



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS  
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING  
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

## UM ESQUEMA DE VOLUMES FINITOS PARA A SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS EM RESERVATÓRIOS NATURALMENTE FRATURADOS EM 2-D UTILIZANDO UM MODELO DE FRATURAS COM DIMENSÃO REDUZIDA

<sup>1</sup>Braian Schneider Brum

braiansch@hotmail.com

<sup>2</sup>Carla Sofia Freitas Perestrelo

carlaperestrelo@gmail.com

<sup>3</sup>Márcio Rodrigo de Araújo Souza

marciosouza@ct.ufpb.br

<sup>4</sup>Fernando Raul Licapa Contreras, <sup>5</sup>Paulo Roberto Maciel Lyra, <sup>6</sup>Darlan Karlo Elisiário de Carvalho

ferlicapac@gmail.com, prmlyra@padmec.org, dkarlo@uol.com.br

<sup>1</sup>Departamento de Engenharia Civil, UFPE, Av. Acadêmico Hélio Ramos s/n, CEP: 50670-901, Recife, PE, Brasil. <sup>2</sup>Departamento de Engenharia Civil, Arquitectura e Georrecursos - Instituto Superior Técnico, Avenida Rovisco Pais, 1049-001, Lisboa, Portugal. <sup>3</sup>Departamento de Engenharia de Energias Renováveis, UFPB, BR 230, km 21 s/n, CEP: 58059-900, João Pessoa, PB, Brasil. <sup>4,5,6</sup> Departamento de Engenharia Mecânica, UFPE, Av. Acadêmico Hélio Ramos s/n, CEP: 50670-901, Recife, PE, Brasil

**Resumo.** *O problema do escoamento bifásico em reservatórios de petróleo, heterogêneos e anisotrópicos, pode ser descrito por um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares. A modelagem deste problema representa um grande desafio, devido à complexidade dos ambientes deposicionais, incluindo camadas inclinadas e fraturas, que dificultam a construção de malhas estruturadas adequadas. No presente artigo, utilizou-se o Método de Volume Finitos com Aproximação do Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA-O) centrado na célula, o qual é capaz de lidar com tensores de permeabilidade completos e malhas poligonais arbitrárias, acoplado com um Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida (Lower-Dimensional Fracture Model - LDFM). O LDFM utiliza uma equação adicional associada à fratura que é tratada como uma entidade geométrica com dimensão inferior à do*

*problema original, ou seja, para problemas em 2-D, a fratura tem apenas uma dimensão no espaço. Isso reduz consideravelmente o número de graus de liberdade do sistema. É importante observar que o campo de velocidades nas superfícies de controle que coincidem com as fraturas é dependente, tanto das pressões nas fraturas, quanto das pressões nos volumes de controle que representam a rocha matriz. A acurácia da formulação proposta foi verificada através da resolução de alguns problemas envolvendo uma matriz fraturada.*

***Palavras-chave:*** *Escoamento Bifásico de Água e Óleo, Rochas Naturalmente Fraturadas, Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida (LDFM), MPFA-O*

## 1 INTRODUÇÃO

A simulação de escoamentos em reservatórios de petróleo muito heterogêneos ou em malhas não estruturadas, necessárias para modelar fraturas e poços direcionais, ainda é um problema desafiador, no qual as técnicas de discretização convencionais, sejam baseadas em volumes finitos, elementos finitos ou diferenças finitas, não conseguem garantir simultaneamente alta ordem e monotonicidade das soluções. Para solucionar isso, novas metodologias são constantemente desenvolvidas, entre elas o Método de Volume Finitos com Aproximação do Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA-O), capaz de diminuir os efeitos de orientação de malha e melhorar a acurácia da solução, mesmo para os chamados tensores completos (Edwards & Rogers, 1998, Aavatsmark *et al.* 1998). Neste contexto, o presente trabalho se concentra no desenvolvimento e implementação de formulações numéricas baseadas em MPFA-O e aptas a lidar com malhas poligonais quaisquer em formações arbitrariamente heterogêneas, incluindo falhas geológicas.

O Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida (*Lower-Dimensional Fracture Model - LDFM*) foi apresentado por Martin *et al.* (2005) para a modelagem do escoamento monofásico em meios porosos fraturados, sendo depois ampliado para o bifásico em Hoteit & Firoozabadi (2008), ambos no contexto de elementos finitos. Posteriormente, foi aplicado em conjunto com uma formulação do tipo MPFA, por Ahmed *et al.* (2015), onde foi resolvida a equação de transporte para um traçador. Segundo Hoteit & Firoozabadi (2008), essa metodologia promove ganhos computacionais significativos em relação aos modelos de porosidade-dual (Uleberg & Kleppe, 1996), com a discretização da fratura na mesma dimensão da matriz (Ghorayeb & Firoozabadi, 2000) ou ainda modelos híbridos (Unsal *et al.*, 2010). De acordo com Ahmed *et al.* (2015), o LDFM também apresenta maior acurácia em relação aos outros métodos para fraturas anisotrópicas e barreiras. Para a aplicação desta metodologia, a malha deve ser construída de modo a acompanhar a distribuição de fraturas. Nos problemas em 3-D uma fratura é representada por um conjunto de superfícies (2-D), e no caso de um domínio 2-D, as fraturas correspondem a um conjunto de arestas, tendo apenas uma dimensão no espaço.

Neste trabalho será apresentada uma metodologia em volumes finitos (MPFA-O) com a implementação do LDFM para o problema de pressão e o *First Order Upwind Method - (FOUM)*, com solução explícita e implícita, para o problema de saturação. Afim de avaliar a acurácia e a eficiência da formulação utilizada, resolvem-se alguns problemas *benchmark* encontrados na literatura.

## 2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção, serão apresentadas as equações governantes do escoamento de água e óleo em um meio poroso, fraturado ou não, as quais são representadas por um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares, composto por uma equação elíptica da pressão e uma equação hiperbólica de transporte. Neste trabalho, foram adotadas as seguintes hipóteses simplificadoras: fluxo isotérmico, meio poroso e fluidos são incompressíveis, e foram desprezados os efeitos de gravidade e capilaridade. Portanto, a partir do balanço de massa para cada fase, tem-se que:

$$\phi \rho_i \frac{\partial S_i}{\partial t} + \rho_i \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = q_i \quad (1)$$

onde o índice  $i$  representa a fase: água ( $w$ ) ou óleo ( $o$ ),  $\phi$  a porosidade do meio,  $t$  o tempo,  $\vec{\nabla}$  o operador gradiente e  $\rho_i$ ,  $S_i$ ,  $\vec{v}_i$ ,  $q_i$  são, respectivamente, a densidade, saturação, velocidade da fase  $i$  e termo fonte ou sumidouro de cada fase.

A velocidade de cada fase, ou velocidade de Darcy, na Eq. (1) é calculada através da lei de Darcy (Peaceman, 1977; Ewing, 1983), como:

$$\vec{v}_i = -\lambda_i \underline{K} \vec{\nabla} p \quad (2)$$

sendo  $\lambda_i$  a mobilidade de cada fase  $i$ , fornecida pela razão  $\lambda_i = k_{ri} / \mu_i$ , onde  $k_{ri}$  é a permeabilidade relativa de cada fase, sendo esta uma função da saturação, e  $\mu_i$  a viscosidade de cada fase. Por sua vez,  $\underline{K}$  é o tensor de permeabilidade absoluta do meio poroso (matriz) e  $p$  a pressão na matriz.

Tem-se uma equação restritiva para a saturação, partindo da premissa que o meio poroso está totalmente saturado por água e óleo:

$$S_w + S_o = 1 \quad (3)$$

## 2.1 Equação da pressão

Utilizando as Equações (1) a (3) e realizando algumas manipulações algébricas (Carvalho, 2005), a equação elíptica da pressão na matriz é dada por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_T = Q \quad \text{com} \quad \vec{v}_T = -\lambda_T \underline{K} \vec{\nabla} p \quad (4)$$

onde  $\vec{v}_T = \vec{v}_w + \vec{v}_o$  é o vetor velocidade total, com  $\vec{v}_w$  a velocidade da água e  $\vec{v}_o$  a velocidade do óleo, e  $Q$  a vazão específica total, sendo a soma das vazões específicas de cada fase  $i$ , definida como  $Q_i = q_i / \rho_i$  e  $\lambda_T$  a mobilidade total, obtida pela soma das mobilidades de cada fase,  $\lambda_T = \lambda_w + \lambda_o$ .

