



AVALIAÇÃO NUMÉRICA DE FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO EM PROBLEMAS DE UMA TRINCAS

Wellington Vital da Silva

Gilberto Gomes

Alvaro Martins Delgado Neto

Guilherme Oliveira Ferraz de Paiva

welington.vital@gmail.com

ggomes2007@gmail.com

alvaro.martins.bok@gmail.com

guilherme_07@hotmail.com

Universidade de Brasília - UNB

Campus Darcy Ribeiro SG-12, 70.910-900, Distrito Federal, Brasília, Brasil

Abstract. *The Fracture Mechanics has become an important analytical tool in the design and subsequent operation in structures that may develop cracks during their service life. In this regard, and based on the principle of linear elastic fracture mechanics (LEFM) and the knowledge of their stress intensity factors (FITs), this paper proposes numerically evaluate these factors from the use of two analysis programs: the well-established ABAQUS CAE package for analysis with finite element method (FEA) and an academic program called BemCracker2D still under testing, using a formulation based on the dual boundary element method (DBEM) and the J-integral technique for calculating the FITs. The latter is based on object-oriented programming and written in C++ language, having an interface with MATLAB for treatment of modeling, meshing and viewing results. This work is limited to the application and use of BemCracker2D program to obtain the stress factors as proposed, and will not be addressed computational aspects related to DBEM formulation or about the program. Examples of open literature for multiple cracks models are presented, aiming to certify the efficiency and accuracy of the DBEM front of the FEM in this type of problem.*

Keywords: *Stress Intensity Factors, Integral-J, ABAQUS CAE.*

1 INTRODUÇÃO

As estruturas de concreto são projetadas com a finalidade de garantir à estabilidade e funcionalidade. Portanto, deve-se evitar os Estados Limites Últimos – ELU's que são aqueles relacionados ao colapso estrutural de um elemento ou de toda a estrutura, ELU deve ter uma probabilidade mínima de ocorrer, uma vez que pode acarretar na perda da vida útil da estrutura e ocasionar grandes prejuízos financeiros. Assim, o projeto estrutural na engenharia baseia-se em evitar falhas por colapso plástico. (Strohaecker, e Bastian, 1986). A propriedade normalmente especificada em códigos de engenharia é a tensão de escoamento convencional ou, em componentes mecânicos, a faixa de dureza.

Desta forma, a tensão de projeto será a tensão que levaria o componente ao colapso plástico dividido por um fator de segurança. Conforme este procedimento o fator de segurança não considera a possibilidade de fratura frágil. Geralmente é aceito que o fator de segurança evita a ocorrência de fraturas frágeis. Entretanto, na prática, tem-se verificado que isto nem sempre é verdadeiro (Brebba, 1978). Existem situações em que falha de componentes ocorrem a partir de trincas com tensões aplicadas abaixo da tensão de projeto, por isso o estudo das fissuras é essencial para elaboração de projetos estruturais.

Nesse ínterim a Mecânica da Fratura fornece os conceitos e equações utilizadas para determinar como as trincas crescem e quanto podem afetar a resistência das estruturas. A Mecânica da Fratura divide-se em: Mecânica da Fratura Linear-Elástica (MFLE) e Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP) (Williams, 1957). A primeira normalmente é utilizada em situações em que a fratura ocorre ainda no regime linear-elástico que será objetivo deste trabalho. O segundo se relaciona no regime plástico, ou seja, na iminência do esgotamento da capacidade resistente devido as tensões de tração no concreto ser maior que a resistência a tração do mesmo.

Assim, o Fator de Intensidade de Tensão “Stress intensity factor” (SIF) é um elemento essencial da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFEL) são parâmetros para avaliação da integridade estrutural de estruturas que contenham fissuras e campos de tensões singulares. Tavares *et al* (2004). A SIF dá uma medida da intensidade do campo de tensões na região da ponta da fissura (Williams, 1957).

A mecânica da fratura linear elástica pode ser usada para descrever o comportamento das trincas (Portela *et al*, 1989). O postulado fundamental desta área de estudo é que o comportamento da trinca é determinado exclusivamente pelos valores dos fatores de intensidade de tensão, que são uma função do carregamento aplicado e da geometria da estrutura trincada e, assim, desempenham um papel fundamental nas aplicações da mecânica da fratura linear elástica.

Este parâmetro dá a possibilidade de analisar o crescimento da fissura possível ou a possível falha catastrófica se uma determinada carga é aplicada à estrutura. (Portela, 1993). Os SIF's podem ser calculados usando análise de tensão e deformação ou parâmetros que medem a energia liberada pelo crescimento da trinca (Cartwright e Rooke, 1974).

A avaliação dos fatores de intensidade de tensão podem ser obtidos por meio de técnicas analíticas ou numéricas. Normalmente, os analíticos são mais complexo para calcular; no entanto eles têm algumas vantagens, porque uma solução analítica pode ser aplicado a uma gama de trinca com diferentes comprimentos. As técnicas numéricas requerem o cálculo de tensão de campo para cada comprimento da trinca, por conseguinte, para cada valor de SIF.

O objetivo deste artigo é descrever um método numérico para avaliar o SIF através do programa BEMLAB2D Delgado Neto e G. Gomes (2016), em uma viga biapoiada com diferentes tamanhos da trinca, para calibrar os resultados do programa BEMLAB2D foram modeladas as vigas no ABAQUS CAE.

A formulação utilizada no BEMLAB2D é baseada no Método de Elementos de Contorno (MEC) sua interface gráfica é do tipo GUI para pré- e pós processamentos, escrita em MATLAB voltada para geração e visualização bidimensionais de diferentes tipos de malha. de malha A formulação do MEC incorpora a solução analítica de forma fechada fundamental para uma descontinuidade retangular em um homogêneo, isotrópico e metade do espaço linearmente elástica (Gomes, 2006). A precisão do cálculo do fator de intensidade de tensão é satisfatoriamente examinados para retangulares, em forma de moeda de um centavo e planares elíptica rachaduras. avaliação precisa e rápida do fator de intensidade de tensão para rachaduras planares mostra o procedimento proposto é robusto para o cálculo SIF e crack fins de propagação.

2 MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS NA ANÁLISE DA MECÂNICA DA FRATURA

Dentro dos limites da análise linear elástica, o campo de tensão é infinito na ponta de uma trinca. Isto foi primeiramente reportado por Brahtz (1933) e depois por Williams (1952), que, após uma investigação da forma analítica dessas singularidades, demonstrou que sob todas as combinações possíveis das condições de contorno, a tensão se torna infinita na ponta de uma trinca (Xanthis *et al*, 1981).

