



UM MODELO DE CONTATO SÓLIDO-SÓLIDO PARA O MÉTODO DE PARTÍCULAS MOVING PARTICLE SIMULATION

Pedro Henrique Saggioratto Osello

Liang-Yee Cheng

Rubens Augusto Amaro Junior

pedro.oselo@usp.br

cheng.yee@usp.br

rubens.amaro@usp.br

Departamento de Engenharia de Construção Civil, Universidade de São Paulo.

Av. Prof. Almeida Prado, trav. 2 no. 83, 05508-900, São Paulo, SP, Brasil.

Resumo. *Problemas de interação fluido-estrutura com presença de superfície livre e sólidos livres para deslocar são fenômenos hidrodinâmicos altamente não lineares e de elevada complexidade, que trazem grandes desafios para a modelagem e simulação computacional. Nos casos de contato ou colisão entre sólidos, normalmente é necessário realizar algum tratamento específico para impedir a penetração entre corpos. Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é contribuir para o desenvolvimento de uma técnica de simulação dos fenômenos hidráulicos e costeiros que envolvem a interação entre fluidos e sólidos apresentando um modelo de contato sólido-sólido para o método Moving Particle Simulation (MPS). O MPS é um método baseado na discretização do domínio em partículas, sem utilização de malha, e capaz de modelar geometrias complexas com grandes deslocamentos e deformação, incluindo superfícies livres com fragmentação e junção de fluidos e presença de multicorpos. O modelo de contato sólido-sólido proposto visa estender as funcionalidades do MPS, simplificando forças interfaciais por meio de um sistema massa-mola-amortecedor, de forma a reproduzir as propriedades macroscópicas da interação entre multicorpos. Comparações entre resultados numéricos e analíticos são realizados para calibração de constantes do modelo. O modelo é aplicado para um caso de carregamento de sólido livre em escoamento com superfície livre, e comparado com resultados numéricos e experimentais.*

Palavras-chave: *Interação entre sólidos, Sólido livre, Moving Particle Simulation, Método de partículas, Carregamento.*

1 INTRODUÇÃO

Problemas de interação entre fluido e sólido são muito comuns em diversas áreas de engenharia, tais como hidráulica, costeira, naval e *offshore*. Geralmente são fenômenos hidrodinâmicos altamente não lineares cuja complexidade aumenta significativamente na presença de superfície livre, multicorpos e grande deslocamento dos sólidos, trazendo grandes desafios para a modelagem e simulação computacional. Dentre os métodos numéricos eficazes para simulação desses fenômenos estão os métodos de partículas, nos quais o domínio físico de um problema é representado por um conjunto de pontos (partículas). Exemplos de métodos de partículas utilizados nos mais diferentes campos da ciência e engenharia são: *Particle in Cell* (PIC) (HARLOW, 1964), *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) (LUCY, 1977; GINGOLD & MONAGHAN, 1977), *Material Point Method* (MPM) (SULSKY ET AL., 1994), *Moving Particle Simulation* (MPS) (KOSHIZUKA ET AL., 1995) e *Particle Finite Element Method* (PFEM) (IDELSOHN ET AL., 2004). Um dos desafios de implementação dos métodos está no tratamento para os contatos entre corpos na ocorrência de contato ou colisão entre sólidos. Nos métodos de partículas, diferentes técnicas têm sido adotadas para tratar do contato entre sólidos, como por exemplo, modelos de repulsão baseados no impulso durante a colisão dos sólidos, (SEUNGTAIK ET AL., 2009; AMICARELLI ET AL., 2015), ou sistemas massa-mola, garantindo repulsão, amortecimento e cisalhamento para dissipação da energia (HARADA ET AL. 2007; REN ET AL., 2014). Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é contribuir para o desenvolvimento de uma técnica de simulação dos fenômenos hidráulicos e costeiros que envolvem a interação entre fluidos e sólidos apresentando um modelo de contato sólido-sólido para o método *Moving Particle Simulation* (MPS). O modelo de contato sólido-sólido visa estender as funcionalidades do método para simulação de fenômenos envolvendo contato e/ou colisão entre multicorpos. Para isso, as forças interfaciais são simplificadas por meio de um sistema massa-mola-amortecedor, e são apresentados os critérios, assim como um procedimento para a calibração das constantes físicas em função dos parâmetros numéricos do modelo, de forma a reproduzir as propriedades macroscópicas da interação. A calibração das constantes físicas é realizada através da comparação dos resultados obtidos por soluções analíticas e resultados numéricos do MPS com o modelo de contato. Casos envolvendo um cubo sólido apoiado sobre uma superfície plana, cubo sólido em queda livre e sólido livre deslizando sobre um plano inclinado, são analisados para a calibração das constantes físicas. Para verificação do modelo em um caso de alta complexidade, é realizada a simulação numérica de um caso de *dam break* com transporte de sólido livre, comparando os deslocamentos do sólido livre obtidos pelo modelo proposto, valores experimentais e resultados numéricos obtidos com o método SPH.