Em Ahmed *et al.* (2015), é utilizada uma equação adicional para o fluxo ao longo das fraturas, que são tratadas como entidades geométricas com dimensão inferior à do problema original. Nesse caso, resolve-se apenas o fluxo tangencial, que ocorre no plano da fratura para uma matriz de 3-D, ou aresta, para uma matriz em 2-D. A Eq (4) é então adaptada para definir estes fluxos com dimensão reduzida, onde os termos do fluxo normal à fratura, oriundos da rocha matriz, são segregados do gradiente, e acoplados através do uso de uma função de transferência, como descrito a seguir:

$$\vec{\nabla}_{ig} \cdot \vec{v}_{Tf} + Q_f = Q_f \quad \text{com} \quad \vec{v}_{Tf} = -\lambda_T \underline{K}_{f,ig} \vec{\nabla}_{ig} p_f \quad (5)$$

onde  $\vec{\nabla}_{ig}$  é o operador gradiente tangencial,  $\vec{v}_{Tf}$  a velocidade total ao longo da fratura,  $Q_f$  é a função de transferência, que irá surgir naturalmente no balanço de massa da matriz,  $Q_f$  é a vazão específica total proveniente de uma fonte/sumidouro na fratura,  $\underline{K}_{f,ig}$  é o tensor de permeabilidade absoluto tangencial na fratura e  $p_f$  a pressão na fratura. Os termos  $\vec{\nabla}_{ig}$ ,  $\underline{K}_{f,ig}$  e  $\vec{v}_{Tf}$  irão apresentar uma dimensão a menos que seus correspondentes da Eq. (4).

## 2.2 Equação de saturação

Substituindo a Eq. (2) na Eq. (1), para a fase água, considerando as hipóteses simplificadoras e realizando manipulações algébricas (Carvalho, 2005), é possível definir a equação hiperbólica de saturação de água, como:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_w = Q_w \quad (6)$$

onde  $\vec{v}_w = f_w \vec{v}_T$ , sendo  $f_w$  o fluxo fracional de água, que é uma função não-linear da saturação de água.

$$f_w(S_w) = \frac{\lambda_w}{\lambda_T} \quad (7)$$

## 2.3 Condições iniciais e de contorno

Para a descrição completa do problema, é necessário definir condições iniciais e de contorno adequadas. Nesse caso, considerando um reservatório cujo domínio é  $\Omega$ , pode-se definir o seu contorno  $\Gamma$ , como:

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_I \cup \Gamma_P \quad (8)$$

onde  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  representam as fronteiras externas de Dirichlet (pressão prescrita) e Neumann (fluxo prescrita), respectivamente, onde  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ;  $\Gamma_I$  são os poços injetores e  $\Gamma_P$  os poços produtores.

Condições de contorno adequadas podem ser definidas, como (Contreras, 2016):

$$\begin{aligned} \forall \vec{x} \in \Gamma_D &\Rightarrow p(\vec{x}, t) = g_D \\ \forall \vec{x} \in \Gamma_N &\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{N} = g_N \\ \forall \vec{x} \in \Gamma_P &\Rightarrow p(\vec{x}, t) = g_P \\ \forall \vec{x} \in \Gamma_I &\Rightarrow p(\vec{x}, t) = g_I \wedge S_w(\vec{x}, t) = \bar{S}_w \end{aligned} \quad (9)$$

com  $\vec{x}$  definido como o vetor posição,  $g$  são funções escalares das pressões ( $g_D$ ,  $g_P$  e  $g_I$ ) e do fluxo ( $g_N$ ),  $\vec{N}$  o vetor área normal e  $\bar{S}_w$  a saturação prescrita nos poços injetores.

Por fim, as condições iniciais são definidas como:

$$\forall \vec{x} \in \Omega \Rightarrow S_w(\vec{x}, 0) = \bar{S}_w^0 \quad (10)$$

onde,  $\bar{S}_w^0$  é a distribuição inicial da saturação de água no reservatório.

## 3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

O problema é solucionado através de uma formulação segregada, onde a Eq. (4), da pressão, é resolvida implicitamente, e a Eq. (6), da saturação é resolvida, em princípio, explicitamente, e o acoplamento de ambas equações é realizado através da velocidade de Darcy. Essa metodologia é amplamente utilizada na indústria do petróleo, sendo denominada

*Implicit Pressure Explicit Saturation* (IMPES). Em caso de uma elevada restrição do passo de tempo, imposta para garantir a estabilidade da formulação explícita, também é possível adotar uma formulação sequencial implícita, em que tanto a pressão quanto a saturação são resolvidas implicitamente. O algoritmo descrito é apresentado sucintamente na Fig. 1.

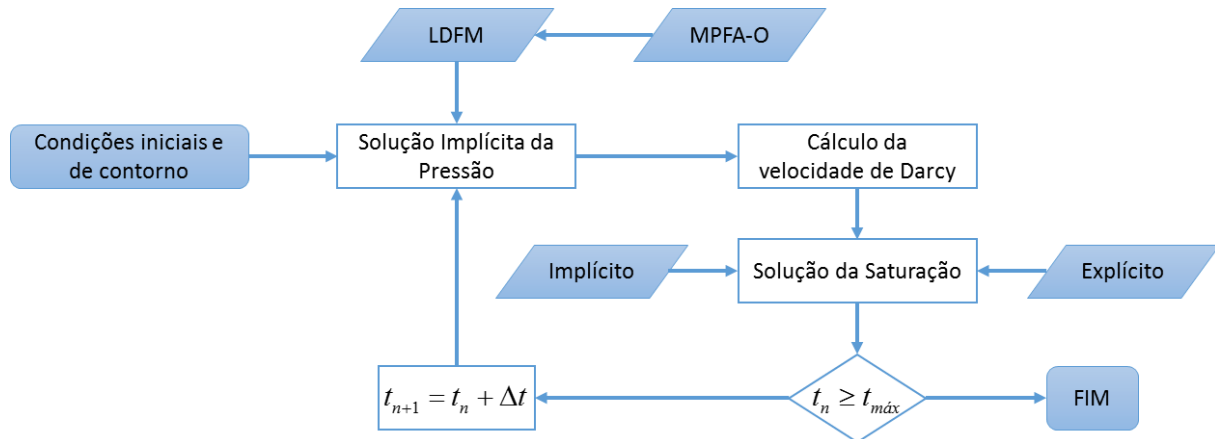


Figura 1. Algoritmo de solução do problema que descreve o escoamento de água e óleo em reservatórios naturalmente fraturados.

### 3.1 Equação da pressão

Nesta seção, será apresentada uma descrição simplificada do método de volumes finitos (MPFA-O) utilizado para a solução da Eq. (4). Assumindo um volume de controle arbitrário ( $\Omega_{\bar{v}}$ ), obtido a partir da discretização de um domínio  $\Omega$  bidimensional conforme apresentado na Fig. 2:

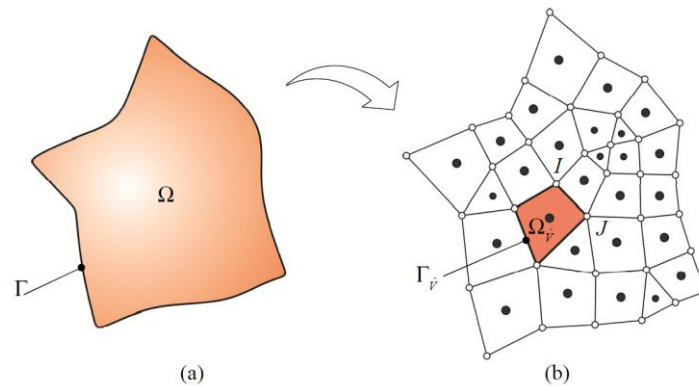


Figura 2. Representação computacional de um reservatório em 2-D: (a) Domínio contínuo; (b) Domínio discretizado com destaque para um volume de controle. Fonte: (Souza, 2015)

De acordo com a metodologia de volume finitos, primeiramente integra-se a Eq. (4), e aplica-se o teorema da divergência de Gauss, de modo que, para um volume de controle genérico  $\Omega_{\bar{v}}$ , tem-se:

$$\int_{\Gamma_{\bar{v}}} \bar{v}_T \cdot \bar{n} d\Gamma_{\bar{v}} = \int_{\Omega_{\bar{v}}} Q_{\bar{v}} d\Omega_{\bar{v}} \quad (11)$$

sendo  $\Gamma_{\bar{v}}$  a superfície do volume de controle,  $\bar{n}$  a normal à superfície e  $\Omega_{\bar{v}}$  o volume finito.

