему (20)–(22) к виду

$$\begin{aligned} C_0^s \mathbf{U}_0 - B_0^s \mathbf{U}_1 &= \mathbf{F}_0, \quad i = 0, \\ -A_i^s \mathbf{U}_{i-1} + C_i^s \mathbf{U}_i - B_i^s \mathbf{U}_{i+1} &= \mathbf{F}_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ -A_N^s \mathbf{U}_{N-1} + C_N^s \mathbf{U}_N &= \mathbf{F}_N, \quad i = N, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $s=0, 1, 2, \dots$  – номер итерации;

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i, \mathbf{F}_i &\text{ – векторы размерности } M+1: \quad \mathbf{U}_i = (u_{i,0}, u_{i,1}, \dots, u_{i,M}), \quad i = \overline{0, N}, \quad \mathbf{F}_i = (0, 0, \dots, 0), \\ i = \overline{0, N-1}, \quad \mathbf{F}_N &= (f_0, f_1, \dots, f_M), \quad f_j = \frac{4 \cdot 10^{-3} R \bar{H}_0 \cos \pi y_j}{\Delta x_N}, \quad j = \overline{0, M}; \end{aligned}$$

$A_i, B_i$  – диагональные матрицы  $(M+1) \times (M+1)$ :  $A_i = \text{diag}\{a_{i,0}; a_{i,1}; \dots; a_{i,M}\}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,

$$\text{с элементами} \quad a_{i,j} = \frac{A_{i-0,5,j}}{\Delta x_i \Delta x_j}, \quad j = \overline{0, M}, \quad i = \overline{1, N-1}; \quad a_{N,j} = \frac{2A_{N-0,5,j}}{(\Delta x_N)^2}, \quad j = \overline{0, M};$$

$$B_i = \text{diag}\{b_{i,0}; b_{i,1}; \dots; b_{i,M}\}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad \text{с элементами} \quad b_{0,j} = \frac{2A_{0,5,j}}{(\Delta x_1)^2}, \quad j = \overline{0, M};$$

$$b_{i,j} = \frac{A_{i+0,5,j}}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}}, \quad j = \overline{0, M}, \quad i = \overline{1, N-1};$$

$C_i$  – трехдиагональные матрицы  $(M+1) \times (M+1)$ :



$$C_i = \begin{pmatrix} r_{i,0} & s_{i,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_{i,1} & p_{i,1} & t_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q_{i,M-1} & p_{i,M-1} & t_{i,M-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & s_{i,M} & r_{i,M} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, N}.$$

При этом элементы матрицы  $C_0$  имеют вид

$$r_{0,0} = \frac{2B_{0,0,5}}{(\Delta y_1)^2} + \frac{2A_{0,5,0}}{(\Delta x_1)^2} + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\Delta x_1}, \quad s_{0,0} = -\frac{2B_{0,0,5}}{(\Delta y_1)^2};$$

$$q_{0,j} = -\frac{B_{0,j-0,5}}{\Delta y_j \Delta y_j}, \quad p_{0,j} = \frac{2A_{0,5,j}}{(\Delta x_1)^2} + \frac{1}{\Delta y_j} \left( \frac{B_{0,j+0,5}}{\Delta y_{j+1}} + \frac{B_{0,j-0,5}}{\Delta y_j} \right) + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\Delta x_1}, \quad t_{0,j} = -\frac{B_{0,j+0,5}}{\Delta y_j \Delta y_{j+1}},$$

$$j = \overline{1, M-1};$$

$$r_{0,M} = \frac{2B_{0,M-0,5}}{(\Delta y_M)^2} + \frac{2A_{0,5,M}}{(\Delta x_1)^2} + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\Delta x_1}, \quad s_{0,M} = -\frac{2B_{0,M-0,5}}{(\Delta y_M)^2};$$