2 MÉTODO NUMÉRICO MPS

As equações governantes para escoamentos incompressíveis são representadas pela lei da conservação de massa e do momento, Eqs. (1) e (2):

$$\frac{D\rho}{Dt} = \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}, \quad (2)$$

onde ρ é a massa específica, t o tempo, \vec{v} o vetor velocidade, P a pressão, ν a viscosidade cinemática e \vec{f} o vetor força externa por unidade de massa.

No método MPS, todos os termos das equações governantes, representados por operadores diferenciais, são substituídos por operadores diferenciais discretos em uma distribuição irregular de nós, onde, para cada partícula i , a influência de uma partícula vizinha j é definida pela função peso ω_{ij} :

$$\omega_{ij} = \begin{cases} \frac{r_e}{\|\vec{r}_{ij}\|} - 1 & \|\vec{r}_{ij}\| \leq r_e \\ 0 & \|\vec{r}_{ij}\| > r_e \end{cases}, \quad (3)$$

onde r_e é o raio efetivo, que estabelece quais partículas j devem ser consideradas no cálculo das grandezas físicas da partícula i , e r_{ij} é a distância entre as partículas i e j .

Para cada partícula i , a somatória dos pesos de todas as partículas vizinhas j , é definido como a densidade do número de partículas n_i :

$$n_i = \sum_{j \neq i} \omega_{ij}. \quad (4)$$

Desta forma, para uma função escalar ϕ , os operadores gradiente e laplaciano são definidos pelas Eqs. (5) e (6), respectivamente:

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{n_{\max}^0} \sum_{j \neq i} \frac{(\phi_j - \phi_i) \vec{r}_{ij}}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} \omega_{ij}, \quad (5)$$

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{\lambda n_{\max}^0} \sum_{j \neq i} (\phi_j - \phi_i) \omega_{ij}, \quad (6)$$

onde d é a dimensão espacial, n_{\max}^0 é o valor inicial máximo de n_i e λ é um parâmetro de correção, que faz o ajuste do crescimento da variância e pode ser calculado como:

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} \|\vec{r}_{ij}\|^2 \omega_{ij}}{\sum_{j \neq i} \omega_{ij}}. \quad (7)$$

Para o escoamento incompressível, um algoritmo semi-implícito é utilizado no método MPS, com velocidades e pressões sendo calculadas separadamente através do método de projeção (CHORIN, 1967). Inicialmente, velocidade e posição são calculadas explicitamente, considerando os termos de viscosidade e força externa da equação de conservação do momento, Eq. (2). Após os cálculos da parte explícita, a pressão de todas as partículas é calculada pela equação de Poisson para a pressão:

$$\langle \nabla^2 P \rangle_i^{t+\Delta t} - \alpha \frac{\rho}{\Delta t^2} P_i^{t+\Delta t} = -\gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_i^* - n_{\max}^0}{n_{\max}^0}, \quad (8)$$

onde n_i^* é a densidade do número de partículas calculada após os deslocamentos das partículas na fase explícita, α é o coeficiente de compressibilidade artificial e γ é o coeficiente de relaxação. Os coeficientes α e γ são utilizados para melhorar a estabilidade do método computacional. Além disso, o gradiente de pressão também é modificado para melhorar a estabilidade do MPS (KOSHIZUKA ET AL., 1996):

