ИНФОРМАТИКА
2016 июль-сентябрь № 3

УДК 519.8

И.В. Рубанов, М.С. Баркетов, М.Я. Ковалев

МЕТОДЫ ПОИСКА НЕСКОЛЬКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ И ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Рассматриваются методы поиска решений систем линейных неравенств специального вида, состоящих из разностных неравенств с двумя переменными и интервальных ограничений с одной переменной. Для решения таких систем предлагаются два подхода, с помощью которых могут быть найдены два экстремальных («максимальное» и «минимальное») решения, а также некоторые другие решения. Первый подход основан на методе Фурье – Моцкина, второй – на представлении системы в виде сети ограничений.

Введение

Пусть имеется сеть пересекающихся маршрутов и n объектов (например, самолетов), каждый из которых совершает непрерывное движение по какому-либо определенному маршруту. Пусть известно время движения каждого объекта от начала маршрута до каждой точки пересечения с другими маршрутами и заданы ограничения на минимальное расстояние по времени сближения объектов, а также допустимые временные интервалы моментов начала движения каждого объекта. Требуется составить допустимое расписание начала движения объектов.

Данная задача может быть сведена к решению системы дизъюнктивно объединенных пар неравенств [1]. Одним из способов решения этой системы может являться какой-либо метод перебора, когда перебираются все возможные варианты выбора неравенства из каждой дизъюнктивной пары. В процессе такого перебора получается система линейных неравенств вида

$$\begin{cases} x_i - x_j \le a_{ji}, & (i, j) \in IJ \subseteq N \times N; \\ x_i^{\min} \le x_i \le x_i^{\max}, & i \in N, \end{cases} \tag{1}$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$.

Переменные x_i и x_j выражают моменты начала движения соответствующего объекта. Разностное ограничение $x_i - x_j \le a_{ji}$ гарантирует, что объекты начнут движение так, чтобы между проходами ими точки пересечения маршрутов был гарантированный минимальный промежуток времени. Интервальное ограничение $x_i^{\min} \le x_i \le x_i^{\max}$ задает время начала движения объекта i. Система (1) не обязательно является полной в том смысле, что она может включать не все возможные разностные и интервальные ограничения.

Задача (1) представляет собой известный класс систем линейных неравенств, называемый DBM – Difference-bounds matrices (см., например, [2]), метод решения которых может быть небольшой модификацией [2] хорошо известных методов решения обычных систем разностных неравенств (difference constraits), основанных на поиске кратчайших путей в построенной по (1) сети ограничений (см., например, [3–6]). Рассматриваемый в [2] метод позволяет за время $O(n^3)$ найти решение (1), соответствующее одной из экстремальных точек многогранника ограничений, в которой значения каждой из переменных являются максимально возможными.

В настоящей статье рассматриваются методы поиска нескольких решений (1), возможно, не принадлежащих границам исходного многогранника. Задачи поиска таких решений могут быть сведены к инкрементальным, позволяющим находить решения системы, к которой добавляются новые ограничения (при условии, что решение исходной системы известно), за время, меньшее, чем потребовалось бы для решения системы с исходными и новыми ограничениями.

В статье [7] рассматриваются инкрементальные методы решения системы разностных неравенств с добавленными ограничениями за время $O(m+n\log n)$, где m – общее количество ограничений. Приведенная оценка является оценкой сложности одной из реализаций алгоритма Дийкстры, используемого в предлагаемых в [7] методах.

В настоящей работе предлагаются два метода решения системы DBM, при помощи которых могут быть найдены новые значения переменных x_j при вынужденном изменении значения одной из них (x_i) без изменения набора ограничений при условии, что значение x_i находится в подходящем вычисляемом интервале. Для каждого значения переменной из данного интервала может быть найдено допустимое решение задачи с соответствующим значением данной переменной. Один из предлагаемых алгоритмов основан на универсальном методе Фурье – Моцкина и включает как проверку на совместность системы (1), так и построение решений. Первое решение заданной системы может быть найдено за время $O(n^3)$, некоторые другие ее решения при уже найденном одном – за время $O(n^2)$. Другой метод основан на представлении системы в виде сети ограничений и позволяет найти два начальных решения за время работы алгоритма поиска кратчайших путей от одной вершины к остальным, выявляющего циклы отрицательной длины, например, за время $O(n^3)$. Этот метод позволяет найти и другие решения, верхняя оценка вычислительной сложности построения которых так же, как для метода, приведенного в [7], не выше оценок для алгоритма Дийкстры (например, $O(m+n\log n)$).

1. Алгоритм Фурье – Моцкина

Одним из известных методов решения систем линейных неравенств является метод Фурье – Моцкина [8]. Он заключается в построении последовательности систем-следствий из данной системы, причем каждая последующая система содержит на одну переменную меньше. Если известно допустимое решение какой-либо системы из данной последовательности, то можно построить допустимое решение для предыдущей системы. Более подробно суть метода можно изложить следующим образом.