элементы матриц  $C_i$ ,  $i = \overline{1, N-1}$ , –

$$r_{i,0} = \frac{2B_{i,0,5}}{(\Delta y_1)^2} + \frac{1}{\Delta x_i} \left( \frac{A_{i+0,5,0}}{\Delta x_{i+1}} + \frac{A_{i-0,5,0}}{\Delta x_i} \right), \quad s_{i,0} = -\frac{2B_{i,0,5}}{(\Delta y_1)^2};$$

$$q_{i,j} = -\frac{B_{i,j-0,5}}{\Delta y_j \Delta y_j}, \quad p_{i,j} = \frac{1}{\Delta x_i} \left( \frac{A_{i+0,5,j}}{\Delta x_{i+1}} + \frac{A_{i-0,5,j}}{\Delta x_i} \right) + \frac{1}{\Delta y_j} \left( \frac{B_{i,j+0,5}}{\Delta y_{j+1}} + \frac{B_{i,j-0,5}}{\Delta y_j} \right), \quad t_{i,j} = -\frac{B_{i,j+0,5}}{\Delta y_j \Delta y_{j+1}},$$

$$j = \overline{1, M-1};$$

$$r_{i,M} = \frac{2B_{i,M-0,5}}{(\Delta y_M)^2} + \frac{1}{\Delta x_i} \left( \frac{A_{i+0,5,M}}{\Delta x_{i+1}} + \frac{A_{i-0,5,M}}{\Delta x_i} \right), \quad s_{i,M} = -\frac{2B_{i,M-0,5}}{(\Delta y_M)^2};$$

элементы матрицы  $C_N$  –

$$r_{N,0} = \frac{2B_{N,0,5}}{(\Delta y_1)^2} + \frac{2A_{N-0,5,0}}{(\Delta x_N)^2} + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\Delta x_N}, \quad s_{N,0} = -\frac{2B_{N,0,5}}{(\Delta y_1)^2};$$

$$q_{N,j} = -\frac{B_{N,j-0,5}}{\Delta y_j \Delta y_j}, \quad p_{N,j} = \frac{2A_{N-0,5,j}}{(\Delta x_N)^2} + \frac{1}{\Delta y_j} \left( \frac{B_{N,j+0,5}}{\Delta y_{j+1}} + \frac{B_{N,j-0,5}}{\Delta y_j} \right) + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\Delta x_N},$$

$$t_{N,j} = -\frac{B_{N,j+0,5}}{\Delta y_j \Delta y_{j+1}}, \quad j = \overline{1, M-1};$$

$$r_{N,M} = \frac{2B_{N,M-0,5}}{(\Delta y_M)^2} + \frac{2A_{N-0,5,M}}{(\Delta x_N)^2} + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\Delta x_N}, \quad s_{N,M} = -\frac{2B_{N,M-0,5}}{(\Delta y_M)^2}.$$

В качестве нулевого приближения  $\overset{0}{\mathbf{U}}_i = (u_{i,0}, u_{i,1}, \dots, u_{i,M})$ ,  $i = \overline{0, N}$ , для итерационного процесса выбираем решение задачи (16)–(18) при  $\bar{\mu} = \text{const}$  (например,  $\bar{\mu} = 6$ ). Задача (16)–(18) в этом случае является линейной и решается методом матричной прогонки точно.

Используя найденное нулевое приближение и решая (25), находим следующую итерацию  $\overset{1}{\mathbf{U}}_i = (u_{i,0}, u_{i,1}, \dots, u_{i,M})$ ,  $i = \overline{0, N}$ . Процесс продолжается рекуррентно. Для остановки итерационного процесса достигнутый уровень невязки сравнивается с заданной точностью.

В результате получим решение  $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ ,  $i = \overline{0, N}$ ,  $j = \overline{0, M}$ .

На основе предложенного численного метода были проведены вычислительные эксперименты по нахождению магнитного поля и магнитной проницаемости внутри экрана толщиной  $h = 0,1$  мм и радиуса  $R = 1,1$  см при различных значениях внешнего магнитного поля  $H_0$ .