A presença da singularidade de tensão no modelo numérico cria dificuldades numéricas consideráveis em virtude da necessidade de representar simultaneamente ambas as tensões quando aproxima da singularidade. A performance das mais importantes abordagens que tem sido idealizadas para superar essa dificuldade, no método dos elementos finitos (MEF), no Método dos Elementos Finitos Estendidos (XFEM), no Método dos Elementos de Contorno (MEC) e em Métodos Sem Malha (MSM), são sucintamente revisadas na sequência.

Um procedimento comum, usado nas aplicações iniciais da mecânica da fratura com o Método dos Elementos Finitos, é ignorar a presença de singularidade e tentar diminuir seu efeito na solução geral usando refinamento da malha na vizinhança da ponta da trinca (Blandford, 1981). O valor numérico das componentes da tensão calculadas na ponta da trinca será sempre finito, mas, pode ser feito tão grande quanto desejado aumentando-se o refinamento da malha Santana (2015).

Obviamente, este procedimento é dependente da malha e, se ele converge, produzirá uma taxa de convergência lenta em todo o domínio do problema, como mostrado por Tong et al (1973). Isto é obviamente uma consequência da impossibilidade de representar simultaneamente ambas as tensões singular e a finita no modelo numérico, simplesmente com um procedimento de refinamento de malha (Portela, Aliabadi e Rooke, 1992). Nessa abordagem, os fatores de intensidade de tensão são calculados a partir de um procedimento de correlação, envolvendo uma comparação entre os resultados numéricos do campo de deslocamento ou do de tensão e as respectivas soluções analíticas, representadas na forma de uma expansão em séries de autofunções em volta da ponta da trinca (Hertzberg, 1989). Tipicamente, os fatores de intensidade de tensão obtidos a partir desse procedimento de correlação nos pontos nodais da face da trinca, são então extrapolados para a ponta da trinca. Consequentemente, os fatores de intensidade de tensão não podem ser computados

precisamente somente com o procedimento de refinamento da malha Santana (2015). Isto é mostrado, por exemplo, no trabalho de Portela et al (1992), onde os valores dos fatores de intensidade de tensão, calculados por um procedimento de correlação dos deslocamentos, são comparados com aqueles valores obtidos com a técnica da Integral J, para vários problemas de trinca analisados com o Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD).

Uma vez que esteja governado por um componente um estado de deformação plana Eq. 1 a MFLE pode ser aplicada com uma notável precisão. O valor do fator de intensidade de tensões está diretamente relacionado com a tensão aplicada e tamanho de defeito Eq. 2 (Harrison, 1976). O fator de forma (γ) na função é encontrado na literatura para um grande número de combinações de configuração do componente/geometria de trinca e modos de carregamento. A “Fig. 1”, apresenta soluções para uma placa de grandes dimensões solicitada remotamente, com defeito central passante e com defeito lateral (Rooke, 1974). A Fig. 1.c” considera o efeito das dimensões na placa entalhada, na qual verifica-se a tendência de que, quanto maior o defeito maior a severidade de solicitação mecânica (Ewalds, 1986).

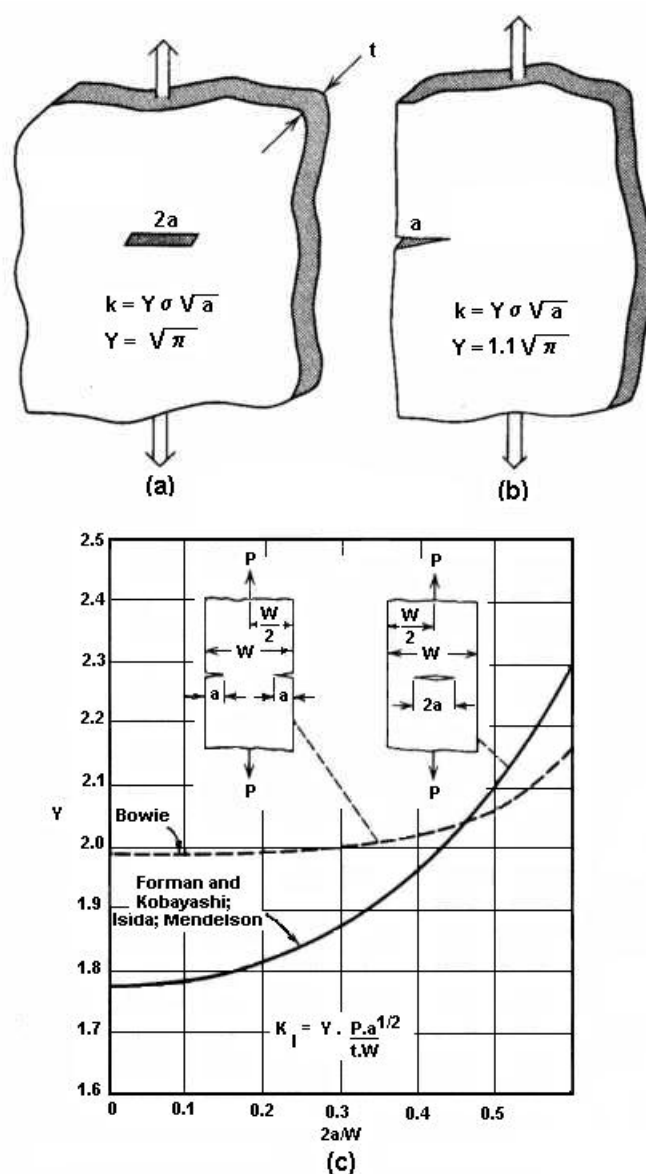


Figura 1 - a, b) Valores do fator de forma para uma trinca passante e lateral em uma placa de grandes dimensões e c) influência da largura do componente trincado sobre o fator de forma.

Para situações em que tem-se trincas superficiais ou internas também existem expressões que possibilitam a aplicação da mecânica da fratura. Na “Fig. 2” é mostrado um gráfico que indica a correção a ser feita. Com relação a estes tipos de defeitos, na trinca superficial o valor de "a" passa a ser a profundidade do defeito. No defeito interno considera-se "a" como a metade da altura do defeito. A expressão a ser utilizada passa a ser:

$$K = \gamma\sigma(a/Q)^{0,5} \tag{1}$$

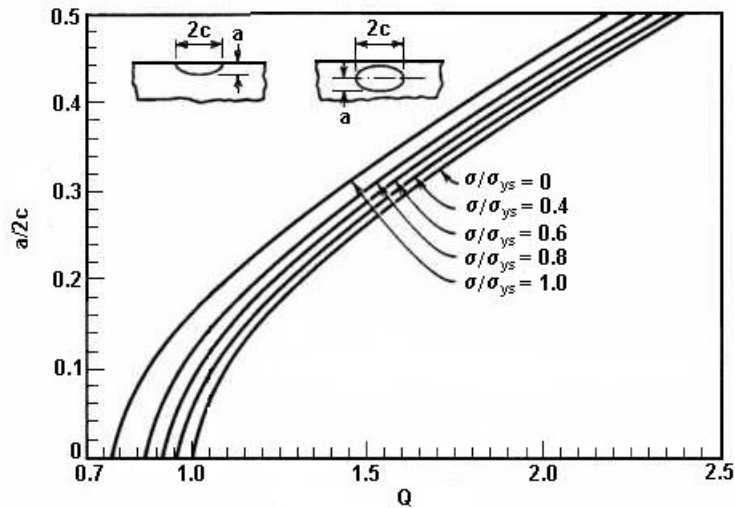


Figura 2- Fatores de correção a serem empregados na análise de componentes com trincas superficiais ou internas Harrison (1980).