Пусть дана система m линейных неравенств с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$. Выберем любую переменную x_i и запишем все содержащие ее неравенства так, чтобы коэффициент при этой переменной равнялся +1 и она находилась в левой части неравенства:

$$\begin{cases} x_i \le f_1(X_i), \\ ..., \\ x_i \le f_{m_1}(X_i), \\ x_i \ge f_{m_1+1}(X_i), \\ ..., \\ x_i \ge f_{m_1+m_2}(X_i), \\ ... \end{cases} \tag{2}$$

Здесь X_i – вектор переменных системы за исключением i-й, m_1 неравенств имеют тип «$\le$» и m_2 неравенств имеют тип «$\ge$». Далее содержащие x_i неравенства из (2) перепишем в виде

$$\begin{cases} f_{m_1+1}\left(X_i\right) \le x_i \le f_1\left(X_i\right), \\ \ldots, \\ f_{m_1+1}\left(X_i\right) \le x_i \le f_{m_1}\left(X_i\right), \\ f_{m_1+2}\left(X_i\right) \le x_i \le f_1\left(X_i\right), \\ \ldots, \\ f_{m_1+2}\left(X_i\right) \le x_i \le f_{m_1}\left(X_i\right), \\ \ldots \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) содержит все возможные сочетания право- и левосторонних относительно x_i ограничений. Если теперь удалить рассматриваемую переменную и переписать (3) в виде

$$\begin{cases} f_{m_1+1}\left(X_i\right) \le f_1\left(X_i\right), \\ \ldots, \\ f_{m_1+1}\left(X_i\right) \le f_{m_1}\left(X_i\right), \\ f_{m_1+2}\left(X_i\right) \le f_1\left(X_i\right), \\ \ldots, \\ f_{m_1+2}\left(X_i\right) \le f_{m_1}\left(X_i\right), \\ \ldots, \end{cases} \tag{4}$$

то вместе с остальными, изначально не содержавшими x_i неравенствами получится система-следствие, при любом решении которой, если оно будет найдено, можно будет поместить значение x_i в интервал из (4) с наибольшей нижней и наименьшей верхней границами, дополнив набор значений переменных до решения исходной системы. Если одно из рассматриваемых неравенств приводится к виду $\mathrm{const}_1 \le \mathrm{const}_2$ при $\mathrm{const}_1 > \mathrm{const}_2$, то исходная система несовместна. Применяя описанные действия к получившейся системе (4), исключим следующую переменную и получим очередную систему-следствие. После $n-1$ шагов будут удалены все переменные, кроме одной, для которой будет получен интервал изменения в явном виде. Выбрав ее значение, подставим его в систему, получившуюся на предыдущем шаге, и получим в явном виде диапазон для предыдущей переменной. Так повторяем до первой из удаленных переменных. В настоящей статье этап удаления переменных будем называть обратным ходом алгоритма, этап подстановки – прямым.

Простое описание алгоритма Фурье – Моцкина на примере его применения для решения небольших задач линейного программирования дано в монографии [4]. В общем случае этот метод является вычислительно сложным, поскольку на этапе удаления переменных может возникнуть $\left(m/2\right)^{2^n}$ неравенств. Поэтому он применяется для небольших систем или систем специального вида.

Далее приводится оценка сложности получения нескольких возможных решений методом Фурье – Моцкина для специфичной системы DBM.

1.1. Обратный ход алгоритма

Рассмотрим случай, в котором система (1) является полной, т. е. в нее входят все возможные разностные и интервальные ограничения. Их количество равно $2C_2^n + 2n = n^2 + n$.

Выберем в рассматриваемой системе для исключения любую переменную x_{i_1}. Она встретится $n-1$ раз с коэффициентом +1 и $n-1$ раз с коэффициентом -1 во всех неравенствах с двумя переменными. Добавив по одному случаю, вносимому интервальными ограничениями, получим n случаев появления выбранной переменной с каждым знаком. Матрицу коэффициентов полной системы, включающую только неравенства с рассматриваемой переменной, можно записать следующим образом:

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & -1 & \ldots & 1 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & \ldots & -1 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{array} \qquad (5)$$

Для исключения переменной по алгоритму Фурье – Моцкина комбинирование лево- и правосторонних относительно x_i неравенств представим как попарное сложение неравенств с коэффициентами $+1$ и -1 при исключаемой переменной. Такая модификация метода предложена, например, в статье [9]. Возможных пар складываемых неравенств, в одно из которых переменная входит с коэффициентом $+1$, а в другое – с коэффициентом -1, будет n^2.

После сложения в левых частях результирующих неравенств либо не останется переменных, либо останется одна с коэффициентом $+1$ или -1, либо две с коэффициентами $+1$ и -1 (вторые из переменных в складываемых неравенствах в случае их присутствия будут с противоположными исключаемой знаками), т. е. вид системы не изменится. Возможные комбинации строк коэффициентов и их суммы таковы:

$$\begin{array}{c} \\ + \\ \\ = \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} -1 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ + \\ \\ = \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} -1 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ + \\ \\ = \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} -1 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & -1 \\ -1 & 1 & \ldots & 0 \end{array} \qquad \ldots \qquad (6)$$

Результирующих неравенств будет n^2, из них n будут с нулевыми коэффициентами, т. е. число неравенств с ненулевыми коэффициентами равно n^2-n. Среди остальных, не содержащих переменную x_{i_1} и не подвергшихся суммированию, будет также n^2-n неравенств. Далее необходимо рассмотреть неравенства, включающие одинаковую пару переменных с одинаковыми знаками и оставить из таких неравенств наиболее сильное (с минимальной правой частью). В итоге в системе останется $n^2-n=(n-1)^2+(n-1)$ неравенств.