Utilizando o teorema do valor médio e definindo uma velocidade média ( $\bar{v}_D$ ) para cada superfície de controle, assim como um termo fonte médio ( $\bar{Q}_{\bar{v}}$ ), pode-se escrever:

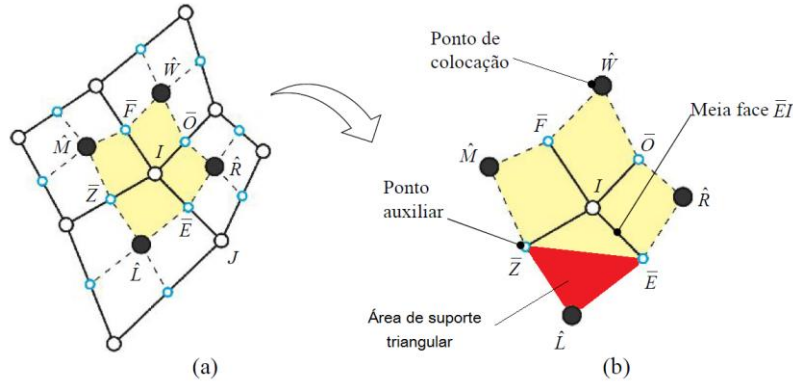
$$\sum_{IJ \in \Gamma_{\hat{v}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q}_{\hat{v}} \Omega_{\hat{v}} \quad (12)$$

onde  $\vec{N}_{IJ}$  é o vetor área normal à superfície de controle, logo  $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$  representa a vazão através da face  $IJ$ . A Equação (12) é então resolvida pelo Método de Volume Finitos com Aproximação do Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA-O), como descrito na seção a seguir.

### **Método de Volume Finitos com Aproximação do Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA-O)**

O MPFA-O é capaz de diminuir os efeitos de orientação de malha e melhorar a acurácia da solução, mesmo para os chamados tensores completos (*Full Tensor*). Uma abordagem mais detalhada pode ser encontrada em Edwards & Rogers (1998), Aavatsmark *et al.* (1998) e Souza (2015).

No MPFA-O, constrói-se uma região de interação ao redor de cada nó  $I$ , conforme exibido na Fig. 3, onde são unidos os pontos de colocação ( $\hat{L}, \hat{R}, \hat{W}, \hat{M}$ ), adjacentes a  $I$ , aos pontos auxiliares ( $\bar{Z}, \bar{E}, \bar{O}, \bar{F}$ ), definidos no ponto médio de cada aresta que contém  $I$ .



**Figura 3. Região de interação: (a) Fragmento da malha associada ao vértice I; (b) Região de interação e seus componentes. Adaptada de: (Souza, 2015)**

Utilizando, por exemplo, a meia face  $\bar{EI}$ , o fluxo é primeiramente calculado considerando a contribuição do gradiente de pressão no volume à esquerda ( $\hat{L}\bar{E}I\bar{Z}$ ), o qual é definido a partir Eq. (12), utilizando uma região de suporte triangular, destacada em vermelho na Fig.3.

$$\bar{\nabla} p_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}} = -\frac{1}{2\Omega_{\hat{L}\bar{E}\bar{Z}}} \left( p_{\hat{L}} \vec{N}_{\bar{E}\bar{Z}} + p_{\bar{Z}} \vec{N}_{\hat{L}\bar{E}} + p_{\bar{E}} \vec{N}_{\bar{Z}\hat{L}} \right) \quad (13)$$

onde  $p$  é a pressão em cada um dos pontos subscritos.

Substituindo as velocidades da Eq. (12) pela definição advinda da Eq (4), e por sua vez os gradientes à esquerda de cada uma das faces, pode-se definir as vazões à esquerda, como:

$$\left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{\text{Esq}} = \mathbf{A} \{ \hat{p} \} + \mathbf{B} \{ \bar{p} \} \quad (14)$$

onde  $\left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{\text{Esq}}$  é o vetor das vazões com contribuições à esquerda,  $\{ \hat{p} \} = \{ \hat{p}_{\hat{L}}, \hat{p}_{\hat{R}}, \hat{p}_{\hat{W}}, \hat{p}_{\hat{M}} \}^T$  o vetor de pressões nos pontos de colocação,  $\{ \bar{p} \} = \{ \bar{p}_{\bar{Z}}, \bar{p}_{\bar{E}}, \bar{p}_{\bar{O}}, \bar{p}_{\bar{F}} \}^T$  o vetor de pressões nos pontos de auxiliares.  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são matrizes de coeficientes dos parâmetros físicos e geométricos,

referentes aos pontos de colocação e aos pontos auxiliares, respectivamente. Um desses coeficientes relativos à  $\hat{p}_l$  na equação da velocidade em  $\bar{EI}$  é exemplificado na Eq. (15):

$$A_{l,1} = \lambda_{T,\bar{EI}} \mathbf{K}_{\hat{l}} \frac{\vec{N}_{\bar{l}\bar{z}} \cdot \vec{N}_{\bar{EI}}}{2\Omega_{\bar{l}\bar{E}\bar{z}}} \quad (15)$$

Analogamente, é possível construir as vazões provenientes das contribuições à direita:

$$\{\bar{v} \cdot \vec{N}\}_{Dir} = \underline{C}\{\hat{p}\} + \underline{D}\{\bar{p}\} \quad (16)$$

Eliminando a dependência das pressões auxiliares a partir da imposição da continuidade dos fluxos, fazendo  $\{\bar{v} \cdot \vec{N}\}_{Esq} = -\{\bar{v} \cdot \vec{N}\}_{Dir}$ , tem-se ao final que:

$$\begin{aligned} \{\bar{v} \cdot \vec{N}\}_{Esq} &= \left( \underline{A} - \underline{B}(\underline{B} + \underline{D})^{-1}(\underline{A} + \underline{C}) \right) \{\hat{p}\} = \underline{T}_{Esq} \{\hat{p}\} \\ \{\bar{v} \cdot \vec{N}\}_{Dir} &= \left( \underline{C} - \underline{D}(\underline{B} + \underline{D})^{-1}(\underline{A} + \underline{C}) \right) \{\hat{p}\} = \underline{T}_{Dir} \{\hat{p}\} \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $\underline{T}_{Esq}$  e  $\underline{T}_{Dir}$  são matrizes de transmissibilidade. As matrizes  $\underline{A}$  e  $\underline{C}$  possuem o número de linhas igual ao número de meias-arestas e o número de colunas igual ao número de volumes de controle envolvidos na região de interação avaliada, e as matrizes  $\underline{B}$  e  $\underline{D}$  são sempre quadradas com dimensão igual ao número de meias-arestas.

### Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida (LDFM)

É adotado neste trabalho o Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida (LDFM), apresentado em Martin *et al.* (2005), no qual as fraturas são associadas às superfícies de controle. Utilizando a mesma representação da Fig. 3, considerando que superfícies de controle  $\bar{EI}$ ,  $\bar{OI}$  e  $\bar{FI}$  tenham sido geradas a partir de fraturas, os pontos auxiliares  $\bar{E}, \bar{O}, \bar{F}$  indicam os novos graus de liberdade do problema, e são identificados agora por  $\hat{f}_E, \hat{f}_O, \hat{f}_F$ , respectivamente. Com isso, tem-se a Fig. 4 com a região de interação alterada, e com face  $\hat{f}_E I$  ampliada para apresentar as propriedades da fratura:

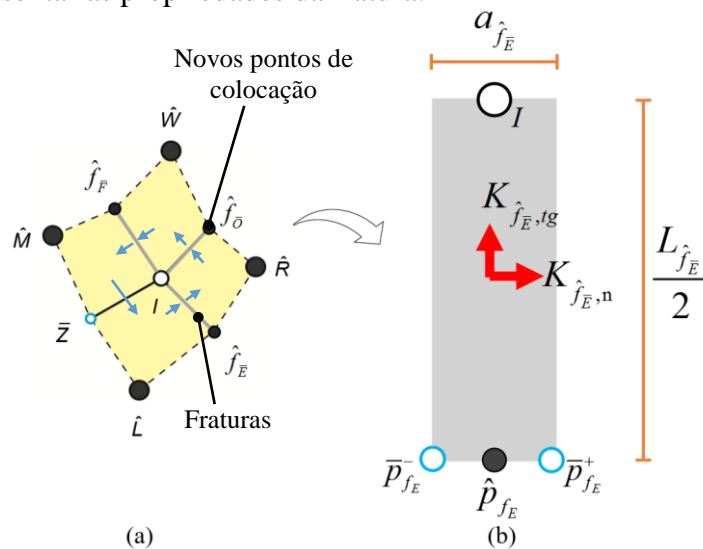


Figura 4. Região de interação com fraturas: (a) Região de interação e os novos componentes; (b) Detalhe nos componentes da fratura.



Tem-se que  $\hat{p}_{f_E}$  é uma das três novas incógnitas referentes aos novos pontos de colocação apresentados na Fig. 4a. Nas arestas com fraturas, em geral, ocorre uma descontinuidade na pressão, dando origem a dois novos pontos auxiliares:  $\bar{p}_{f_E}^-$ , para o cálculo do gradiente no volume à esquerda e  $\bar{p}_{f_E}^+$ , para o gradiente à direita. O comprimento da fratura é expresso por  $L_{f_E}$ , que se encontra dividido por dois, por se tratar da meia aresta,  $a_{f_E}$  é a abertura da fratura, considerada apenas como uma propriedade, não tendo dimensão no domínio discreto, e  $K_{f_E, n}$  é um escalar que representa a permeabilidade absoluta no sentido normal à fratura. Nesse caso,  $K_{f_E, tg}$  pode ser definido por um escalar, pois a fratura só apresenta uma dimensão no domínio discreto.