A partir destas informações pode-se definir qual o tamanho de defeitos críticos para determinado nível de carregamento em um componente ou, a partir de um componente trincado, qual o nível de carregamento admissível. A mecânica da fratura é aplicada, ainda, para a seleção de materiais e/ou tratamentos térmicos. É esta metodologia que possibilita a otimização na escolha pois fornece dados quantitativos de tenacidade ao projetista.

3 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR -MFEL

Dividindo-se os modos de carregamento possíveis em uma trinca chega-se a três formas, conforme mostra a “Fig. 3”.

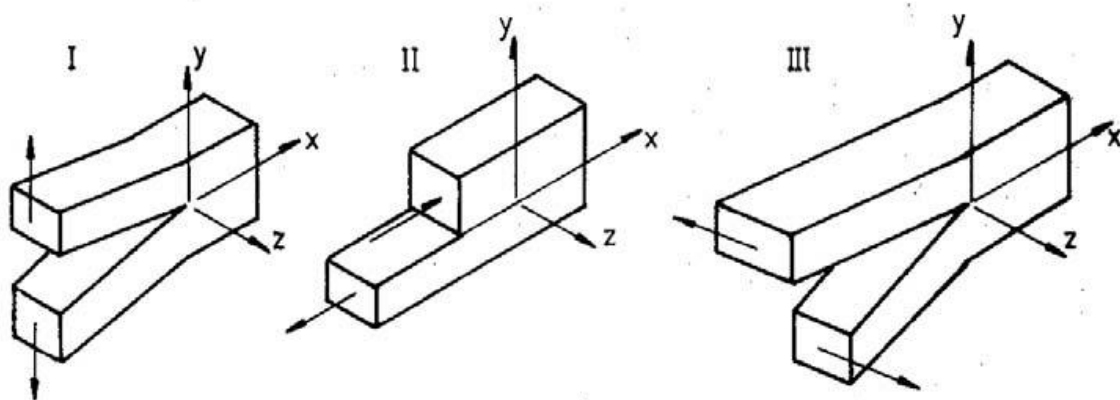


Figura 3 - Modos de carregamento básicos de uma trinca Strohaecker (1986).

- -carregamento I (abertura da ponta da trinca);
- carregamento II (cisalhamento puro - deslocamento das superfícies da trinca paralelamente a si mesmas e perpendiculares à frente de propagação);
- carregamento III (rasgamento - deslocamento das superfícies da trinca paralelamente a si mesmas).

O campo de tensões na vizinhança da ponta de uma trinca pode ser caracterizado em termos de um fator intensidade de tensões (KIC) (“Fig. 4”) que, em coordenadas polares, é dado por:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{2\sqrt{\pi}r^{0.5}} \cdot f_{ij}(\phi) \quad (2)$$

Onde:

- K_I é o fator de intensidade de tensões para o modo de carregamento I (carregamento em tração, deslocamento das superfícies da trinca perpendicularmente a si mesmas),
- r é a distância da ponta da trinca,
- ϕ é o ângulo medido a partir do plano da trinca,
- f_{ij} é uma função adimensional de ϕ , cujo módulo varia entre 0 e 1.

Expressões similares são encontradas para trincas submetidas aos modos de carregamento II e III.

É importante ressaltar que, dado um determinado modo de carregamento, a distribuição de tensões em torno de qualquer trinca em uma estrutura com comportamento no regime linear-elástico é semelhante, sendo completamente descrita pelo parâmetro K. Isto é, a diferença da magnitude de tensões alcançada entre componentes trincados depende apenas do parâmetro fator de intensidade de tensões K que é governado pela configuração geométrica do componente trincado e pelo nível e modo do carregamento imposto.

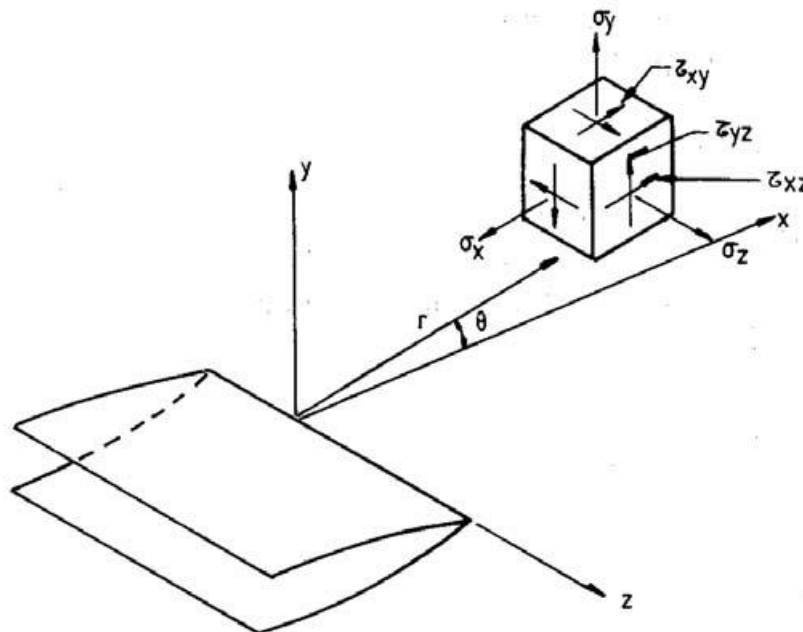


Figura 4 - Coordenadas para descrição do campo de tensões na ponta de uma trinca Strohaecker (1986).