Расчеты проводились на равномерной сетке  $N = 100$ ,  $M = 100$  с сеточными шагами  $\Delta x = \Delta y = 0,01$ , точность итерационного процесса равнялась  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Независимость полученного численного решения от шагов сетки проверялась при помощи решения задачи на последовательности сеток, шаг которых уменьшался, например, в два раза. При этом решение на более мелкой сетке  $N = 200$ ,  $M = 200$  совпадает с найденным решением с точностью  $10^{-3}$ .

На рис. 4 показано влияние значений внешнего магнитного поля  $H_0$  на количество итераций численного метода.

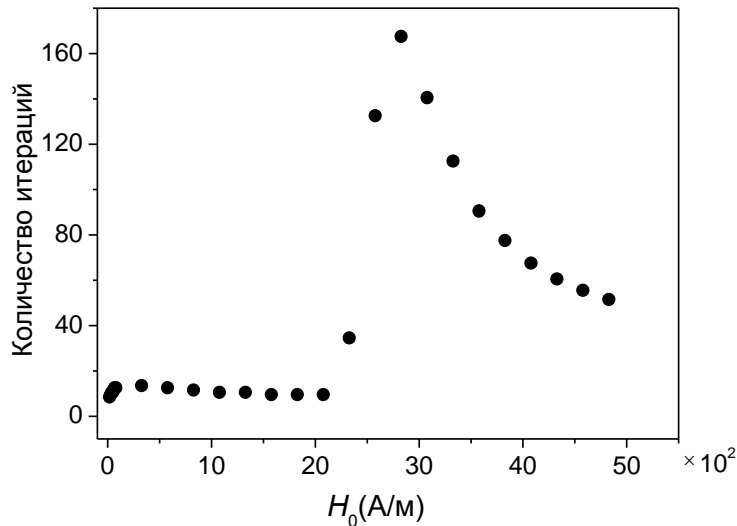


Рис. 4. Зависимость количества итераций численного метода от значений внешнего магнитного поля  $H_0$

#### 4. Напряженность магнитного поля во внутренней области экрана $D_1$

В соответствии с исследуемой математической моделью экранирующей структуры предполагается, что магнитное поле во внутренней области  $D_1$  постоянное:  $\mathbf{H}_1 = -H_1 \mathbf{e}_x = -\text{grad} u_1$ ,  $u_1 = H_1 \rho \cos \varphi$ ,  $H_1 = \text{const}$ . Такая ситуация наблюдается, когда магнитная проницаемость эк-

рана – постоянная величина и на экран воздействует постоянное магнитное поле  $\mathbf{H}_0$ . В результате из первого граничного условия (3), рассмотренного в точке  $\rho = R_1$ ,  $\varphi = 0$ , следует

$$H_1 = \frac{1}{R_1} u(x=0, y=0).$$

На рис. 5 изображены графики зависимости поля  $H_1$ , прошедшего внутрь экрана, от внешнего магнитного поля  $H_0$ , падающего на экран. Если в экранируемой области  $D_1$  находится электронное устройство, работа которого нарушается при воздействии магнитного поля  $H_1 > H_{кр}$ , где  $H_{кр}$  – критическая напряженность магнитного поля, то точки пересечения прямой пунктирной линии с линиями 1–3 определяют границу применимости экрана  $H_{0,кр}$ . При  $H_0 > H_{0,кр}$  работа устройства может нарушаться.