$$\langle \nabla P \rangle_i = \frac{d}{n_{\max}^0} \sum_{j \neq i} \frac{(P_j - \hat{P}_i)}{\|\vec{r}_{ij}\|^2} \vec{r}_{ij} \omega_{ij}, \quad (9)$$

onde \hat{P}_i é a pressão mínima entre os vizinhos da partícula i , garantindo exclusivamente forças de repulsão, evitando sobreposição entre partículas.

Por fim, a velocidade das partículas é atualizada, considerando somente o termo do gradiente de pressão, e a nova posição das partículas é obtida.

A identificação das partículas de superfície livre é feita com base no número de densidade de partículas. Uma partícula é definida como partícula de superfície livre e sua pressão igualada à zero, quando seu número de densidade de partículas n_i é menor do que βn_i , com $0 < \beta < 1$.

As paredes sólidas são representadas por três camadas de partículas fixas. As partículas em contato com fluido são denominadas partículas de parede, com suas pressões calculadas pela equação de Poisson para a pressão, Eq. (8), juntamente com as partículas de fluido. As partículas que formam as outras duas camadas são denominadas partículas *dummy*. As partículas *dummy* são utilizadas para garantir o cálculo correto do número de densidade de partículas nas partículas de parede, não sendo calculada a pressão destas partículas.

3 INTERAÇÃO SÓLIDO-SÓLIDO

A colisão entre corpos rígidos é identificada monitorando-se a distância entre as partículas de parede dos sólidos. Quando a distância entre duas partículas de parede pertencentes a sólidos diferentes é inferior à distância de colisão d_c , a colisão entre sólidos é estabelecida e forças de colisão (\vec{F}_c) são contabilizadas. Considerando que as partículas ocupam uma região cúbica, para casos tridimensionais, a distância de colisão utilizado neste trabalho é considerada como a distância entre os centros das partículas, na configuração apresentada na Figura 1, onde $d_c = \sqrt{l_0^2 + (0.707l_0)^2} = 1.225l_0$.

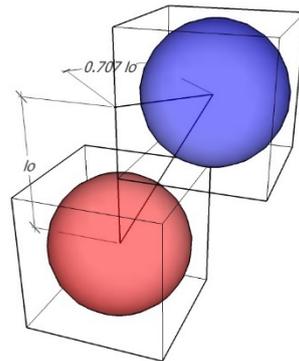


Figura 1. Distância de colisão entre partículas 3D.

Para a força de colisão, conforme proposto por Harada et al. (2007), três componentes são considerados: forças de repulsão (\vec{F}_R), forças de amortecimento (\vec{F}_D) e forças de atrito dinâmico (\vec{F}_A), para cada par de partículas. A força de repulsão (\vec{F}_R) é obtida por:

$$\vec{F}_R = -K(d_c - \|\vec{r}_{ij}\|) \frac{\vec{r}_{ij}}{\|\vec{r}_{ij}\|}, \quad (10)$$

onde K é o coeficiente de mola. A força de amortecimento (\vec{F}_D) é calculada como:

$$\vec{F}_d = C(\vec{v}_j - \vec{v}_i), \quad (11)$$

onde C é o coeficiente de amortecimento e \vec{v}_i e \vec{v}_j são as velocidades das partículas i e j , respectivamente. A força de atrito (\vec{F}_A) é calculada como uma força proporcional à velocidade tangencial entre partículas de parede, de maneira semelhante a uma força de cisalhamento, obtida por:

$$\vec{F}_A = \eta \vec{v}_{i,j}^t, \quad (12)$$

onde η é o coeficiente de atrito numérico e $\vec{v}_{i,j}^t$ a velocidade tangencial relativa entre duas partículas i e j , calculada como:

$$\vec{v}_{i,j}^t = \vec{v}_{i,j} - \left(\vec{v}_{i,j} \cdot \frac{\vec{r}_{ij}}{\|\vec{r}_{ij}\|} \right) \frac{\vec{r}_{ij}}{\|\vec{r}_{ij}\|}, \quad (13)$$

onde $\vec{v}_{i,j} = \vec{v}_j - \vec{v}_i$.