O conceito de factor de intensidade de tensão (K) é um resultado da análise bi-dimensional do campo de tensões na ponta da fissura como já mencionado. Esta análise foi realizada por Williams (1957), tendo em conta trabalhos de Westergaard (1939). Usando um sistema de coordenadas centrado na ponta da trinca e de acordo com a análise de William, os componentes perto da ponta fissura o campo de tensão são proporcionais a $K/r^{1/2}$ onde K é o fator de intensidade de tensão. A abertura de fissuras pode corresponder a um dos três processos básicos definidos pela Eq. 2, o modo de abertura, o modo de deslizamento e o modo de rasgamento, ou a qualquer uma das suas combinações; Assim, existem três valores do factor de intensidade de tensão básicos indicados com os subscritos I, II e III. Para cada modo, o campo de tensões na região da ponta da fissura pode ser calculada usando as expressões:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi.r}^{0.5}} f_{ij}^{(I)}(\phi)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi.r}^{0.5}} f_{ij}^{(II)}(\phi) \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi.r}^{0.5}} f_{ij}^{(III)}(\phi)$$

Onde R e θ são as coordenadas polares do sistema de eixos que têm origem na ponta da fissura.

4 DETERMINAÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO

Segundo Williams (1957) a Integral J é usada para calcular os fatores de intensidade de tensão. Considere um sistema cartesiano de referência definido na ponta de uma trinca livre de tração, como representado na “Fig. 3”. A Integral J é definida como:

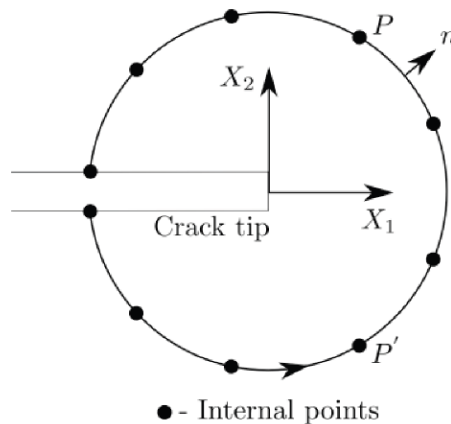


Figura 5-Sistema de coordenadas de referência e caminho de contorno para a Integral J Santana (2015).

$$J = \int_s (W_{n1} - t_j u_{j,1}) ds \quad (4)$$

Onde S é um contorno arbitrário circundando a ponta da trinca, W é a densidade de energia de deformação, t_j são as componentes de tração e n_1 é a componente-x da normal (unitária) ao caminho de contorno, que aponta para fora dele. A relação entre a Integral J e os fatores de intensidade de tensão é dada por:

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (5)$$

Onde E' é o módulo de elasticidade E para o estado plano de tensão e $E' = E/(1-\nu^2)$ para o estado plano de deformação.

4.1 MODELAGEM NUMÉRICA DO SIF

Inicialmente, foi feita uma análise com MEF utilizando o programa ABAQUS CAE para avaliação dos SIF K_I (Integral-J) em uma viga com um furo centrado, como ilustrada na “Fig. 4”, foi realizada com intuito de calibrar o programa BC2D frente aos resultados do MEF. Três simulações, variando o tamanho da trinca e a malha, foram realizadas, objetivando comparar os valores obtidos dos SIFs quando a ponta da trinca situa-se a uma distância de 2.5, 6.4 e ≈ 12 mm do contorno do furo.

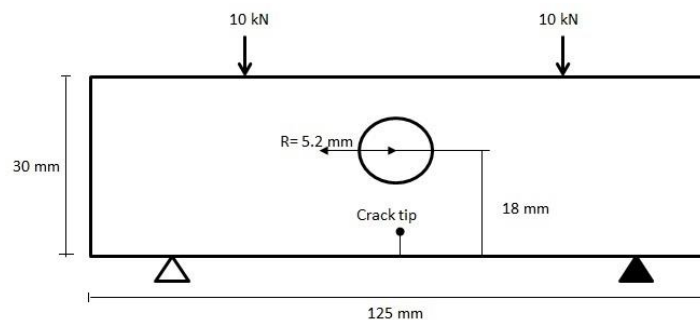


Figure 4. Viga teste para evolução da SIF.

4.2 Modelo em Elementos Finitos no ABAQUS CAE

Foi utilizado o ABAQUS CAE na modelagem elementos bidimensionais, três regiões foram definidas conforme “Fig. 5” e “Fig. 6”:

- Zona 1- Foram utilizados elementos triangulares CPS6: onde: 6-node *quadratic plane stress triangle*.
- Zona 2- Foram utilizados elementos triangulares CPS6: onde: 6-node *quadratic plane stress triangle*.
- Zona 3- Foram utilizados elementos CPS8R: An 8-node *biquadratic plane stress quadrilateral, reduced integration*.

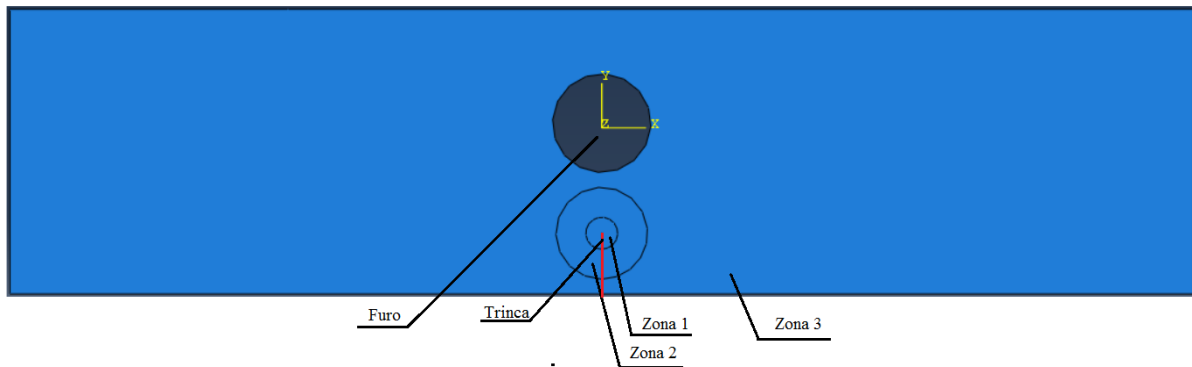


Figure 5. Regiões da viga teste.

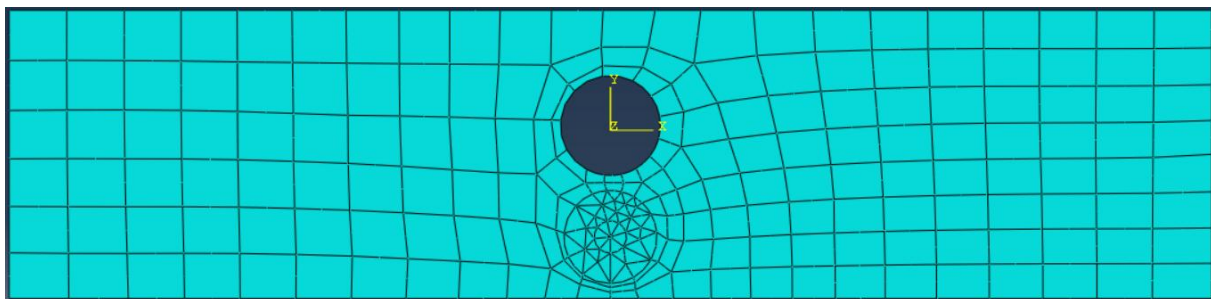


Figure 6. Malha de Elementos Finitos da viga teste.