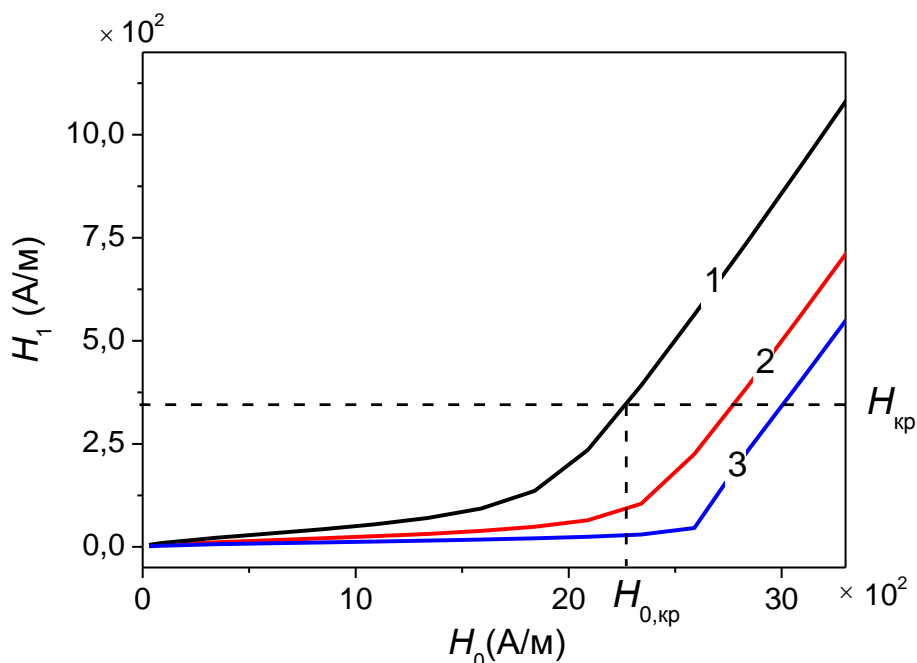


Рис. 5. Напряженность магнитного поля в центре цилиндрического экрана толщиной  $h$ :  
1 –  $h=0,05$  мм; 2 –  $h=0,1$  мм; 3 –  $h=0,18$  мм

## 5. Напряженность магнитного поля в слое пленки

Разработанная в разд. 3 методика численного решения краевой задачи (16)–(18) позволяет определить потенциал  $u_{i,j}$  в слое пленки (см. рис. 2). С помощью его значения по разностным соотношениям (23), (24) находим магнитное поле  $H = 10^2 \bar{H}$  в слое пленки.

На рис. 6 показаны магнитное поле и магнитная проницаемость в слое пленки при различных значениях внешнего магнитного поля для экрана радиуса  $R = 1,1$  см и толщиной  $h = 0,1$  мм. Отметим, что для экранов другой толщины характер зависимостей сохраняется.

Сравнение величин магнитных полей на рис. 6 показывает, что с увеличением внешнего магнитного поля магнитное поле в слое пленки увеличивается и концентрируется в точке  $\varphi = \pi/2$ , в которой вектор внешнего магнитного поля касателен к поверхности экрана.