Можно хранить информацию о системе в виде матрицы A_{ij}^n, $0 \le i \le n$, $0 \le j \le n$, $i \ne j$, где a_{ij} – значение правой части ограничения с коэффициентом -1 при переменной x_i и коэффициентом $+1$ при переменной x_j ($i=0$ ($j=0$) в случае отсутствия переменной с коэффициентом -1 ($+1$)). В случае отсутствия этого ограничения в системе используется специальный символ. Таким образом, вместо суммирования, последующего поиска и удаления нужных строк матриц коэффициентов в представлении (5) можно оперировать элементами матриц правых частей. Пусть переменные удаляются с n-й по первую. Тогда для удаления n-й переменной полной системы потребуется просуммировать каждый j-й элемент строки n с каждым i-м элементом столбца с тем же номером в A_{ij}^n. Из n^2 получившихся значений n элементов $a_{nk}+a_{kn}$ (соответствующих результирующим строкам с нулевыми коэффициентами в представлении (5)) проверяются на неотрицательность для выявления несовместности, а каждый из остальных n^2-n элементов $a_{in}+a_{nj}$ сравнивается с элементом a_{ij} матрицы A_{ij}^n и минимальный из них записывается в матрицу A_{ij}^{n-1}. Для удаления следующей переменной процесс повторяется с A_{ij}^{n-1} и далее итеративно до получения матрицы A_{ij}^{1}. Таким образом, значения a_{ij}^{k-1} матрицы A_{ij}^{k-1} можно получить из A_{ij}^{n} по рекуррентной формуле

$$a_{ij}^{k-1} = \min\left(a_{ij}^{k}, a_{ik}^{k} + a_{kj}^{k}\right), \tag{7}$$

известной как формула для расчета элементов матрицы кратчайших расстояний по алгоритму Флойда – Уоршалла, а совместность определяется по отсутствию в A_{ij}^{k} отрицательных диагональных элементов, что может быть использовано в каком-либо доказательстве сетевого метода (см. разд. 2) решения системы (1).

Очевидно, что при таком хранении данных случай полной системы будет самым вычислительно сложным, поскольку требуется проводить операции с каждым элементом матриц A_{ij}. Подсчитаем возможное количество операций, которое потребуется на обратный ход алгоритма. При исключении первой переменной для суммирования строк по матрице A_{ij}^{n} требуется n^2 операций, для проверки неотрицательности – n операций, для сравнивания и формирования следующей матрицы – $2\left(n^2 - n\right)$ операций, т. е. всего $n^2 + n + 2n^2 - 2n = 3n^2 - n$ операций. Для исключения второй переменной потребуется $3\left(n-1\right)^2 - \left(n-1\right)$ операций и т. д. Всего на обратный ход алгоритма, т. е. на исключение всех переменных, кроме одной, потребуется следующее количество элементарных операций:

$$\left[3n^2 - n\right] + \left[3\left(n-1\right)^2 - \left(n-1\right)\right] + \ldots + 4 = \sum_{i=2}^{n}\left(3i^2 - i\right) = n^3 + n^2 - 2\,. \tag{8}$$

Таким образом, вычислительная сложность обратного хода алгоритма равна $\mathrm{O}(n^3)$.

1.2. Прямой ход алгоритма

После обратного хода метод Фурье – Моцкина работает следующим образом. Пусть переменные удалялись с n-й по первую. Из диапазона последней оставшейся переменной x_1 выбирается произвольное значение (см. общее описание метода в начале разд. 1) и подставляется в полученную на предпоследнем этапе систему с двумя переменными. Количество неравенств в ней $2^2 + 2 = 6$, и значение переменной x_1 требуется подставить в $2(2-1) = 2$ неравенства с ненулевыми коэффициентами при обеих переменных. В двух из получившихся неравенств предпоследняя исключавшаяся переменная присутствует с коэффициентом $+1$ (среди них нужно найти одно с минимальной правой частью) и в двух – с коэффициентом -1 (среди них аналогично нужно найти одно). Найденные неравенства определяют ее диапазон. Если произвольное значение может быть выбрано за одну операцию, преобразование правых частей после подстановки потребует две операции, а поиск минимальных правых частей – четыре операции, тогда общее количество операций равно семи.

Далее выбирается произвольное значение из полученного для предпоследней переменной интервала, значения последней и предпоследней переменных подставляются в $2(3-1) = 4$ неравенства, содержащие ненулевые коэффициенты при двух переменных (одной из подставляемых и переменной с искомым диапазоном), отыскиваются два неравенства с минимальными правыми частями среди $2 \cdot 3 = 6$ неравенств с ненулевыми коэффициентами при искомой переменной, всего $1 + 2(3-1) + 2 \cdot 3 = 11$ и т. д. На завершающем этапе прямого хода выбирается произвольное значение из диапазона для первой исключавшейся переменной x_n.

Можно воспользоваться матрицами A_{ij}^{k} правых частей, полученными на этапе обратного хода. Тогда на шаге $k-1$ прямого хода каждое из $k-1$ выбранных значений x_i^0 переменных x_i потребуется прибавить к элементам $ik,\ i \neq 0,$ матрицы A_{ij}^{k} и выбрать среди них минимальное значение, получив верхнюю границу диапазона переменной x_k, далее отнять x_i^0 от элементов

$ki, i \neq 0$, выбрать среди них минимальное значение и взять его со знаком минус, получив нижнюю границу диапазона x_k.

Вычислительная сложность прямого хода алгоритма определяется следующим образом:

$$1+\left[2(2-1)+2\cdot 2\right]+1+\left[2(3-1)+2\cdot 3\right]+\ldots+\left[2(n-1)+2n\right]+1= \\ =n+2\sum_{i=2}^{n}(2i-1)=n+2n^2-2. \tag{9}$$

Суммируя с (8) и прибавив n^2+n операций на построение начальной матрицы A_{ij}^n, получаем вычислительную сложность метода Фурье – Моцкина для системы (1):

$$n^2+n+n^3+n^2-2+2n^2+n-2=n^3+4n^2+2n-4. \tag{10}$$

Вычислительная сложность решения при таком хранении данных для неполной системы, как уже говорилось ранее, может быть только меньше. Поэтому справедливо следующее

Утверждение. *Вычислительная сложность решения системы разностных неравенств с дополнительными ограничениями на минимумы и максимумы переменных описанным методом Фурье – Моцкина – не более* $O(n^3)$.