4.3 Modelo em Elementos de Contorno usando o BEMLAB2D

Foi utilizado o programa BEMLAB2D, esta plataforma gráfica produzida pela implementação e manipulação gráfica no programa MATLAB. Que usa as formulações de MEC é capaz de gerar modelos bidimensionais com diversas características e formas geométricas como regiões infinitas ou semi-infinitas, regiões múltiplas e desconexas, fissura e furos.

Para tanto, foi utilizado o processador BEMOOP de Gomes (2006) é um resolvidor numérico que emprega o método dos elementos de contorno para solução de problemas elastostáticos bidimensional. Foi desenvolvido em linguagem de programação C++ e para seu funcionamento, necessita de arquivos de entrada no formato texto plano, contendo os parâmetros de configuração que são submetidos ao software para a execução da simulação.

O BEMLAB2D foi construído a partir de várias módulos, onde cada módulo é especialista em executar as atribuições de suas funções. A implementação desses módulos favorece a reutilização dos dados e de suas funcionalidades. Cada módulo independente pode ser reaproveitado por outros projetos de desenvolvimento de software, desde que sejam afins das funcionalidades oferecidas pelas GUI em questão. O BEMLAB2D é uma solução confiável, eficiente e versátil para apresentação de gráficos e resultados de modelos elastostáticos bidimensionais pela análise em MEC.

Assim, é apresentado através das “Fig. 7”, “Fig. 8” e “Fig. 9”, a modelagem das vigas com as dimensões das trincas de 2.5, 6.4 e ≈ 12 mm do contorno do furo.

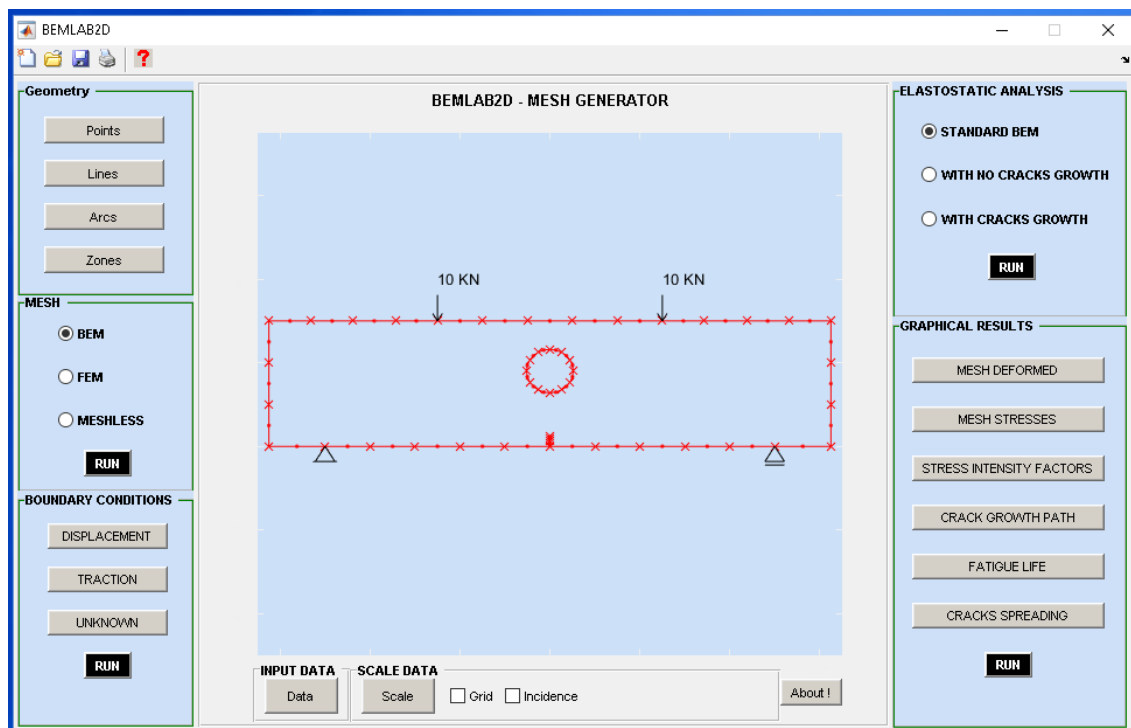


Figura 7- Malha da viga com trinca 2.5mm (gerada no BEMLAB2D)

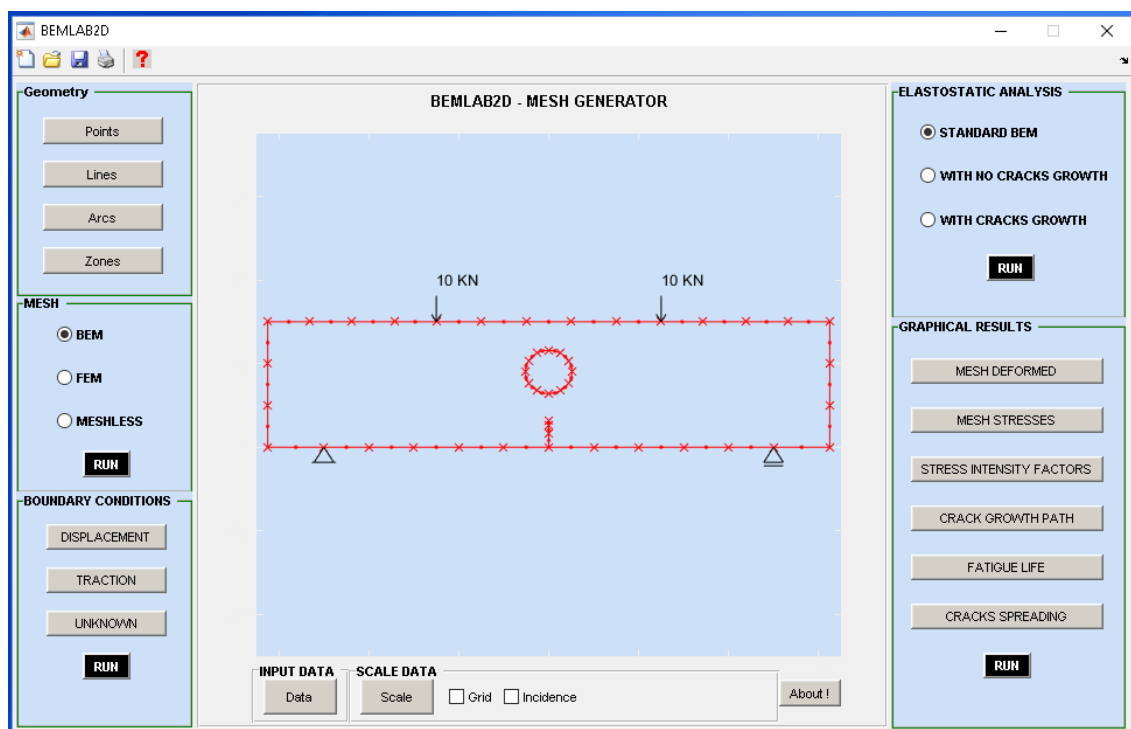


Figura 8- Malha da viga com 6.4mm (gerada no BEMLAB2D)