Neste modelo, também ocorre descontinuidade do fluxo através das arestas com fraturas, isso foi indicado na Fig. 4a com uma única seta azul, onde é possível definir um fluxo único através da aresta. Entretanto, adverte-se através das setas duplas nas fraturas, que o fluxo à esquerda não é necessariamente igual ao fluxo à direita, devido a uma componente tangencial de fluxo ao longo da fratura.

Com a descontinuidade da pressão na fratura, o gradiente da Eq. (13) é redefinido:

$$\vec{\nabla} p_{\hat{L}_{f_E} \bar{Z}} = -\frac{1}{2\Omega_{\hat{L}_{f_E} \bar{Z}}} \left( p_{\hat{L}} \vec{N}_{f_E \bar{Z}} + p_{\bar{Z}} \vec{N}_{\hat{L}_{f_E}} + \bar{p}_{f_E}^- \vec{N}_{\bar{Z} \hat{L}} \right) \quad (18)$$

Existem duas variações do LDFM (Ahmed, 2015):

- modelo de pressão contínua: admite a continuidade da pressão no sentido normal à fratura;
- modelo de pressão descontínua: assume a descontinuidade no campo de pressões através da fratura.

#### a) Modelo de pressão contínua

A variação da pressão ao longo do sentido normal à fratura pode ser desprezada no caso de alta permeabilidade normal e aberturas pequenas (Ahmed *et al.*, 2015), isso leva a  $\bar{p}_f = \hat{p}_f = \bar{p}_f^+$ , resultando em apenas uma pressão desconhecida ao longo da abertura de cada fratura,  $\hat{p}_f$ . Nesse caso, as Equações (14) e (16), podem ser rescritas como:

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{Esq} &= \underline{A}_c \left\{ \hat{p}; \hat{p}_f \right\} + \underline{B}_c \left\{ \bar{p} \right\} \\ \left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{Dir} &= \underline{C}_c \left\{ \hat{p}; \hat{p}_f \right\} + \underline{D}_c \left\{ \bar{p} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

onde,  $\hat{p}$ ,  $\hat{p}_f$  e  $\bar{p}$  são as pressões na matriz, nas interfaces fraturadas e nas interfaces da matriz, respectivamente. Em relação a Fig. 4a, agrupa-se um vetor com as pressões auxiliares  $\left\{ \bar{p} \right\} = \left\{ \bar{p}_{\bar{Z}} \right\}^T$  e outro com as incógnitas  $\left\{ \hat{p}; \hat{p}_f \right\} = \left\{ \hat{p}_{\hat{L}}, \hat{p}_{\hat{R}}, \hat{p}_{\hat{W}}, \hat{p}_{\hat{M}}, \hat{p}_{f_E}, \hat{p}_{f_O}, \hat{p}_{f_F} \right\}^T$ . No caso fraturado com pressões contínuas, as matrizes são indicadas com um subscrito  $c$ , para diferenciar das matrizes típicas do MPFA-O tradicional, sendo que seus coeficientes dependem dos mesmos parâmetros físicos e geométricos. Essa matrizes são facilmente construídas transferindo as colunas correspondentes às pressões da fratura das matrizes  $\underline{B}$  e  $\underline{D}$ , para as matrizes  $\underline{A}$  e  $\underline{C}$ , respectivamente. Com isso,  $\underline{A}_c$  e  $\underline{C}_c$  terão o número de colunas

incrementado pelo número de fraturas na região de iteração, em detrimento da redução do mesmo número de colunas em  $\underline{B}_c$  e  $\underline{D}_c$ .

Novamente, as pressões auxiliares podem ser escritas em função das pressões a serem determinadas quando é imposta a continuidade dos fluxos, apenas nas arestas sem fraturas. Desconsiderando as linhas correspondentes aos fluxos nas arestas fraturadas, tem-se novas matrizes, indicadas pelo apóstrofo na equação a seguir:

$$\begin{aligned} \{\bar{v} \cdot \bar{N}\}'_{Esq} &= -\{\bar{v} \cdot \bar{N}\}'_{Dir} \\ \underline{A}'_c \{\hat{p}; \hat{p}_f\} + \underline{B}'_c \{\bar{p}\} &= -\underline{C}'_c \{\hat{p}; \hat{p}_f\} - \underline{D}'_c \{\bar{p}\} \\ \{\bar{p}\} &= -(\underline{B}'_c + \underline{D}'_c)^{-1} (\underline{A}'_c + \underline{C}'_c) \{\hat{p}; \hat{p}_f\} \end{aligned} \quad (20)$$

Com isso, as vazões definidas para as meias-arestas utilizando o modelo de pressão contínua são:

$$\begin{aligned} \{\bar{v} \cdot \bar{N}\}'_{Esq} &= (\underline{A}_c - \underline{B}_c (\underline{B}'_c + \underline{D}'_c)^{-1} (\underline{A}'_c + \underline{C}'_c)) \{\hat{p}; \hat{p}_f\} = \underline{T}_{Esq,c} \{\hat{p}; \hat{p}_f\} \\ \{\bar{v} \cdot \bar{N}\}'_{Dir} &= (\underline{C}_c - \underline{D}_c (\underline{B}'_c + \underline{D}'_c)^{-1} (\underline{A}'_c + \underline{C}'_c)) \{\hat{p}; \hat{p}_f\} = \underline{T}_{Dir,c} \{\hat{p}; \hat{p}_f\} \end{aligned} \quad (21)$$

Sendo  $n_f$  o número de fraturas na região de iteração, vale ressaltar que a dimensão de  $\underline{B}'_c$ , assim como a estrutura, equivale a de  $\underline{B}$ , removendo-se as  $n_f$  colunas relativas às pressões nas arestas fraturadas e as  $n_f$  linhas relativas aos fluxos onde não foi imposta a continuidade. Com isso, assim como  $\underline{B}$ ,  $\underline{B}'_c$  é uma matriz quadrada e, por analogia,  $\underline{D}'_c$  também.

### b) Modelo de pressão descontínua

Neste modelo, é considerada a descontinuidade da pressão ao longo da fratura, dando origem a  $n_f$  novos pontos auxiliares por região de iteração, onde a Eq. (19) é então rescrita como:

$$\begin{aligned} \{\bar{v} \cdot \bar{N}\}'_{Esq} &= \underline{A} \{\hat{p}\} + \underline{B}_d \{\bar{p}; \bar{p}_f\} \\ \{\bar{v} \cdot \bar{N}\}'_{Dir} &= \underline{C} \{\hat{p}\} + \underline{D}_d \{\bar{p}; \bar{p}_f\} \end{aligned} \quad (22)$$

onde  $\{\bar{p}; \bar{p}_f\} = \{\bar{p}_Z, \bar{p}_{f_e}^-, \bar{p}_{f_e}^+, \bar{p}_{f_o}^-, \bar{p}_{f_o}^+, \bar{p}_{f_f}^-, \bar{p}_{f_f}^+\}^T$  são as pressões auxiliares, incrementadas das pressões decorrentes da descontinuidade da fratura, e  $\underline{B}_d$  e  $\underline{D}_d$  são as matrizes de coeficientes modificadas para o modelo descontínuo.

Novamente, é possível eliminar as pressões auxiliares nas arestas sem fratura ( $\bar{p}$ ) ao impor a continuidade dos fluxos nas mesmas. As pressões auxiliares nas fraturas ( $\bar{p}_f$ ) podem ser eliminadas impondo duas condições de contorno tipo Robin (fluxo e pressão prescrita) para cada fratura  $i$  (Martin *et al.*, 2005):

$$\begin{aligned} -\zeta \left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{Esq,i} + \alpha_{f_i} \bar{p}_{f_i}^- &= -(1-\zeta) \left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{Dir,i} + \alpha_{f_i} \hat{p}_{f_i} \\ -\zeta \left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{Dir,i} + \alpha_{f_i} \bar{p}_{f_i}^+ &= -(1-\zeta) \left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{Esq,i} + \alpha_{f_i} \hat{p}_{f_i} \end{aligned} \quad (23)$$

onde  $\alpha_{f_i} = 2K_{\hat{f}_i,n}/a_{\hat{f}_i}$  e  $\zeta$  é um parâmetro positivo, com seus valores correspondentes sintetizados na Tabela 1, segundo as hipótese discutidas em Martin *et al.* (2005).