Рассмотренный в этом разделе метод можно использовать для построения нескольких решений системы (1), возможных при подходящих условиях. К примеру, пусть на этапе прямого хода для построения решения выбирались на каждом шаге минимальные значения переменных из определяемых для них на предыдущих шагах допустимых интервалов. Если теперь значение одной из переменных x_i увеличить в пределах допустимого интервала, потребуется переопределить интервалы и значения переменных на шагах от $i+1$ до n. Очевидно, что верхняя оценка сложности такого повторного построения решения будет не выше $O(n^2)$. Если значение x_i выходит за пределы допустимого интервала, можно попытаться повторно выбрать значения переменных на предыдущих шагах. В разд. 2 будет доказано, что существуют два решения системы (1), одно из которых состоит из минимально возможных среди любых решений значений переменных, второе – из максимально возможных. Таким образом, если строить решение, выбирая на каждом шаге минимальное (максимальное) значение каждой переменной, то ни одно из значений не сможет быть понижено (повышено) в каком-либо повторном решении.

Нетрудно видеть, что сложность метода Фурье – Моцкина остается невысокой и для решения более общей по отношению к (1) задачи «unit two variable per inequality» (UTVPI), представляющей собой систему неравенств, в каждом из которых присутствует не более двух переменных с коэффициентами +1 или –1, так как одна из переменных в каждом из двух комбинируемых неравенств всегда удаляется и среди результирующих неравенств остается мало независимых. Применение для такой задачи алгоритма Фурье – Моцкина так же, как и для рассматриваемой задачи (1), может быть способом построения нескольких ее решений. В работе [9] предлагается реализация метода Фурье – Моцкина для поиска целочисленных решений задачи UTVPI.

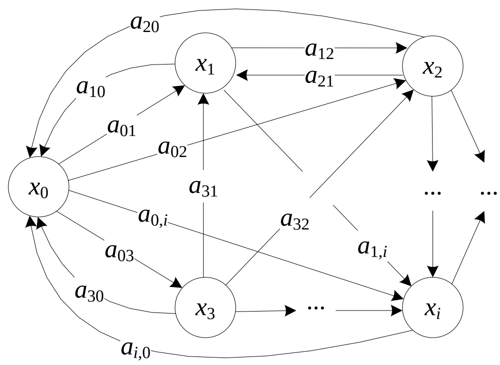
2. Сетевой метод

Добавим в (1) фиктивную переменную x_0 и будем искать решение системы

$$\begin{cases} x_i - x_j \le a_{ji}, \\ x_0 = 0, \end{cases} \quad (i, j) \in IJ_0 \subseteq N_0 \times N_0, \tag{11}$$

эквивалентной (1), где $N_0 = \{0,...,n\}$, $a_{0,i} = x_i^{\max}, ..., a_{i,0} = -x_i^{\min}$. Не ограничивая общности, предположим, что для каждой переменной указаны конечные границы ее значений, т. е. в формулировке (11) заданы по два неравенства с переменной x_0.

Создадим взвешенный ориентированный граф G, в котором каждой вершине поставим в соответствие переменную x_i (будем обозначать такую вершину как i), а каждой дуге – разностное ограничение $x_j - x_i \le a_{ij}$ системы (11) так, чтобы дуга была направлена от вершины i к вершине j, вес дуги – a_{ij} (рисунок).



Сеть ограничений, построенная по системе (1)

Далее сформулируем в виде теоремы известный результат о системе DBM [2], которую докажем аналогично построению в [5] для обычных систем разностных неравенств. Данная формулировка легко позволяет получить сразу два решения системы (1).

Теорема. *Система разностных и интервальных ограничений совместна тогда и только тогда, когда в* G *отсутствуют циклы отрицательной длины. В случае ее совместности величины* $l_{0,i}$ *(*$-l_{0,i}$*), каждая из которых равна кратчайшему расстоянию от вершины* 0 *до вершины* i *(от вершины* i *к вершине* 0*) в* G*, образуют решение системы.*

Доказательство. Если в G отсутствуют циклы отрицательной длины, то величины $l_{0,i}$ будут конечны и $x_i = l_{0,i}$ будут удовлетворять всем ограничениям (11) в силу того, что по свойству кратчайших расстояний кратчайшее расстояние $l_{0,j}$ от вершины 0 до вершины j будет всегда меньше, чем кратчайшее расстояние $l_{0,i}$ от вершины 0 до вершины i, непосредственно предшествующей j, плюс длина соединяющей их дуги a_{ij}:

$$\begin{aligned} & l_{0,j} \le l_{0,i} + a_{ij} \Leftrightarrow l_{0,j} - l_{0,i} \le a_{ij}, \\ & ..., \\ & l_{0,i} \le 0 + a_{0,i} \Leftrightarrow l_{0,i} - 0 \le a_{0,i}, \\ & \left(l_{0,0} = 0\right) \le l_{0,i} + a_{i,0} \Leftrightarrow 0 - l_{0,i} \le a_{i,0}, \\ & ... \end{aligned} \tag{12}$$