Para evitar que as forças de repulsão e de amortecimento atuassem em qualquer direção que não a ortogonal do plano de contato, causando assim um amortecimento tangencial semelhante a uma força de atrito adicional, foi adotada uma simplificação onde as forças de repulsão e de amortecimento são projetadas na direção do vetor normal da parede do sólido. Assim, a força total resultante da colisão (\vec{F}_c), atuante sobre o corpo, é determinada como:

$$\vec{F}_c = \frac{1}{n_c} \left(\sum \vec{F}_R \cdot \vec{N} + \sum \vec{F}_D \cdot \vec{N} + \sum \vec{F}_A \right), \quad (14)$$

onde n_c é o número de ocorrências de colisão entre partículas de parede, e \vec{N} é o vetor normal da parede do sólido. Desse modo, a única força tangencial atuante no sólido pelo modelo proposto é a força de atrito numérico, Eq. (13).

4 CASOS ESTUDADOS

A validação do modelo proposto se deu em três etapas. Primeiramente, duas situações foram consideradas para a calibração da constante de mola K . Um cubo sólido apoiado sobre uma superfície plana foi simulado com o modelo proposto a fim de verificar a dependência da constante K com o peso do sólido ou com a distância inicial entre partículas l_0 , para que o corpo sólido permanecesse próximo do repouso. Um segundo caso foi simulado, consistindo em um sólido cúbico em queda livre vertical sobre uma superfície plana, para verificação do valor de K mínimo que impedisse a penetração do sólido na superfície plana. Na segunda etapa foi analisado um caso de sólido livre deslizando sobre um plano inclinado, de modo a obter o valor do coeficiente de atrito numérico equivalente a um coeficiente de atrito teórico, pré-determinado. Na terceira etapa foi realizada a simulação numérica de um caso de *dam break* com transporte de sólido livre, comparando os deslocamentos do sólido obtidos pelo modelo proposto, e valores experimentais e numéricos obtidos com o método SPH (AMICARELLI ET AL., 2015).

4.1 Calibração da constante de mola

O objetivo do primeiro estudo é determinar os valores de constante de mola K suficientes para manter um corpo sólido, sujeito a ação da gravidade, próximo da situação de repouso quando apoiado sobre uma superfície plana. Para isso, foi analisada a influência de diferentes valores de K sobre a amplitude máxima de oscilação do sólido apoiado sobre a superfície. Como caso de estudo, foi analisado um cubo de lado 0.20 m, densidade $\rho = 2660 \text{ kg/m}^3$ e l_0 igual a 0.025 m, inicialmente em repouso e posicionado a uma distância igual à distância de colisão (d_c) sobre uma superfície plana, como apresentado na Figura 2. Através dos valores da constante K , também foram determinadas as constantes de amortecimento crítico C_{crit} .

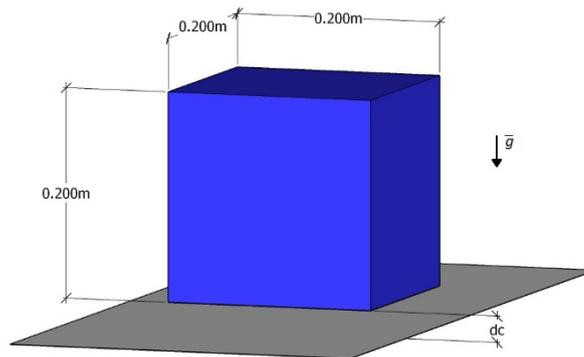


Figura 2. Ilustração do caso de contato inicial estático

Como critério de escolha das constantes de mola aceitáveis, os autores adotaram que a amplitude de oscilação do centro geométrico do sólido, ao longo de uma simulação de 10 segundos, não deveria ultrapassar 20% da distância inicial entre partículas l_0 . A Figura 3 apresenta a amplitude máxima de oscilação relativa a l_0 em função dos valores de $K = 10^5$, 10^6 , 10^7 e $5 \times 10^7 \text{ N/m}$.