Segundo Ahmed *et al.* (2015),  $\zeta$  pode assumir qualquer valor positivo no intervalo ]1/2,1], onde  $\zeta = 3/4$  corresponde a uma aproximação da pressão de segunda ordem ao longo da fratura e  $\zeta = 1$  a um esquema simples de volumes finitos e idêntico a um esquema do tipo híbrido para fraturas com permeabilidade isotrópica. Para os casos com alta permeabilidade e aberturas pequenas,  $\alpha_{f_i}$  tenderá a zero, e no limite,  $\bar{p}_{f_i}^- = \hat{p}_{f_i} = \bar{p}_{f_i}^+$ .

**Tabela 1. Hipótese e valores correspondentes de  $\zeta$ .**

Hipótese	$\zeta$
Pressão no centro da fratura é a média das pressões nas arestas	1/2
Fluxo no centro da fratura é a média dos fluxos nas arestas	3/4
Cada fluxo é definido através do gradiente calculado entre a aresta correspondente e a pressão no centro da fratura	1

Impondo simultaneamente a continuidade dos fluxos e a Eq. (23), o vetor de pressões auxiliares  $\{\bar{p}; \bar{p}_f\}$  pode, então, ser substituído na Eq. (22) por:

$$\{\bar{p}; \bar{p}_f\} = -(\underline{B}'_d + \underline{D}'_d)^{-1} \left( (\underline{A}_d + \underline{C}_d) \{\hat{p}\} + \underline{E} \{\hat{p}_f\} \right) \quad (24)$$

sendo que o apóstrofo indica as matrizes modificadas, e  $\underline{E}$  é uma matriz diagonal decorrente da Eq. (23), acrescida de uma linha nula para cada aresta onde foi imposta a continuidade dos fluxos.

Neste caso,  $\underline{B}'_d$  equivale à dimensão de  $\underline{B}$  acrescida de  $n_f$  colunas relativas às pressões auxiliares extras nas fraturas e de  $n_f$  linhas relativas às Equações (24), então,  $\underline{B}'_d$  se manterá quadrada e, por analogia,  $\underline{D}'_d$  também.

Concatenando os vetores de pressões desconhecidas em uma única matriz, assim como seus coeficientes, tem-se a seguinte estrutura para uma região de interação fraturada utilizando o modelo de pressão descontínua:

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{Esq} &= \left[ \underline{A} - \underline{B}_d (\underline{B}'_d + \underline{D}'_d)^{-1} (\underline{A}_d + \underline{C}_d) \quad -\underline{B}_d (\underline{B}'_d + \underline{D}'_d)^{-1} \underline{E} \right] \{\bar{p}; \bar{p}_f\} = \underline{T}_{Esq,d} \{\hat{p}; \hat{p}_f\} \\ \left\{ \vec{v} \cdot \vec{N} \right\}_{Dir} &= \left[ \underline{C} - \underline{D}_d (\underline{B}'_d + \underline{D}'_d)^{-1} (\underline{A}_d + \underline{C}_d) \quad -\underline{D}_d (\underline{B}'_d + \underline{D}'_d)^{-1} \underline{E} \right] \{\bar{p}; \bar{p}_f\} = \underline{T}_{Dir,d} \{\hat{p}; \hat{p}_f\} \end{aligned} \quad (25)$$

O modelo descontínuo possui então um sistema de equações local, cuja construção é de maior complexidade que o de pressão contínua.

## Fluxos nas fraturas

Na Figura 5, apresenta-se um esquema para o sistema de fraturas de dimensão reduzida.

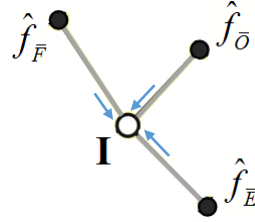


Figura 5. Fraturas com dimensão reduzida. Adaptado de: Ahmed *et al.* (2015).

A vazão, para a fratura  $\hat{f}_{\bar{E}}$ , por exemplo, pode ser obtida multiplicando a Eq. (5) pela abertura da fratura, e definindo um gradiente da pressão de  $\hat{f}_{\bar{E}}$  para o vértice  $I$ , da seguinte forma:

$$\vec{v}_{\hat{f}_{\bar{E}}I} a_{\hat{f}_{\bar{E}}} = -\lambda_{r,I} K_{\hat{f}_{\bar{E}},tg} \frac{(\bar{p}_I - \hat{p}_{\hat{f}_{\bar{E}}})}{\frac{L_{\hat{f}_{\bar{E}}}}{2}} a_{\hat{f}_{\bar{E}}} \quad (26)$$

onde  $\vec{v}_{\hat{f}_{\bar{E}}I} a_{\hat{f}_{\bar{E}}}$  é a vazão na fratura  $\hat{f}_{\bar{E}}$  e  $\bar{p}_I$  a pressão auxiliar no vértice  $I$ .

Definindo as vazões para todas as fraturas da Fig. 5, tem-se o seguinte sistema local de equações (Ahmed, 2015):

$$\{\vec{v} \cdot a\}_{Frat} = \underline{A}'_f \{\hat{p}_f\} + \underline{B}'_f \bar{p}_I \quad (27)$$

onde  $\{\vec{v} \cdot a\}_{Frat}$  é o vetor de vazões nas fraturas, e  $\underline{A}'_f$  uma matriz quadrada de dimensão  $n_f$ , com os coeficientes das pressões desconhecidas, e  $\underline{B}'_f$  uma matriz com os coeficientes da pressão auxiliar com  $n_f$  linhas e uma coluna.

De forma análoga à Lei Kirchhoff para correntes elétricas, a dependência da pressão auxiliar é eliminada efetuando um balanço de massa no vértice  $I$  (Ahmed *et al.*, 2015), resultando em:

$$\sum_{i=1}^{n_f} \{\vec{v} \cdot a\}_{Frat,i} = 0 \quad (28)$$

Com isso:

$$\bar{p}_I = -(\underline{B}'_f)^{-1} \underline{A}'_f \{\hat{p}_f\} \quad (29)$$

onde  $\underline{A}'_f$  e  $\underline{B}'_f$  são construídas somando-se coluna por coluna das matrizes  $\underline{A}_f$  e  $\underline{B}_f$ , respectivamente, onde  $\underline{A}'_f$  terá uma linha e  $n_f$  colunas, e  $\underline{B}'_f$  apenas um elemento.

Então, o sistema local para as vazões nas fraturas é definido por:

$$\{\vec{v} \cdot a\}_{Frat} = \left( \underline{A}'_f - \underline{B}'_f (\underline{B}'_f)^{-1} \underline{A}'_f \right) \{\hat{p}_f\} \quad (30)$$

Por fim, é necessária a definição da função de transferência da Eq. (5) para cada uma das fraturas, sendo as mesmas definidas como o somatório dos negativos das vazões da matriz nas arestas com fraturas (Ahmed, 2015). Para um sistema local qualquer, tem-se que:

$$\{Q_f\} = -\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{Esq}'' - \{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_{Dir}'' = -(T_{Esq,L}'' + T_{Dir,L}'') \{\hat{p}; \hat{p}_f\} \quad (31)$$

onde o apóstrofo duplo informa que foram considerados apenas as vazões nas arestas que representam fraturas, e o índice  $L$  indica a transmissibilidade obtida pelo LDFM, seja no modelo contínuo (c) ou descontínuo (d).

### Sistema global de equações

Com os fluxos para a matriz fornecidos pela Eq. (21) ou (25), para as fraturas pela Eq. (30), assim como a função de transferência em (31), o balanço de massa para cada volume de controle, segundo a Eq. (12), pode ser definido como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} \{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_i &= \bar{Q}_v \Omega_v && \text{na matriz} \\ \sum_{i=1}^2 \{\vec{v} \cdot a\}_i + Q_f &= \bar{Q}_f \Omega_f && \text{na fratura} \end{aligned} \quad (32)$$

onde  $n$  é o número de aresta por volume finito,  $\{\vec{v} \cdot \vec{N}\}_i$  a vazão em cada meia aresta do volume na matriz,  $\{\vec{v} \cdot a\}_i$  a vazão para cada vértice da fratura,  $\bar{Q}_v$  o termo fonte médio na fratura, e  $\Omega_f$  o volume da fratura considerando sua abertura.

Com isso, obtém-se o seguinte sistema de equações global para a pressão:

$$\begin{bmatrix} T_{mm} & T_{mf} \\ T_{Tm} & T_{ff} + T_{Tf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\hat{p}\} \\ \{\hat{p}_f\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\bar{Q}_v \Omega_v\} \\ \{\bar{Q}_f \Omega_f\} \end{bmatrix} \quad (33)$$

onde  $T_{mm}$  representa as transmissibilidades para os fluxos de matriz para matriz,  $T_{mf}$  acopla a dependência das pressões nas fraturas à matriz,  $T_{ff}$  a transmissibilidade para os fluxos na dimensão reduzida,  $T_{Tm}$  e  $T_{Tf}$  são os coeficientes das funções de transferência, onde  $T_{Tm}$  acopla as pressões da matriz à fratura.