Если цикл отрицательной длины в G присутствует, то, складывая неравенства, соответствующие дугам этого цикла, получим их несовместную линейную комбинацию

$$\left(x_i - x_{i_1} + x_{i_1} - x_{i_2} + x_{i_2} ... + x_{i_k} - x_i = 0\right) \le a_{i_1,i} + a_{i_2,i_1} + ... + a_{i,i_k} < 0 .$$

Аналогично построениям (2) величины $-l_{i,0}$, каждая из которых равна кратчайшему расстоянию от вершины i до 0, взятому со знаком минус, также будут решениями системы в случае отсутствия в ней циклов отрицательной длины:

$$\begin{aligned}
&-l_{j,0} \ge -l_{i,0} - a_{ji} \Leftrightarrow l_{j,0} - l_{i,0} \le a_{ji} \Leftrightarrow x_i - x_j \le a_{ji},\\
&\ldots,\\
&\left(-l_{0,0} = 0\right) \ge -l_{i,0} - a_{0,i} \Leftrightarrow -l_{i,0} - 0 \le a_{0,i} \Leftrightarrow x_i - x_0 \le a_{0,i},\\
&-l_{i,0} \ge 0 - a_{i,0} \Leftrightarrow 0 + l_{i,0} \le a_{i,0} \Leftrightarrow x_0 - x_i \le a_{i,0},\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{13}$$

■

Отметим также, что известны другие подходы к решению системы разностных неравенств, которые могут быть адаптированы к решению системы (1). Добавив по одной дополнительной неотрицательной переменной («приведенной стоимости») к каждому неравенству, можно свести систему к системе равенств. Известно (см., например, [6]), что существует набор значений переменных (при этом все приведенные стоимости должны быть неотрицательны), удовлетворяющий данной системе равенств, тогда и только тогда, когда в соответствующем графе нет циклов отрицательной длины. Также в случае разрешимости системы известен метод построения такого набора значений переменных [6].

В случае неполной системы, если для какой-либо переменной x_i отсутствуют интервальные ограничения, в соответствующем графе G может отсутствовать путь из вершины 0 в вершину i и (или) обратный путь. Не нарушая общности метода, для такой переменной можно ввести в систему фиктивные неравенства $x_i - 0 \le M \wedge 0 - x_i \le M$, а в граф – дуги $a_{0,i}$, $a_{i,0}$ с заведомо большим весом M. Величину M можно определить как $M \ge \sum \left|a_{ij}\right| : a_{ij} < 0, \quad i, j = \overline{0, n}$, для того, чтобы гарантировать неотрицательную длину возникающих циклов.

Сформулируем несколько свойств области допустимых решений рассматриваемой системы. Учитывая некоторые из утверждений, можно строить решения (1) при возможном вынужденном изменении значения какой-либо переменной.

Перед этим сформулируем в виде леммы и докажем утверждение, которое, как и теорема, будет использоваться при доказательстве некоторых свойств.

Допустим, что переменные x_i, $i \ne 0$, приняли значения x_i^0. Назовем x^0-расстоянием между вершинами i и j на каком-либо пути в графе G величину

$$s_{i,j}^0 = x_j^0 - x_{i_k}^0 + x_{i_k}^0 - x_{i_{k-1}}^0 + \ldots + x_{i_1}^0 - x_i^0 = x_j^0 - x_i^0. \tag{14}$$

Максимальным x^0-расстоянием между вершинами i и j на каком-либо пути будет длина этого пути:

$$s_{i,j} = a_{i_k,j} + a_{i_{k-1},i_k} + \ldots + a_{i,i_1}, \tag{15}$$

где a_{ij} – длина дуги (i, j).

Лемма. Набор $x_1^0, x_2^0, \ldots$ значений переменных является решением (11) тогда и только тогда, когда x^0-расстояния между любой парой вершин на всех путях между ними не будут превышать длины этих путей: $s_{i,j}^0 \le s_{i,j}$, $\forall i, j$.

Доказательство. Достаточность этого утверждения очевидна: если x^0-расстояние не превышает длины пути для любой пары вершин, то это справедливо и для пар, входящих в разностные ограничения. Теперь докажем необходимость. Допустим, что набор $x_1^0, x_2^0, \ldots$ является решением системы и существует пара индексов i, j, для которой на каком-либо пути от i до j

выполняется $s^0_{i,j} > s_{i,j}$. Просуммировав все неравенства вдоль этого пути, получим неравенство-следствие $s^0_{i,j} \le s_{i,j}$, что является противоречием. ■

Свойство 1. $l_{0,i} = \min\limits_{j}\left(x_i^{\max}, x_j^{\max} + l_{j,i}\right), \quad -l_{i,0} = \max\limits_{j}\left(x_i^{\min}, x_j^{\min} - l_{i,j}\right), \quad i, j = \overline{1,n}$.

Доказательство. Рассмотрим путь минимальной длины от вершины 0 до вершины i, проходящий через другую вершину j (возможно, совпадающую с i). Тогда путь минимальной длины от вершины 0 до вершины i – это путь минимальной длины среди всех указанных путей через вершину j по всем j. Первое равенство описывает это утверждение. Аналогично доказывается справедливость второго равенства. ■

Свойство 2. *Соотношения* $-l_{i,0} \le x_i \le l_{0,i}$ *влекут соотношения* $-a_{i,0} \le x_i \le a_{0,i}$.

Доказательство. Соотношение $-a_{i,0} \le -l_{i,0}$ следует из третьего соотношения в (13), а соотношение $l_{0,i} \le a_{0,i}$ – из второго соотношения в (12). ■

Свойство 3. *В каждой индивидуальной задаче (11) величины* $l_{0,i}$ *и* $-l_{i,0}$ *являются верхней и нижней границами значения переменной* x_i *соответственно*.