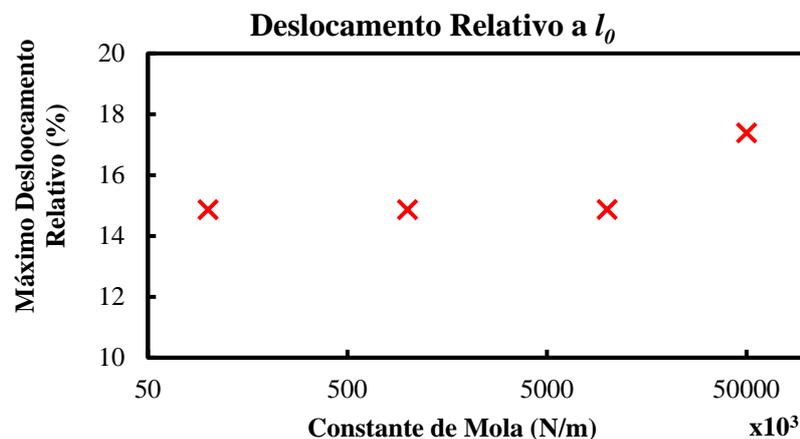


Figura 3. Máximo deslocamento relativo do centro de gravidade do sólido no caso de contato inicial estático.

É possível observar na Figura 3 que o modelo é robusto para o caso proposto, atendendo o critério estabelecido para uma faixa ampla de valores de K , onde o caso de maior amplitude, com $K = 5 \times 10^7 \text{ N/m}$, apresenta o valor de 17.4%. Para verificar a robustez do modelo, todos os casos utilizaram o mesmo passo de tempo de simulação. Como o período natural do corpo é inversamente proporcional a sua rigidez K , o passo de tempo utilizado não foi suficiente para garantir uma pequena penetração do sólido livre na superfície de apoio, no caso de $K =$

5×10^7 N/m. Dessa forma, diferente da condição esperada de menor amplitude de oscilação para um valor mais alto de K , a maior penetração do sólido acarretou na maior amplitude de oscilação observada. O valor do coeficiente de amortecimento de referência para cada caso pode ser determinado pela fórmula do oscilador harmônico criticamente amortecido, onde o valor do coeficiente de amortecimento C_{crit} é obtido por:

$$C_{crit} = 2\sqrt{K * m} , \tag{15}$$

onde m é a massa do sólido livre. O caso de amortecimento crítico foi adotado como referência por ser único e por eliminar a oscilação de forma eficiente.

Para o mesmo caso do sólido com formato cúbico e apoiado numa superfície plana, adotando o valor de constante de mola $K = 10^5$ N/m, é apresentado na Figura 4 o desenvolvimento do deslocamento relativo do corpo durante os instantes iniciais. Esse caso foi escolhido por apresentar o melhor resultado para visualização, já que a frequência de oscilação do sólido livre é proporcional ao valor de K , e os valores mais elevados apresentavam um intervalo de oscilação até a estabilização demasiadamente pequenos, comprometendo a visualização. A amplitude da oscilação foi monitorada em relação a posição final estática do centro de massa do sólido, e os valores obtidos são apresentados relativos a l_0 . Foram considerados quatro valores de amortecimento em função do coeficiente de amortecimento crítico, C_{crit} , $0.5C_{crit}$, $0.1C_{crit}$ e $0.01C_{crit}$.