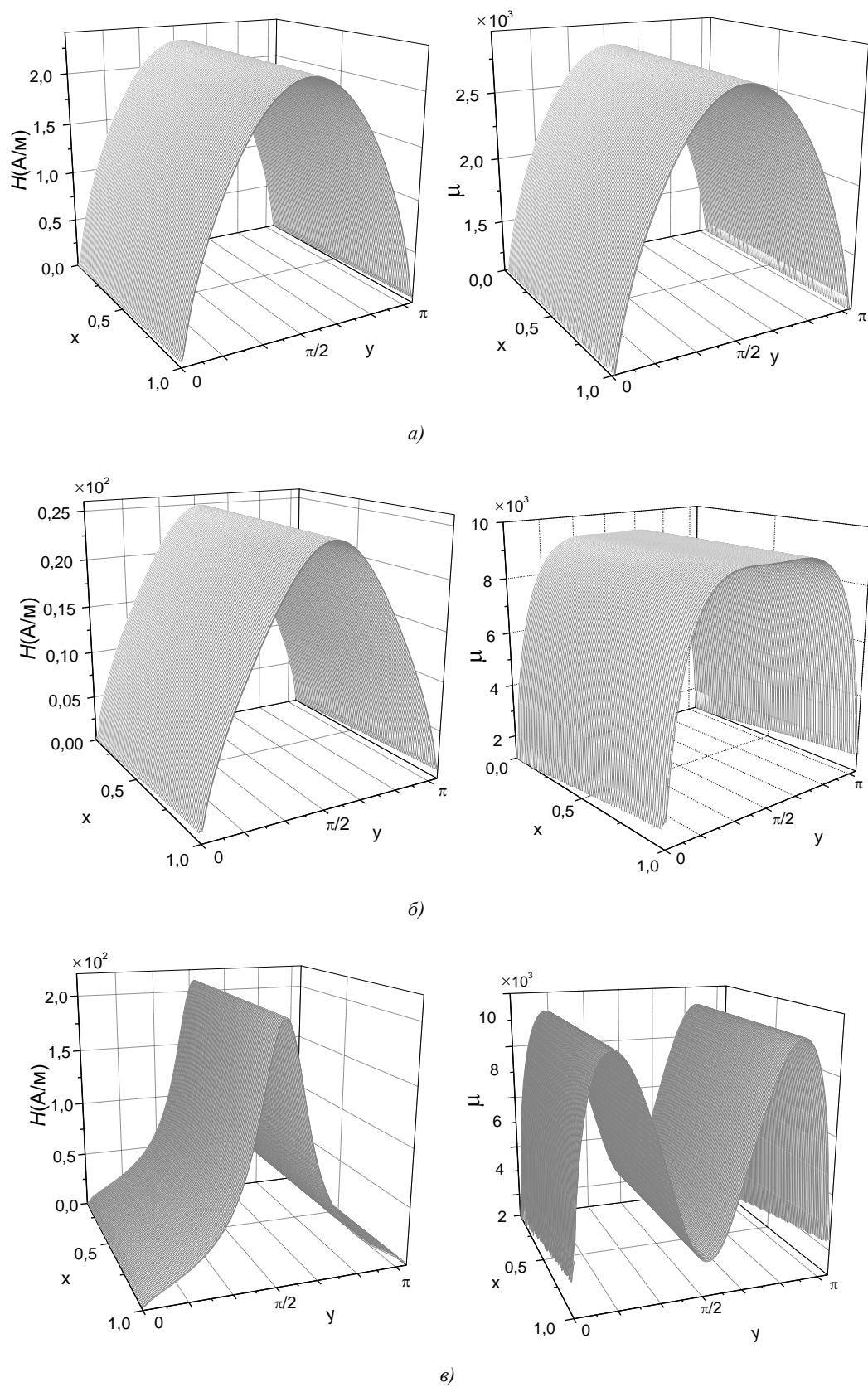


Рис. 6. Распределение напряженности магнитного поля и магнитной проницаемости в пленке  $D$  при воздействии внешних полей: а)  $H_0 = 0,3 \cdot 10^2$  А/м; б)  $H_0 = 10,9 \cdot 10^2$  А/м; в)  $H_0 = 23,4 \cdot 10^2$  А/м

На рис. 6, б магнитная проницаемость имеет большое значение  $\mu \approx 9 \cdot 10^3$  практически на всем интервале пленки, что обеспечивает высокую эффективность экрана. В случае увеличения напряженности внешнего магнитного поля  $H_0$  магнитная проницаемость принимает большое значение на малых интервалах пленки (рис. 6, в), что приводит к уменьшению эффективности экрана. Проведенный анализ согласуется с экспериментальными исследованиями эффективности экранов [10].

### Заключение

Разработан численный метод решения краевой задачи экранирования постоянных магнитных полей цилиндрическим тонкостенным экраном (оболочкой), сформулированной для нелинейного эллиптического уравнения магнитостатики в терминах магнитных потенциалов. Для нахождения потенциалов построена система нелинейных конечно-разностных уравнений, которая решена с помощью итерационного процесса методом матричной прогонки.