Доказательство. В самом деле, сложив неравенства вдоль дуг кратчайшего пути от 0 до i, получим неравенство-следствие $x_i - x_0 \le l_{0,i}$. Значит, значение x_i не может быть больше $l_{0,i}$. Аналогично для $-l_{i,0}$. ■

Величину $l_{0,i}$ ($-l_{i,0}$) назовем *допустимым максимумом (минимумом)* переменной x_i. Согласно теореме набор значений, состоящий из всех $x_i = l_{0,i}$ ($x_i = -l_{i,0}$), является решением. Таким образом, если к (1) добавить целевую функцию с положительными коэффициентами при каждой переменной, то очевидно, что при $x_i = l_{0,i}$ ($x_i = -l_{i,0}$) она примет максимальное (минимальное) значение. Можно назвать *максимальным* (*минимальным*) такое решение системы (1). Ранее (см. введение и подразд. 1.2) упоминалось о существовании таких решений.

Свойство 4. *Если в допустимом решении системы (11) значение какой-либо переменной* x_i *равно ее допустимому максимуму (минимуму), то значения всех переменных* x_j*, лежащих на кратчайших путях из* 0 *в* i *(из* i *в* 0*), равны соответствующим допустимым максимумам (минимумам), а для первых (последних), находящихся на кратчайших путях* $(0,i)((i,0))$ *переменных* x_j *будет выполняться* $x_j = l_{0,j} = x_j^{\max}$ *(*$x_j = -l_{j,0} = x_j^{\min}$*).*

Доказательство. Если какая-либо переменная x_i принимает значение $x_i^0 = l_{0,i}$ ($x_i^0 = l_{i,0}$), а для значения какой-либо находящейся на кратчайшем пути от 0 до i (от i до 0) переменной x_j выполняется $x_j^0 < l_{0,j}$ ($x_j^0 > -l_{j,0}$), тогда $x_i^0 - x_j^0 > l_{j,i}$ ($x_j^0 - x_i^0 > l_{i,j}$), что невозможно согласно лемме. Для первых (последних), находящихся на кратчайших путях переменных $l_{0,j} = a_{0,j} = x_j^{\max}$ ($l_{j,0} = a_{j,0} = -x_j^{\min}$). ■

Свойство 5. *Система (11) совместна только тогда, когда для каждой вершины* i *выполняется условие* $l_{0,i} \ge -l_{i,0}$.

Доказательство. Действительно, если для какой-либо вершины i выполняется неравенство $l_{0,i} < -l_{i,0}$, то $l_{0,i} + l_{i,0} < 0$ и существует цикл из вершины 0 в вершину 0 отрицательной длины, проходящий через вершину i, что противоречит условию сформулированной теоремы. Это следует также из свойства 3. ■

Если в графе, соответствующем системе (11), найдется цикл отрицательной длины и существуют пути $(0,i)$ и $(i,0)$ для какой-либо входящей в цикл вершины i, то для нее будет выполняться неравенство $l_{0,i} < -l_{i,0}$, поскольку $l_{0,i} = -\infty$, $-l_{i,0} = \infty$.

Свойство 6. *Решение системы (11) останется допустимым, если с повышением значения какой-либо переменной* x_i *повышать значения некоторых переменных* x_j*, предшествующих* x_i *на путях от* 0 *до* i*, при условии соблюдения верхних границ* $l_{0,j}$*, а также если с понижением значения какой-либо переменной* x_i *понижать значения некоторых переменных* x_j*, следующих за* x_i *на путях от* i *до* 0*, при условии соблюдения нижних границ* $-l_{j,0}$.

Это свойство аналогично свойству 3 следует из леммы.

Свойство 7. *Если в графе* G *из какой-либо вершины* i *(в какую-либо вершину* i*) исходит дуга только в* 0 *(входит дуга только из* 0*) и решением (11) будет какой-либо набор* $x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ...$*, то значение* x_i^0 *можно заменить на любое значение в интервале* $\left[x_i^{\min}; x_i^0\right]$ ($\left[x_i^0; x_i^{\max}\right]$) *без потери совместности системы.*

Это свойство следует из свойства 6, а также становится очевидным при непосредственном рассмотрении неравенств (1).

Свойство 8. *Если какой-либо набор* $x_1^0, x_2^0, ...$ *значений переменных удовлетворяет разностным неравенствам и выполняется* $-l_{i,0} \le x_i^0 \le l_{0,i}$*, то этот набор является решением системы (11).*

Это свойство следует из свойства 2.

Свойство 9. *Если какой-либо набор* $x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ...$ *является решением системы (11), то* $x_1^0+\delta, x_2^0+\delta, ..., x_i^0+\delta, ...$ *является решением той же системы при выполнении условия* $-l_{i,0} \le x_i^0+\delta \le l_{0,i}$.

Свойство 9 следует из свойства 8 и очевидного тождества $x_j - x_i = \left(x_j+\delta\right) - \left(x_i+\delta\right)$ для всех разностных неравенств. В работе [5] свойство разностных ограничений сохранять совместность при изменении значений переменных на общую величину в существующем решении сформулировано в виде отдельной леммы.

Свойство 10. *Если какой-либо набор* $x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ...$ *является решением системы (11), то* $x_1^0+\delta, x_2^0+\delta, ..., x_i^0+\delta, ...$ *является решением той же системы при любом* δ*, для которого выполняется условие* $\max\limits_i\left(-l_{i,0}-x_i^0\right) \le \delta \le \min\limits_i\left(l_{0,i}-x_i^0\right)$.