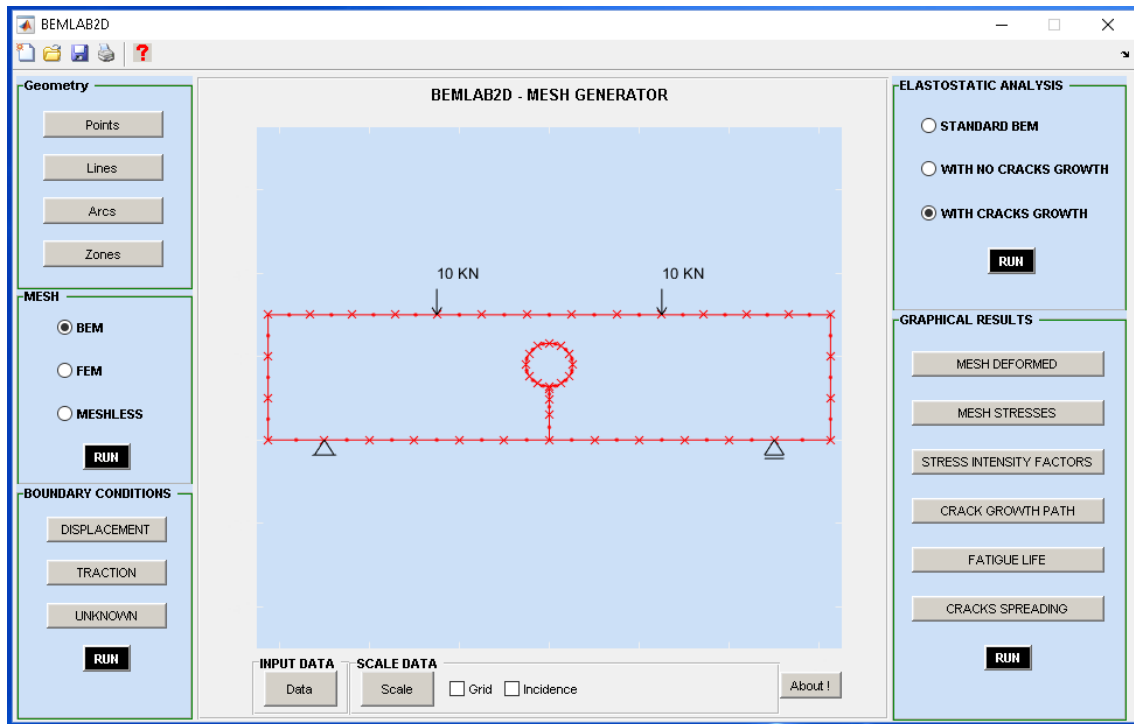


Figura 9-Malha da viga com 12.2 mm (gerada no BEMLAB2D)

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados através ABAQUS CAE estão apresentados nas “Tab. 1”, “Tab. 2” e “Tab. 3” como segue:

Tabela 1- Resultados usando ABAQUS

Trinca com comprimento de 2.5 mm			
Simulação	Nº de elementos na ponta da trinca	Número total de elementos	Valor da SIF
1	66	981	2,12
2	90	1075	1,9246
3	156	1218	1,83518
4	156	1865	1,80418
5	156	1885	1,61372
6	156	1960	1,544951
7	156	1964	1,47497

Tabela 2- Resultados usando ABAQUS

Trinca com comprimento de 6.4 mm			
Simulação	Nº de elementos na ponta da trinca	Número total de elementos	Valor do SIF
1	156	1049	2,75769
2	156	1389	2,73546
3	156	1489	2,62137
4	156	1504	2,617095

Tabela 3- Resultados usando ABAQUS

Trinca com comprimento de 12.1 mm			
Simulação	Nº de elementos na ponta da trinca	Número total de elementos	Valor do SIF
1	156	932	10,1617
2	156	1058	9,94375
3	156	1071	9,7129
4	156	1091	9,6278

Os gráficos das “Fig. 10”, “Fig. 11”, “Fig. 12”, e “Fig. 13” mostra a relação entre os números de elementos pelo valor da intensidade de tensão:

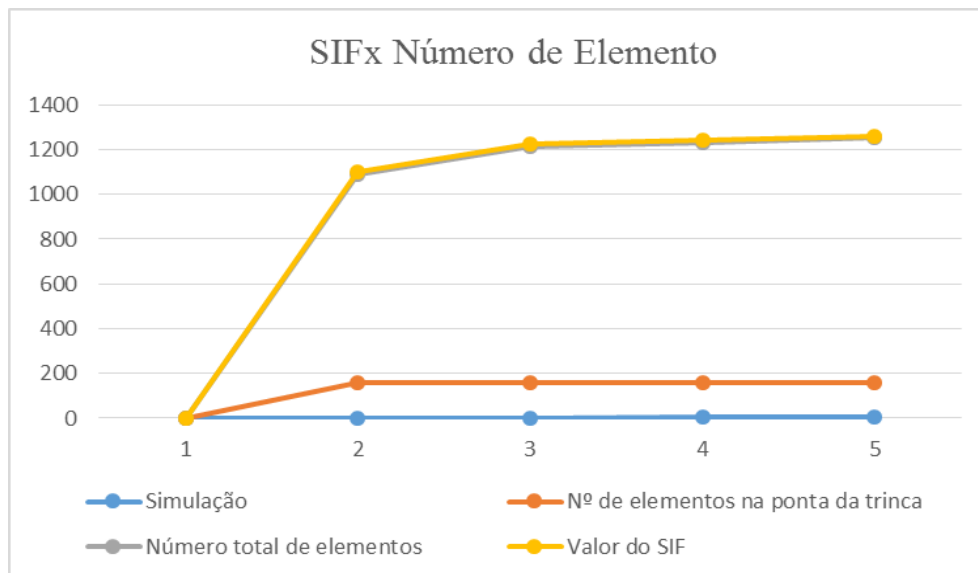


Figura 10-Gráfico mostra a relação em elementos e a SIF

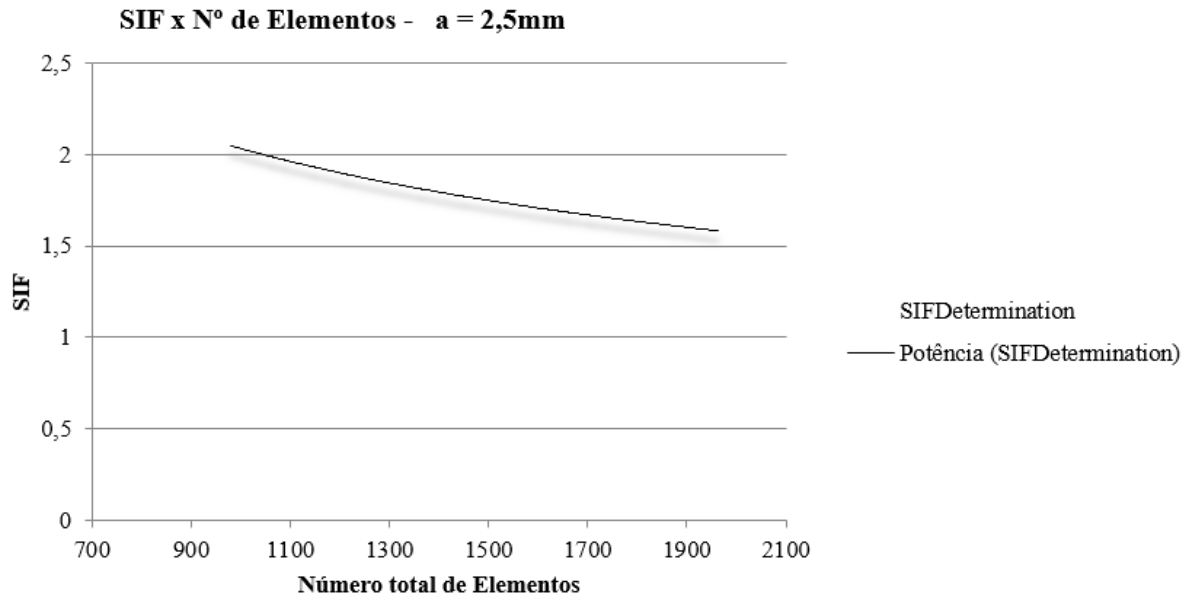


Figura 11-Gráfico mostra a relação em elementos e a SIF

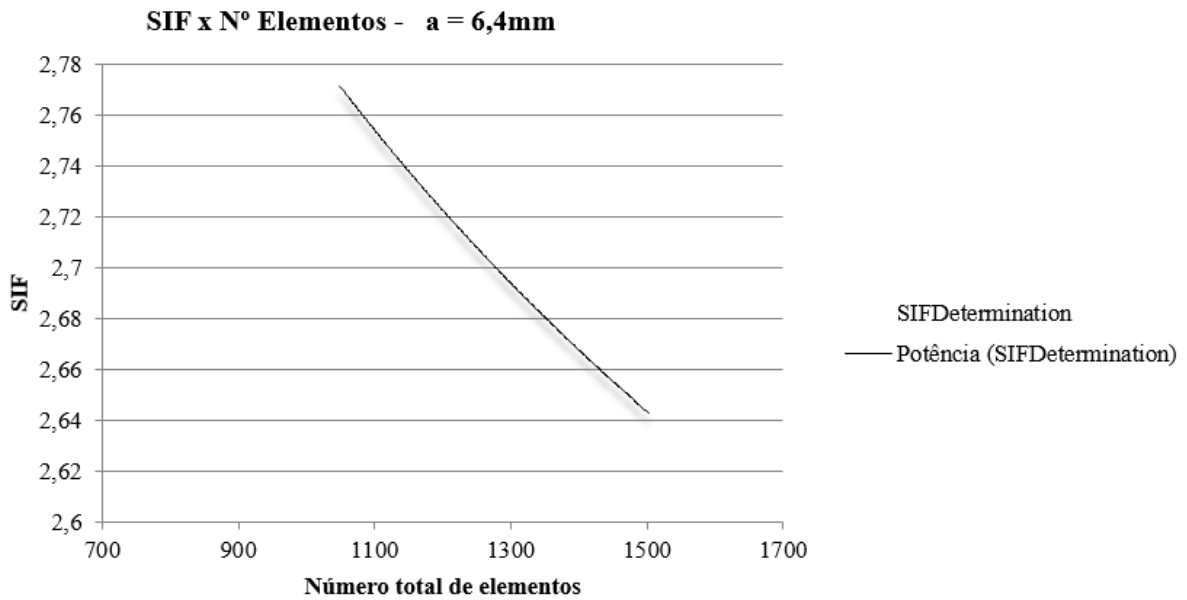


Figura 12-Gráfico mostra a relação em elementos e a SIF

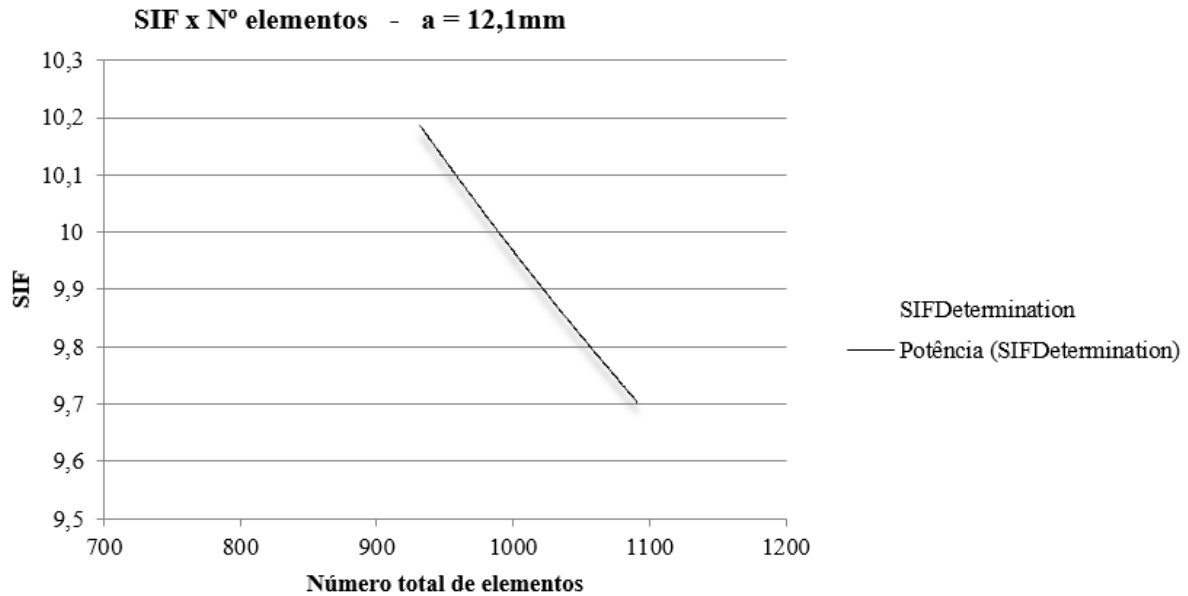


Figura 13-Gráfico mostra a relação em elementos e a SIF

Os resultados obtidos com o BC2D, para diferentes números de elementos, são comparados com aqueles obtidos pelo ABAQUS e apresentados na Tabela 1. Os valores em negrito correspondem aos valores finais referentes à convergência das respectivas malhas. Para a trinca mais próxima do furo (≈ 12 mm), o tamanho máximo permitido pelo ABAQUS (raio mínimo da Integral J) para executar a análise foi de 12.1 mm, enquanto com o BC2D este tamanho foi de 12.2 mm.