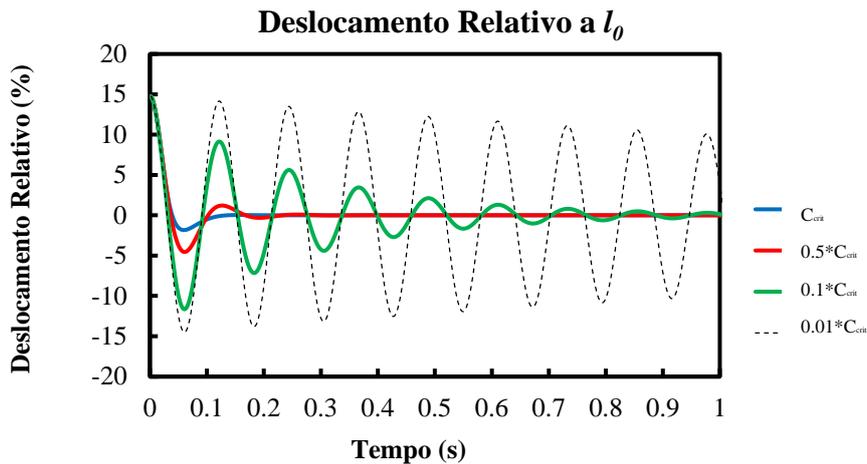


Figura 4. Deslocamento relativo do centro de gravidade do sólido para K de 10^5 N/m.

Para os coeficientes de amortecimento iguais a C_{crit} e $0.5C_{crit}$, nota-se o comportamento esperado de amortecimento, atenuando rapidamente a oscilação do movimento do sólido. Os dois outros casos permitem observar claramente o comportamento oscilatório do sólido, análogo a um oscilador harmônico amortecido. Levando isso em consideração, um segundo caso para calibração da constante K foi realizado. O caso consiste de um corpo cúbico de lado 0.20 m, com sua face inferior distando verticalmente 2.0 m da base do domínio, e modelado como um recipiente retangular com $0.8 \times 0.8 \times 2.5$ m³ (comprimento x profundidade x altura), como apresentado na Figura 5. Os parâmetros de densidade e l_0 adotados para o sólido cúbico são apresentados na Tabela 1. Para simplificar a notação, os testes de calibração para densidade serão abreviados por CD e os testes de calibração para l_0 por CL.

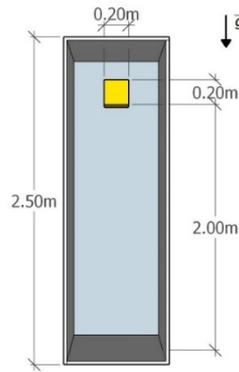


Figura 5. Ilustração do teste para determinação do K_{min} .

O sólido cúbico fica sujeito a ação da gravidade e colide com a base do domínio. Em casos de colisão desse tipo, é esperada a existência de um valor de K mínimo (K_{min}) que impeça o sólido de penetrar a parede da base, sem ser devidamente repellido, até eventualmente atravessar a parede e deixar o domínio da simulação. Para evitar isso, o valor de K_{min} deve fornecer uma energia de mola superior à energia de colisão. Uma maneira simples de estimar esse K_{min} é igualar a energia potencial do sólido com a energia elástica da mola, em seu estado de compressão máxima, isto é, quando tiver sido comprimida de um comprimento d_c , formulada como:

$$K_{min} = \frac{2m\bar{g}h}{d_c^2}, \quad (16)$$

onde h é a distância entre a base do sólido livre e a base do domínio. Verifica-se que a relação entre K_{min} e o peso do sólido é linear, enquanto que sua relação com d_c é quadrática.

Tabela 1. Propriedades dos casos

Caso	Densidade (kg/m ³)	Material equivalente	Peso (N)	l_0 (m)	Peso por unidade de área (Peso / l_0^2)
CD01	7750	Aço	608.01	0.025	972819.7
CD02	4500	Titânio	353.04	0.025	564863.0
CD03	2660	Quartzo	208.68	0.025	333896.8
CD04	1900	Epóxi	149.06	0.025	238497.7
CD05	780	Madeira	61.19	0.025	97909.6
CL01	2660	Quartzo	208.68	0.01	2086855.1
CL02	2660	Quartzo	208.68	0.02	521713.8
CL03	2660	Quartzo	208.68	0.025	333896.8
CL04	2660	Quartzo	208.68	0.04	130428.4
CL05	2660	Quartzo	208.68	0.05	83474.2