Это свойство следует из свойства 9.

Свойство 11. *Справедливы равенства* $\min\limits_i\left(l_{0,i}-x_i^0\right) = \min\limits_i\left(x_i^{\max}-x_i^0\right)$, $\min\limits_i\left(x_i^0+l_{i,0}\right) = \min\limits_i\left(x_i^0-x_i^{\min}\right)$.

Доказательство. Пусть имеется решение, такое, что $l_{i,0} \le x_i^0 \le l_{0,i}$ для всех i. Согласно свойству 10 при любом δ, таком, что $\max\limits_i\left(-l_{i,0}-x_i^0\right) \le \delta \le \min\limits_i\left(l_{0,i}-x_i^0\right)$, набор значений $x_i^0+\delta$ будет решением системы. Следовательно, при любом таком δ будут выполняться соотношения $x_i^{\min} \le x_i^0+\delta \le x_i^{\max}$, а значит, и соотношения $\min\limits_i\left(l_{0,i}-x_i^0\right) \le \min\limits_i\left(x_i^{\max}-x_i^0\right)$ и $\min\limits_i\left(x_i^0+l_{i,0}\right) \le \min\limits_i\left(x_i^0-x_i^{\min}\right)$. Если $\delta = \min\limits_i\left(l_{0,i}-x_i^0\right)$ ($\delta = \max\limits_i\left(-l_{i,0}-x_i^0\right)$), то для соответствующих x_i^0 будет выполняться $x_i^0+\delta = l_{0,i}$ ($x_i^0+\delta = -l_{i,0}$). Следовательно, согласно свойству 4 для каких-то x_j^0 будет выполняться $x_j^0+\delta = x_j^{\max} = l_{0,j}$ ($x_j^0+\delta = x_j^{\min} = -l_{j,0}$), т. е. $\min\limits_i\left(l_{0,i}-x_i^0\right) \ge \min\limits_i\left(x_i^{\max}-x_i^0\right)$ ($\min\limits_i\left(x_i^0+l_{i,0}\right) \ge \min\limits_i\left(x_i^0-x_i^{\min}\right)$). ■

Согласно теореме вычислительная сложность алгоритма поиска исходного решения системы DBM, основанного на представлении системы в виде сети ограничений, может быть сведена к сложности методов нахождения кратчайших путей от одной вершины ко всем остальным в графе с возможными отрицательными весами, выявляющих циклы отрицательной длины. Например, эту задачу можно решить с помощью алгоритмов Форда – Беллмана [3] или Флойда – Уоршалла [5], определяющих, в частности, наличие циклов отрицательной длины за время $\mathrm{O}(n^3)$.

При изменении значения x_i^0 одной из переменных, если для нового ее значения $x_i^/$ выполняется $-l_{i,0} \le x_i^/ \le l_{0,i}$, строить новое решение можно, например, следующими способами:

1. Если $x_i^/ - x_i^0 = \delta \le \min\limits_j \left(x_j^{\max} - x_j^0 \right)$ при увеличении x_i^0 ($x_i^0 - x_i^/ = \delta \le \min\limits_j \left(x_j^0 - x_j^{\min} \right)$ при уменьшении x_i^0), то все переменные можно увеличить (уменьшить) на δ (см. свойство 11). Очевидно, что сложность такого метода равна $\mathrm{O}(n)$. Также из свойства 6 следует, что увеличивать (уменьшать) необходимо значения только тех переменных, которые предшествуют x_i на путях от 0 до i (следуют за x_i на путях от i до 0). Таким образом, предполагая, что количество таких переменных составляет в среднем половину от их общего количества, оценку сложности можно уменьшить вдвое.

2. Если условия для $x_i^/$ из первого способа не выполняются, можно применить следующий алгоритм:

Шаг 1. Увеличиваем (уменьшаем) $x_i^0, i = i_0$, до требуемого значения $x_i^/$ и присваиваем соответствующей вершине графа G временную числовую метку, равную $x_i^/$.

Шаг 2. Рассматриваем значения переменных x_j^0 в вершинах графа G, смежных в ориентированном смысле на путях от 0 (до 0) (свойство 6), кроме самой вершины 0, с любой вершиной i из тех, которым присвоена временная метка. Если для какой-либо x_j не выполняется условие $x_j^0 - x_i^/ \le a_{ij}$ ($x_i^/ - x_j^0 \le a_{ji}$), то устанавливаем ее значение в $x_j^/ = x_i^/ + a_{ij}$ ($x_j^/ = x_i^/ - a_{ji}$) и присваиваем либо обновляем соответствующей ей вершине временную метку $x_j^/$. Далее метку $x_i^/$ делаем постоянной. Если в графе G присутствуют только постоянные метки, алгоритм останавливается; если нет, повторяем шаг 2.

Таким образом, при изменении значения x_i^0 одной из переменных x_i строится дерево допустимых x^0-расстояний между этой переменной и, в среднем, половиной из остальных. Сложность такого метода можно оценить как $\mathrm{O}\left(\frac{m}{2} + \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} \right)$ аналогично оценкам для алгоритма Дийкстры.