### 3.2 Equação de saturação

A discretização espacial do termo advectivo da Eq. (6) é feita pelo método de ponderação a montante de primeira ordem (*First Order Upwind Method* – FOUM). Partindo-se desta equação, considerando-se um volume de controle  $\Omega_v$  e integrando-se no espaço, utilizando o teorema do valor médio e método de Euler explícito para a integração no tempo, pode-se chegar a (Souza, 2015):

$$S_{w_v}^{n+1} = S_{w_v}^n - \frac{\Delta t}{\phi_v \Omega_v} \sum_{IJ \in \Gamma_v} \left[ f_w(S_{w_{IJ}}^k) (\vec{v} \cdot \vec{N})_{IJ} \right] + \frac{\Delta t}{\phi_v \Omega_v} \bar{Q}_{w,v}^k \quad (34)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo e  $f_w(S_{w_{IJ}}^k)$  é o fluxo fracional de água calculado através da saturação de água do elemento à montante do fluxo na face  $IJ$ .

Fazendo  $k = n$ , obtém-se uma formulação explícita, onde o passo de tempo deve satisfazer uma condição de estabilidade, dada por:

$$\Delta t \leq C \frac{|\Delta \bar{x}|}{|\bar{v}| \left( \frac{\partial f_w(S_w^n)}{\partial S_w^n} \right)} \quad (35)$$

onde  $C$  é o número de Courant,  $|\Delta \bar{x}|$  é a norma do vetor distância entre os centroides de dois volumes de controles adjacentes e  $|\bar{v}|$  é a norma do vetor velocidade na face entre esses volumes. O valor máximo para  $\Delta t$  será o menor valor encontrado na Eq. (35), considerando todos as faces volumes de controle da malha.

Adaptando a Eq. (34) para uma fratura  $\hat{f}$ , tem-se que:

$$S_{w_{\hat{f}}}^{n+1} = S_{w_{\hat{f}}}^n - \frac{\Delta t}{\phi_{\hat{f}} \Omega_{\hat{f}}} \sum_{i=1}^2 \left[ f_w(S_{w_{v_i}}^k) (\bar{v} \cdot a)_i \right] - \frac{\Delta t}{(\phi \Omega)_{\hat{f}}} Q_{\hat{f}}^k + \frac{\Delta t}{\phi_{\hat{f}} \Omega_{\hat{f}}} \bar{Q}_{w, \hat{f}}^k \quad (36)$$

Uma fratura com alta permeabilidade tangencial ocasiona um passo de tempo muito pequeno, segundo a Eq. (35). Para contornar essa restrição, foi implementado uma formulação segregada implícita, fazendo  $k = n + 1$  nas Equações (34) e (36), que resulta num sistema de equações não-lineares, devido ao comportamento da função  $f_w(S_{w_{v_i}}^k)$ , resolvido através do método iterativo de Newton-Raphson. Hoteit & Firoozabadi (2008) propõem resolver apenas a Eq. (36) de forma implícita, onde o termo  $Q_{\hat{f}}^k$  também foi determinado explicitamente nos casos em que o sentido da função de transferência é da matriz para a fratura.

Com múltiplas fraturas, é necessário ainda determinar qual será o fluxo fracional para os casos em que o sentido deste ocorre do vértice  $I$  para a fratura (Fig. 5). Seu cálculo é definido por Hoteit & Firoozabadi (2008), através de um balanço de massa de água, como:

$$f_w(S_{w_I}^k) = \frac{\sum_{i=1}^c f_w(S_{w_j}^k) (\bar{v} \cdot a)_i}{\sum_{i=1}^s (\bar{v} \cdot a)_i} \quad (37)$$

onde  $c$  indica os fluxos chegando em  $I$  e  $s$  os saindo,  $f_w(S_{w_I}^k)$  é o fluxo fracional em  $I$  e  $f_w(S_{w_j}^k)$  o fluxo fracional nas fraturas à montante de  $I$ .

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, serão apresentados resultados numéricos aplicando a metodologia LDFM onde foram realizadas três análises: um teste de convergência com o modelo de pressão contínua, um comparativo entre o modelo contínuo e o modelo descontínuo e um comparativo entre a saturação resolvida de forma explícita e implícita.

#### 4.1 Teste de convergência do modelo com pressão contínua

Esse teste de convergência foi efetuado a partir do modelo de pressão contínua para um problema com solução analítica conhecida, apresentado em Hægland *et al.* (2009), e aplicado por Ahmed *et al.* (2015), utilizando a mesma metodologia deste trabalho, MPFA-O e LDFM.

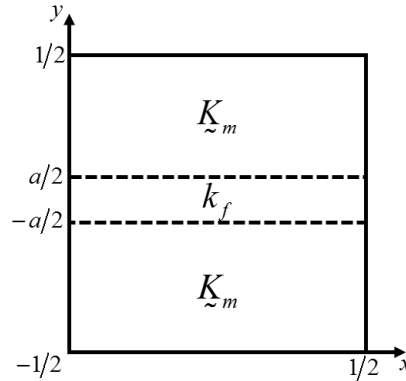


Figura 6. Domínio quadrado para problema 1. Adaptado de: Ahmed *et al.* (2015).

O domínio em questão apresenta uma matriz rochosa com um tensor de permeabilidade  $K_m$  isotrópico e diagonal com valor unitário, uma fratura, representada pela área entre as linhas tracejadas, porém discretizada a partir de linha no centro da geometria, com abertura “ $a$ ” e permeabilidade normal e tangencial com os mesmos valores e iguais a  $k_f$ . O domínio foi discretizado por uma malha estruturada e uniforme, com  $N \times N$  elementos quadrangulares, com termo de fonte distribuído apenas na rocha matriz, calculado, como:

$$q = (1 - k_f) \cos x \cosh(a/2) \quad (38)$$

A solução analítica desse problema é dada por:

$$\begin{aligned} p &= k_f \cos x \cosh y + (1 - k_f) \cos x \cosh(a/2) \\ p_f &= \cos x \cosh y \end{aligned} \quad (39)$$

onde  $p$  é a pressão na matriz e  $p_f$  a pressão na fratura.

As condições em todo o contorno são do tipo Dirichlet, i.e., pressão prescrita, com os valores definidos pela Eq. (39). Os erros na matriz e na fratura são calculados em conjunto por uma norma L2 normalizada, definida em Sandve *et al.* (2012), como:

$$\varepsilon_p = \frac{\sqrt{\sum_i A_i (\hat{p} - p)^2}}{(\max(p) - \min(p)) \sum_i A_i} \quad (40)$$

onde  $A_i$  é a área (no caso 2-D) do volume de controle avaliado,  $p$  é a solução analítica e  $\hat{p}$  o valor numérico aproximado.

Foram considerados  $a = \{10^{-5}, 10^{-3}\}$ ,  $k_f = \{10^{-4}, 1, 10^4\}$  e  $N = \{10, 20, \dots, 100\}$ , os erros são então apresentados em função de  $(a/L_f)$ , sendo  $L_f$  o comprimento de uma aresta fraturada.

As taxas de convergência assemelham-se às apresentadas por Ahmed *et al.* (2015), onde a acurácia foi satisfatória para o LDFM, com modelo de pressão contínua, nos casos de aberturas pequenas (Fig. 7a). Entretanto, com o aumento da abertura, a solução divergiu em  $a/L_f = 0,02$ , com maior intensidade para  $k_f = 1$ . Neste exemplo, o modelo de pressão contínua se mostrou eficaz quando  $a/L_f \ll 1$ .

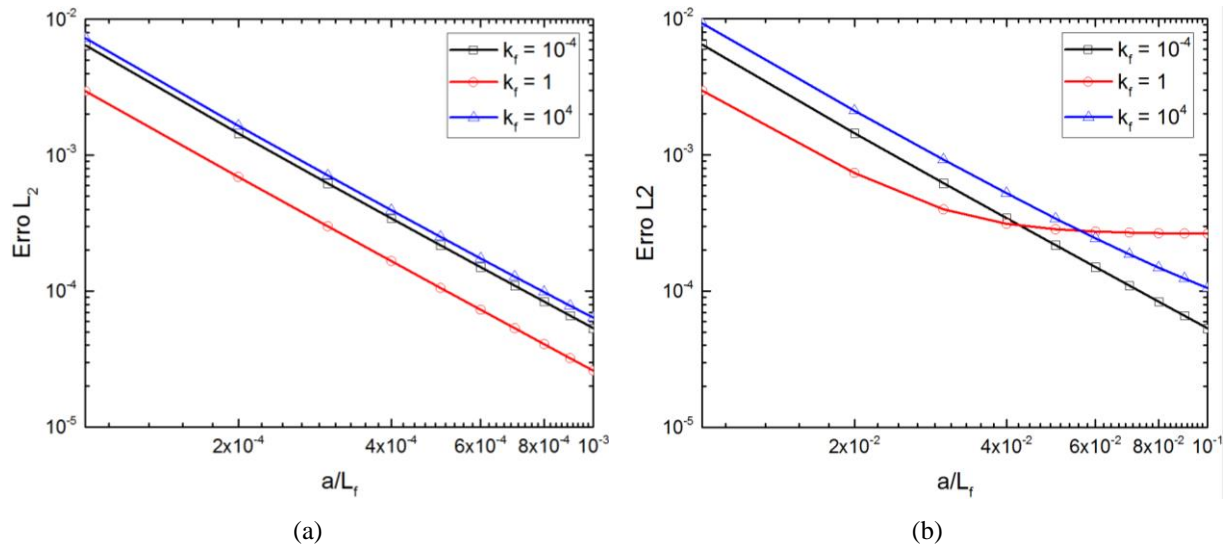


Figura 7. Comportamento do erro: (a)  $a = 10^{-5}$ ; (b)  $a = 10^{-3}$ .