Численно исследовано распределение потенциала, напряженности магнитного поля и магнитной проницаемости материала внутри слоя пленки. Показано, что указанные величины практически не изменяются вдоль толщины экрана и в значимой степени зависят от координаты вдоль поверхности экрана. Нелинейные процессы в материале пленки существенно влияют на структуру магнитного поля и на эффективность экранирования. При увеличении внешнего магнитного поля магнитное поле внутри пленки претерпевает значительные изменения.

### Список литературы

1. Шапиро, Д.Н. Электромагнитное экранирование / Д.Н. Шапиро. – Долгопрудный : Изд. дом «Интеллект», 2010. – 120 с.
2. Панова, Е.В. Исследование геометрических критериев электромагнитных экранов / Е.В. Панова // Технологии техносферной безопасности [Электронный ресурс]. – 2014. – № 1(53). – Режим доступа : <http://ipb.mos.ru/ttb>. – Дата доступа : 10.02.2016.
3. Гибкие конструкции экранов электромагнитного излучения / Л.М. Лыньков [и др.]. – Минск : БГУИР, 2000. – 284 с.
4. Ерофеев, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеев, И.С. Козловская. – М. : КД Либроком, 2014. – 304 с.
5. Аполлонский, С.М. Электромагнитные поля в экранирующих оболочках / С.М. Аполлонский, В.Т. Ерофеев. – Минск : Университетское, 1988. – 247 с.
6. Модель экранирования постоянных магнитных полей многослойным цилиндрическим экраном / В.Т. Ерофеев [и др.] // Информатика. – 2012. – № 3(35). – С. 80–93.
7. Ерофеев, В.Т. Математическое моделирование полупрозрачных слоистых тонкостенных волноводов с учетом усредненных двусторонних граничных условий / В.Т. Ерофеев, А.И. Глушцов // Инженерно-физический журнал. – 2009. – Т. 82, № 4. – С. 794–802.
8. Резинкина, М.М. Использование численных расчетов для выбора средств экранирования от действия магнитного поля / М.М. Резинкина // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77, вып. 11. – С. 17–24.
9. Закономерности проникновения электромагнитных волн через металлические магнитные пленки / А.Б. Ринкевич [и др.] // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, вып. 9. – С. 96–106.
10. Эффективность магнитостатического экранирования цилиндрическими оболочками / С.С. Грабчиков [и др.] // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2015. – № 4. – С. 107–114.
11. Глонягин, Ю.В. Элементы теории и расчета магнитостатических полей ферромагнитных тел / Ю.В. Глонягин. – Л. : Судостроение, 1967. – 180 с.
12. Зильберман, Г.Е. Электричество и магнетизм / Г.Е. Зильберман. – М. : Наука, 1970. – 382 с.
13. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.

14. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М. : Наука, 1978. – 590 с.

Поступила 01.03.2016

<sup>1</sup>*Институт математики НАН Беларуси,  
Минск, Сурганова, 11  
e-mail: grom @im.bas-net.by,  
zayats@im.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем  
математики и информатики»,  
Минск, пр. Независимости, 4  
e-mail: bsu\_erofeenko@tut.by*

**G.F. Gromyko, V.T. Erofeenko, G.M. Zayats**

**NUMERICAL SIMULATION OF MAGNETIC FIELD STRUCTURE  
IN CYLINDRICAL FILM SCREEN**

A numerical method for solving the boundary value problem for a nonlinear magnetostatic equation describing the external magnetostatic field penetration through the cylindrical film coating is developed. A mathematical model of the shielding problem based on the use of the boundary conditions of the third kind on the film surface is studied. The nonlinear dependence of the film magnetic permeability on magnetic field conforms with experimental data. The distribution of the magnetic field strength in the film layer and the magnetic permeability of the film material depending on the magnitude of the external magnetic field strength are investigated numerically.