Tabela 4- Resultados usando ABAQUS e BEMLAB2D

Crack-tip distance (mm)	ABAQUS			BemCracker2D		
	Elements		KI	Elements		KI
	Crack-tip	Total		Crack	Total	
2.5	66	981	2.12	4/face		
	90	1075	1.93		54	
	156	1218	1.83		62	1.46
		1865	1.80		74	
		1885	1.61			
		1964	1.47			
6.4		1049	2.76	4/face	54	
	156	1389	2.73		62	2.63
		1489	2.62		74	
12.1/12.2		932	10.16	4/face	62	9.65
	156	1058	9.94		74	9.71
		1091	9.628		86	9.75
					98	9.77

Os resultados da “Tab.4”, mostram que tanto o MEF quanto o MEC possuem valores de KI idênticos quando a ponta da trinca se encontra distante da inclusão (2.5 e 6.4 mm), embora seja notória a discrepância entre o número de elementos contendo a ponta da trinca pelo MEF. Por outro lado, à medida que se aproxima da inclusão (12.1 e 12.2 mm), os valores obtidos com o MEF são inferiores aos do MEC, o que justifica a necessidade de um melhor refinamento da malha de Elementos Finitos-EF na região do furo ou na ponta da trinca.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer pelo apoio a esta e a outras pesquisas à: Universidade de Brasília e às Agências de fomento CNPq e CAPES.

7 REFERÊNCIAS

- Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto - procedimentos. Rio de Janeiro, Brasil, 2014, 238 p.
- Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., Cartwright, D.J., An Improved Boundary Element Formulation for Calculating Stress Intensity Factors: Application to Aerospace Structures, *J. Strain Analysis*, 22 (4), 1–5 (1987).
- Blandford, G.E., Ingraffea, A.R., Liggett, J.A., Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 17:387–404, (1981).
- Brebbia C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, London, (1978).
- D. J. Cartwright and D. P. Rooke. Approximate stress intensity factors compounded from known solutions. *Engineering Fracture Mechanics*, 6 (3), pp.563-571, 1974.
- D. P. Rooke and D. J. Cartwright. *Compendium of stress intensity factors*. Her Majesty's Stationery Office, London, 1976.
- Ewalds, H. L. and Wanhill, R.J.H., “*Fracture Mechanics, Edward*”, 1986.
- Gomes, G., 2000. Estrutura de dados para representação de modelos bidimensionais de elementos de contorno. Universidade de Brasília - UnB. Brasília, p. 110.
- Gomes, G., 2006. Aplicação dos métodos de elementos de contorno e reciprocidade dual em problemas de plasticidade 2D orientada a objeto. Universidade de Brasília - UnB. Brasília, p. 165.
- Goossens, M., Mittelbach, F., & Samarin, A., 1994. *The LaTeX Companion*. Addison-Wesley.
- Harrison, J. D., “Significance of Defects in Relation to Service Performance”, *International Institute on Welding and Met. Tech. Conf. Sydney, Australia*, setembro, 1976.
- Harrison, J. D., “The State-of-the-art in Crack Tip Opening Displacement (CTOD) Testing and Analysis”, *Welding Institute Report*, 108, abril, 1980.
- Hertzberg, R., “*Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*”, 3° ed. Wiley, New York, 1989.
- H. M. Westergaard. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, pp. A49-A53, June 1939.

- Hinton, E., Sienz, J., & Afonso, S. M. B., 1995. Experiences with Olhoff's 'exact' semi-analytical algorithm. In Olhoff, N. & Rozvany, G. I. N., eds, *First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-1)*, pp. 41–46.
- Hong H-K, Chen J.T., Derivation of integral equations in elasticity. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 114(6):1028–1044 (1988).
- Mattiasson, K., 1980. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, n. 1, pp. 145–153.
- Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P., The dual boundary element method: effective implementation for crack problems, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 33:1269–87, (1992).
- Portela, A., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., Boundary Element Analysis of V-Notched Plates, *Proc. of the fourth International Conference on Boundary Element Technology*, Windsor, Canada, edited by C. A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK (1989).
- Portela, A., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., Boundary Element Analysis of V-Notched Plates, *Proc. of the fourth International Conference on Boundary Element Technology*, Windsor, Canada, edited by C. A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK (1989).
- Portela, A., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., Efficient Boundary Element Analysis of Sharp Notched Plates, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 32: 445–470, (1991).
- Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P., Dual boundary element analysis of cracked plates: singularity subtraction technique, *Int. J. of Fracture*, 55:17-28 (1992).
- Ramm, E., 1981. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In Wunderlich, W., Stein, E., & Bathe, K. J., eds, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, pp. 63–89. Springer-Verlag.
- Rooke, D. P. e Cartwright, D.J. ,”Stress Intensity Factors, Her Majesty’s Stationery Office”, Londres, 1974.
- Santana, Elvis, Análise do crescimento à fadiga, interação e Coalescência de múltiplas trincas com o Método dos elementos de contorno dual. Enc/FT/UnB, dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, 2015.
- Sienz, J., 1994. *Integrated Structural Modelling, Adaptive Analysis and Shape Optimization*. PhD thesis, University of Wales/Swansea.
- STROHAECKER, T. R. e BASTIAN, F. L., “Avaliação do Efeito do Hidrogênio Sobre o Comportamento à Fratura de um Aço de Alta Resistência Mecânica”, Anais dos Painéis do Encontro sobre Gases em Metais e Ligas, São Carlos, SP, 1986.
- Williams, M.L., Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, *J. Applied Mechanics*, 526–528, (1952).
- M. L. Williams. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24, pp. 109-114, March, 1957.
- Xanthis, L.S., Bernal, M.J.M, Atkinson, C., The Treatment of the Singularities in the Calculation of Stress Intensity Factors Using the Integral Equation Method, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, 26:285–304, (1981).