## 4.2 Escoamento monofásico em reservatório com fratura perpendicular

Para a comparação entre o modelo de pressão contínua e o modelo de pressão descontínua, foi utilizado um exemplo em que um gradiente de pressões é imposto entre as faces de um reservatório com fratura perpendicular ao fluxo, como apresentado na Fig. 8 e detalhado por Martin *et al.* (2005) e Ahmed *et al.* (2015). Nesse caso, a matriz apresenta um tensor de permeabilidade isotrópico e diagonal com valor unitário, i.e.,  $k_{xx} = k_{yy} = 1$  e  $k_{xy} = k_{yx} = 0$ . As condições de contorno são: fluxo nulo nos contornos superior e inferior, pressão,  $\bar{p}_{esq} = 0$  à esquerda e  $\bar{p}_{dir} = 1$  à direita do reservatório.

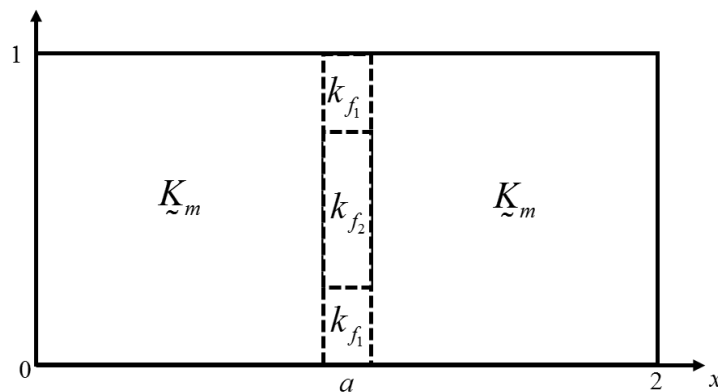


Figura 8. Configuração para o escoamento monofásico em reservatório com fratura perpendicular ao fluxo. Adaptado de: Ahmed *et al.* (2015).

Foi utilizada uma malha não estruturada composta por 4780 triângulos, considerando uma região fraturada com abertura constante  $a = 10^{-2}$ , dividida em três sub-regiões. As



permeabilidades, normal e tangencial, na região central da fratura são dadas por  $k_{f_2} = 2 \times 10^{-3}$ , enquanto que nas partes inferior e superior da fratura, tem-se  $k_{f_1} = 1$ , indicando a presença de uma barreira no centro do reservatório. Para o modelo descontínuo foi adotado  $\zeta = 2/3$ , valor que apresentou os melhores resultados nas avaliações heurísticas de Ahmed *et al.* (2015).

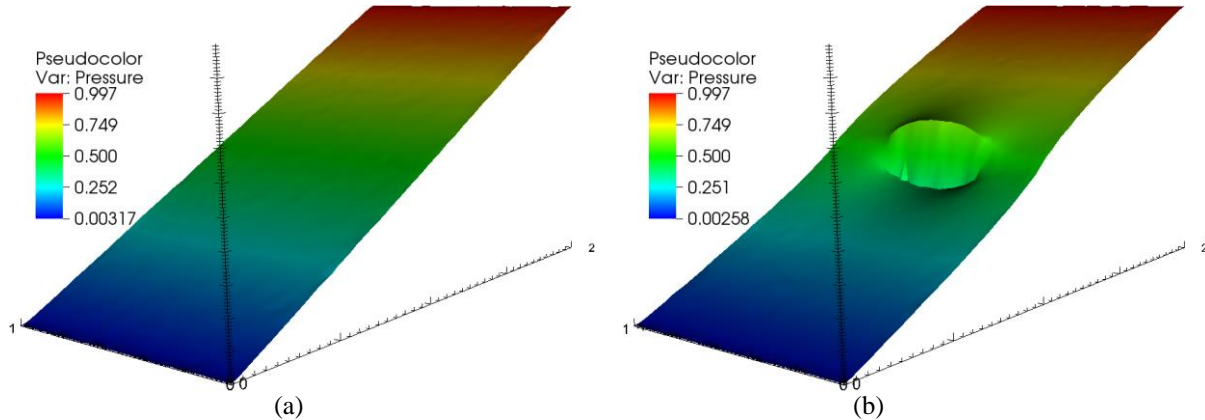


Figura 9. Mapas de pressões para o problema do escoamento monofásico em reservatório com fratura perpendicular ao fluxo: (a) Modelo de pressão contínua; (b) Modelo de pressão descontínua.

Observa-se na Fig. 9, que o modelo de pressão contínua apresenta um resultado satisfatório apenas na zona de maior permeabilidade.

Apesar da boa taxa de convergência apresentada na Fig. 7, em alguns casos com permeabilidades baixas, o modelo de pressão contínua não foi capaz de capturar o salto na pressão ao longo da barreira, conforme efetuado pelo modelo de pressão descontínua, o que condiz com a própria construção do LDFM. Essa discrepância foi devida ao problema com solução analítica apresentar simetria na pressão ao longo da fratura, ao contrário do presente exemplo. Com isso, o modelo de pressão contínua se mostra eficaz para os casos de elevada permeabilidade no sentido normal à fratura.

#### 4.3 1/4 de cinco poços com fratura diagonal: Comparativo entre a saturação explícita e implícita

Para comparação entre os dois métodos de cálculo da saturação, explícito ou implícito, foi utilizada uma configuração de 1/4 de cinco poços com uma fratura que segue ao longo de parte da linha diagonal que liga os poços de injeção e produção. O domínio foi discretizado por uma malha não estruturada com 450 volumes de controle, possuindo um poço produtor ( $P$ ), um poço injetor ( $I$ ) e uma fratura ( $k_f$ ), conforme apresentado na Fig. 10:

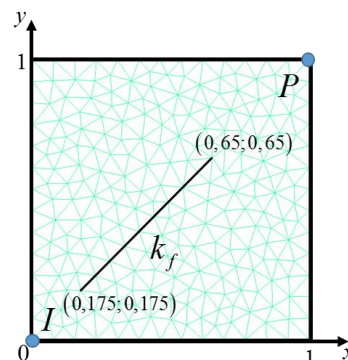


Figura 10. Domínio e malha para o problema de 1/4 de Cinco Poços com Fratura Diagonal.

Nesse problema, impõe-se fluxo nulo nos contornos, pressão  $\bar{p}_p = 0$  no poço produtor, pressão  $\bar{p}_i = 1$  e saturação de água de  $\bar{s}_{w_i} = 1$  no poço injetor e o no início da simulação o domínio está completamente saturado por óleo  $s_w(\bar{x}, 0) = 0, \forall \bar{x} \in \Omega$ . A matriz apresenta um tensor de permeabilidade isotrópico e diagonal com valor unitário, e uma fratura com abertura igual a  $a = 10^{-3}$  e permeabilidades tangencial e normal,  $k_f = 10^4$ . Foi utilizado o modelo de pressão descontínua com  $\zeta = 2/3$ . Para o cálculo do passo de tempo, no método totalmente implícito, foi imposta uma restrição igual ao menor valor, para os volumes da matriz, encontrado pela Eq. (35). Na Figura 11, são apresentados os mapas de saturações de água, para  $t = 1 \text{ VPI}$  (Volume Poroso Injetado), tanto utilizando o método IMPES como o sequencial implícito. Na Fig. 12, são apresentadas a produção acumulada de óleo e produção de água, que indica o momento da irrupção de água (*water breakthrough*).