Данный способ является более универсальным, чем метод, рассмотренный в разд. 1, так как не зависит от порядка индексации переменных. При помощи приведенного алгоритма можно также скорректировать систему и найти ее решение, если $x_i^/ < -l_{i,0}$ ($x_i^/ > l_{0,i}$). Для этого на шаге 2 в число рассматриваемых вершин нужно также включить и вершину 0 и, если не выполняются условия $0 - x_i^/ \le a_{i,0}$ ($x_i^/ - 0 \le a_{0,i}$), увеличивать $a_{i,0}$ ($a_{0,i}$) до выполнения этих условий, т. е. при невыполнении $-l_{i,0} \le x_i^/ \le l_{0,i}$ для восстановления совместности системы достаточно расширить некоторые интервальные ограничения.

Способ 2 подходит для случая, когда желательны как можно меньшие изменения значений переменных. Если такого ограничения нет, то соблюсти совместность можно еще менее вычислительно сложным способом.

3. Пусть значение x_i^0 какой-либо переменной x_i увеличено (уменьшено) на величину $\delta \le l_{0,i} - x_i^0$ ($\delta \le x_i^0 + l_{i,0}$). Значения находящихся на путях от 0 до i (от i до 0) переменных x_j,

для которых выполняется условие $x_i^{/} - x_i^0 = \delta \le l_{0,j} - x_j^0$ ($x_i^0 - x_i^{/} = \delta \le x_j^0 + l_{j,0}$), увеличиваются (уменьшаются) на δ. Значения остальных, находящихся на путях от 0 до i (от i до 0) переменных x_k устанавливаются в $l_{0,k}$ ($-l_{k,0}$). Совместность системы при новом наборе значений переменных сохранится, так как значения переменных x_k, установленные в $l_{0,k}$ ($-l_{k,0}$), составляют часть максимального (минимального) решения и уменьшенные (увеличенные) по сравнению с максимальным (минимальным) решением значения $x_j^{/}$ переменных x_j, если они находятся на путях от k до 0 (от 0 до k), не влияют на совместность. С другой стороны, значения тех переменных, которые находятся на путях от 0 до k (от k до 0), равны $x_j^0 + \delta \ge x_k^0 - s_{j,k}^0 + \delta \Leftrightarrow x_k^0 - x_j^0 \le s_{j,k}^0$ ($x_j^0 - \delta \le x_k^0 + s_{k,j}^0 - \delta \Leftrightarrow x_j^0 - x_k^0 \le s_{k,j}^0$). Очевидно, что оценка сложности такого способа составляет $\mathrm{O}(n)$.

4. Если в разностных неравенствах из (1) переменная x_i встречается только с коэффициентом $+1$ (-1), то очевидно (и по свойству 7), что значение x_i можно уменьшать до $x_i^{\min}$ (увеличивать до $x_i^{\max}$) без изменения значений остальных переменных.

Заключение

Для систем неравенств класса DBM разработаны два метода поиска решений, позволяющие получить несколько решений одной индивидуальной задачи и для большинства задач найти множества решений, составляющие непрерывные области. Один основан на методе Фурье – Моцкина, другой – на представлении системы в виде сети ограничений.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что с точки зрения универсальности и вычислительной сложности для решения описанного вида систем с большим количеством переменных предпочтительным является использование сетевого метода. Описанные методы могут быть использованы для решения практических задач и подзадач построения расписаний работ, непрерывного движения объектов по сети пересекающихся маршрутов и других важных вопросов.

Список литературы

1. Рубанов, И.В. Задача выбора маршрутов движения объектов при ограничении на сближение / И.В. Рубанов, М.С. Баркетов, М.Я. Ковалев // Танаевские чтения : докл. Междунар. науч. конф., Минск, 27–29 марта 2014 г. – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2014. – С. 136–140.
2. Peron, M. An Abstract Domain Extending Difference-Bound Matrices with Disequality Constraints / M. Peron, N. Halbwachs. – Grenoble, France : Vérimag, 2006. – 15 p.
3. Bellman, R. On a Routing Problem / R. Bellman // Quarterly of Applied Mathematics. – 1958. – Vol. 16, no. 1. – P. 87–90.
4. Данциг, Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения / Дж. Данциг. – М. : Прогресс, 1966. – 600 с.
5. Кормен, Т. Алгоритмы, построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест ; пер. с англ. под. ред. А. Шеня. – М. : МЦНМО, 2002. – 960 с.
6. Писарук, Н.Н. Исследование операций / Н.Н. Писарук. – Минск : БГУ, 2015. – 304 с.
7. Solving Systems of Difference Constraints Incrementally / G. Ramalingam [et al.] // Algorithmica. – 1999. – Vol. 23. – P. 261–275.
8. Fourier, J.B.J. Solution d'une question particulière du calcul des inégalités / J.B.J. Fourier. – France, 1826.
9. Герман, В.Н. Решение линейных ограничений над полем вещественных и рациональных чисел / В.Н. Герман // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 4. – С. 123–133.

10. On Solving Boolean Combinations of UTVPI Constraints / Sanjit A. Seshia [et al.] // J. on Satisfability, Boolean Modeling and Computation. – 2007. – Vol. 3. – P. 67–90.

Поступила 13.07.2016

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: irubanov@inbox.ru

I.V. Rubanov, M.S. Barketau, M.Y. Kovalyov

TWO METHODS OF SOLVING THE SYSTEM OF DIFFERENCE AND INTERVAL CONSTRAINTS

We develop two methods of solving DBM system. One method is based on Fourier – Motskin elimination scheme, it has complexity O(n^3) for finding initial solve and complexity O(n^2) for finding solve by changing one of variable value for some cases. The other method is based on the network of constraints approach, it has complexity O(n^3) for finding initial solve and $\mathrm{O}(n)$ or approximately $\mathrm{O}\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}\right)$ for finding solve by changing one of variable value if it is limited by special bounds.