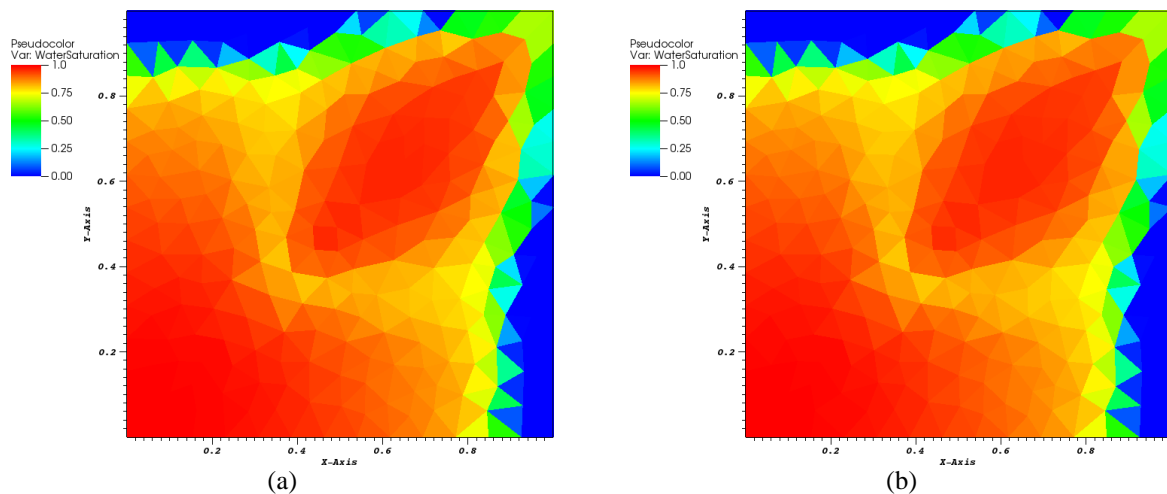


Figura 11. Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços com fratura diagonal: Mapa de saturações de água do problema 3: (a) IMPES; (b) Sequencial implícito.

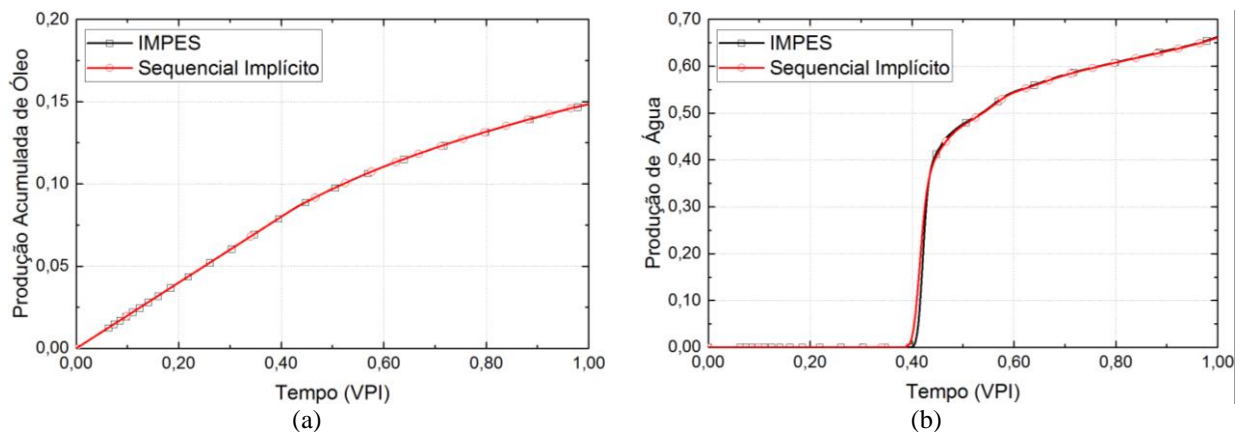


Figura 12.  $\frac{1}{4}$  de Cinco Poços com Fratura Diagonal: (a) Produção acumulada de óleo; (b) Produção de água

Observa-se nas Figuras 11 e 12, que o método sequencial implícito não apresentou diferenças significativas em relação ao IMPES, tendo tido apenas um pequeno aumento da difusão numérica, observada pela antecipação em  $3,1 \cdot 10^{-3} \text{ VPI}$ , 0,9%, no tempo em que ocorre a irrupção de água na Fig. 12b. A Tabela 2 apresenta o custo computacional através dos tempos de simulação e número de passos de tempo demandados por cada método.

**Tabela 2. Custo computacional**

	IMPES	Sequencial Implícito
Tempo de Simulação (s)	7.172,96	269,63
Passos de Tempo	15.569	596

A velocidade elevada na fratura acarretou numa alta restrição no passo de tempo para o método IMPES, enquanto o método sequencial implícito, ao desconsiderar a restrição na fratura, resolveu esse mesmo problema com um custo computacional aproximadamente 96% menor, tanto no tempo de simulação quanto no número de passos de tempo. O ganho no tempo de simulação é levemente inferior de que no número de passos de tempo, pois o IMPES apresenta um custo computacional menor por passo de tempo, mas não o suficiente para inibir o ganho global apresentado pelo método sequencial implícito.

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi implementado um Modelo de Fraturas com Dimensão Reduzida, utilizando o método de volumes finitos MPFA-O para o problema de pressão. Para o problema da saturação, foram implementados os métodos explícito e implícito. Para testar a metodologia implementada, foram realizados um teste de convergência, uma comparação entre o método de pressão contínua e o método de pressão descontínua para o problema da pressão, e uma comparação entre o método explícito e o implícito para o problema da saturação. O método de pressão contínua apresentou boa acurácia quando  $a/L_f \ll 1$ , enquanto o método de pressão descontínua foi capaz de modelar adequadamente um caso com uma barreira central. A solução do problema da saturação pelo método implícito mostrou-se mais eficiente em relação ao método explícito, no caso de alta permeabilidade tangencial na fratura, ocasionando apenas um pequeno incremento na difusão numérica. No futuro próximo, pretende-se implementar o LDFM em conjunto com um outro método de volumes finitos com aproximação de fluxo por múltiplos pontos, capaz de lidar de maneira mais eficiente e robusta com problemas que apresentem tensores de permeabilidade muito anisotrópicos.

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer os seguintes órgãos: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq), CENPES-PETROBRAS (SIGER – Rede Temática de Simulação e Gerenciamento de Reservatórios), a *Computer Modelling Group Foundation* (CMG Foundation) e a Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE).

## REFERÊNCIAS

Aavatsmark, I., Barkve, T., Bøe, O., & Mannseth, T., 1998. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part I, Derivation of the methods, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 19(5), pp. 1717–1736.

- Ahmed, R., Edwards, M.G., Lamine, S., Huisman, B.A.H., & Pal, M., 2015. Control-volume distributed multi-point flux approximation coupled with a lower-dimensional fracture model, *Journal of Computational Physics*, vol. 284, pp. 462–489.
- Carvalho, D. K. E., 2005. *Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de Dados por Aresta para a Simulação de Escoamentos em Meios Porosos*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco/Recife.
- Contreras, F. R. L., Lyra, P. R. M., Souza, M. R. A., & Carvalho, D. K. E., 2016. A cell-centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs, *Computers & Fluids*, vol. 127, 1–16.
- Edwards, M. G., & Rogers, C. F., 1998. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation, *Computational Geoscience*, vol. 2(4), pp. 259–290.
- Ewing, R. E., 1983. *The Mathematics of Reservoir Simulation*. Richard E. Ewing ed., Frontiers in Applied Mathematics, vol. 1, SIAM, Philadelphia.
- Ghorayeb, K., & Firoozabadi, A., 2000. Numerical study of natural convection and diffusion in fractured porous media, *SPE Journal*, vol. 5(1), pp. 12–20.
- Hægland, H., Assteerawatt, A., Dahle, H.K., Eigestad, G.T., & Helmig, R., 2009. Comparison of cell-and vertex-centered discretization methods for flow in a two-dimensional discrete-fracture-matrix system, *Advances in Water Resources*, vol. 32, pp. 1740–1755.
- Hoteit, H., & Firoozabadi, A., 2008. An efficient numerical model for incompressible two-phase flow in fractured media, *Advances in Water Resources*, vol. 31(6), pp. 891–905.
- Martin, V., Jaffré, J., & Roberts, J.E., 2005. Modelling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 26(5), pp. 1667–1691.
- Peaceman, D. W., 1977. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Elsevier Scientific Publishing Co., Developments in Petroleum Science, vol. 6, Amsterdam.
- Sandve, T.H., Berre, I., & Nordbotten, J.M., 2012. An efficient multi-point flux approximation method for discrete fracture-matrix simulations, *Journal of Computational Physics*, vol. 231(9), pp. 3784–3800.
- Souza, 2015. *Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos Utilizando um Método de Volumes Finitos “Verdadeiramente” Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco/Recife.
- Uleberg, K., & Kleppe, J. 1996. Dual porosity, dual permeability formulation for fractured reservoir simulation, *Trondheim RUTH Seminar*, Norwegian University of Science and Technology/Stavanger.
- Unsal, E., Matthäi, S.K., & Blunt, M.J., 2010. Simulation of multiphase flow in fractured reservoirs using a fracture-only model with transfer functions, *Computational Geosciences*, vol. 14(4), pp. 527–538.