Durante a calibração, constatou-se que o K_{min} teórico nem sempre era suficiente para impedir a penetração do sólido na base. Deste modo, primeiramente buscou-se determinar por meio de experimento computacional um valor de coeficiente de mola ideal (K_{ideal}) que permitisse o sólido retornar à sua posição inicial numa colisão totalmente elástica. Na simplificação adotada para o modelo massa-mola-amortecedor, a única fonte de dissipação de energia no sistema é o amortecimento, ocorrendo colisão perfeitamente elástica nos casos em que a constante de amortecimento é nula. Verificou-se na calibração, que o sólido retornava a sua posição inicial após a colisão, acrescido de um desvio relativo à distância h , e, portanto, para efeito de padronização, adotou-se que o K_{ideal} seria o valor de K que minimiza esse desvio, seguindo a equação:

$$\frac{h - 3l_0}{h} \leq \frac{h_{final}}{h} \leq \frac{h + 3l_0}{h}, \quad (17)$$

onde h_{final} é a altura máxima atingida pelo sólido após a primeira colisão.

Para efeito de comparação, os casos CD e CL foram simulados com três modelos diferentes de colisão. O primeiro modelo foi de repulsão entre partículas pela pressão obtida pela equação de Poisson para a pressão, Eq. (8), e um modelo de colisão (LEE ET AL., 2011), para partículas que acabam sendo reconhecidas como superfície livre e não tem sua pressão calculada. Esse modelo de colisão é aplicado quando a distância entre as partículas é menor do que alo . Assim, baseado na conservação da quantidade de movimento, uma velocidade de repulsão (\vec{v}') é calculada para a partícula como:

$$\vec{v}' = -b\vec{v}, \quad (18)$$

onde b é um coeficiente de restituição e \vec{v} a velocidade que a partícula estava antes da colisão ser detectada. Valores de $a = 0.8$ e $b = 0.2$ foram utilizados nesse trabalho. Em seguida foi simulada a colisão com o modelo proposto, porém com constante de amortecimento nula, ou seja, colisão perfeitamente elástica, de modo a obter os valores de K_{ideal} para cada caso. Por último, foi verificada a aderência do modelo proposto ao caso analítico de amortecimento crítico, isto é, tomando como base os valores obtidos de K_{ideal} , os casos foram simulados com as respectivas constantes de amortecimento críticas determinadas pela Eq. (15).

O caso CD03 encontra-se na média do intervalo de pesos e de l_0 testados, e é apresentado na Figura 6, nas situações de colisão tratada com cálculo padrão do MPS, colisão tratada com o modelo proposto sem amortecimento e colisão tratada com modelo proposto com constante de amortecimento crítica, para efeito de comparação. Nos dois casos simulados com o modelo de colisão proposto, foram usados valores de passo temporal $\Delta t = 0.0005$ s e coeficiente de relaxação $\gamma = 0.004$. No caso calculado pela pressão padrão do MPS o coeficiente de relaxação teve que ser acrescido em 12.5 % ($\gamma = 0.0045$) para evitar que o sólido penetrasse a base do domínio.

Analisando-se a Figura 6, é possível observar que o modelo de cálculo do contato pela pressão padrão do MPS (primeira coluna) não reproduz de forma satisfatória a colisão entre sólidos. Essa abordagem é suficiente para garantir que o sólido não penetre a base do recipiente, no momento do primeiro contato, mas no restante da simulação o sólido acaba retornando a uma posição muito superior ao desvio máximo adotado, chegando a colidir com o teto do domínio em $t = 1.22$ s. O uso do modelo de contato proposto sem amortecimento (segunda coluna), resulta em uma aproximação melhor para o impacto perfeitamente elástico. Observa-se a coerência com o caso simplificado proposto de um sistema massa-mola-amortecedor com amortecimento nulo, isto é, o sólido retorna para a posição inicial ao final

de um ciclo. A imposição do coeficiente de amortecimento crítico no terceiro caso (terceira coluna) calculado pela Eq. (15), apresenta o resultado esperado, onde toda a energia de impacto do sólido livre é dissipada durante o contato entre as superfícies, de modo que o sólido se mantém em repouso após o contato inicial.

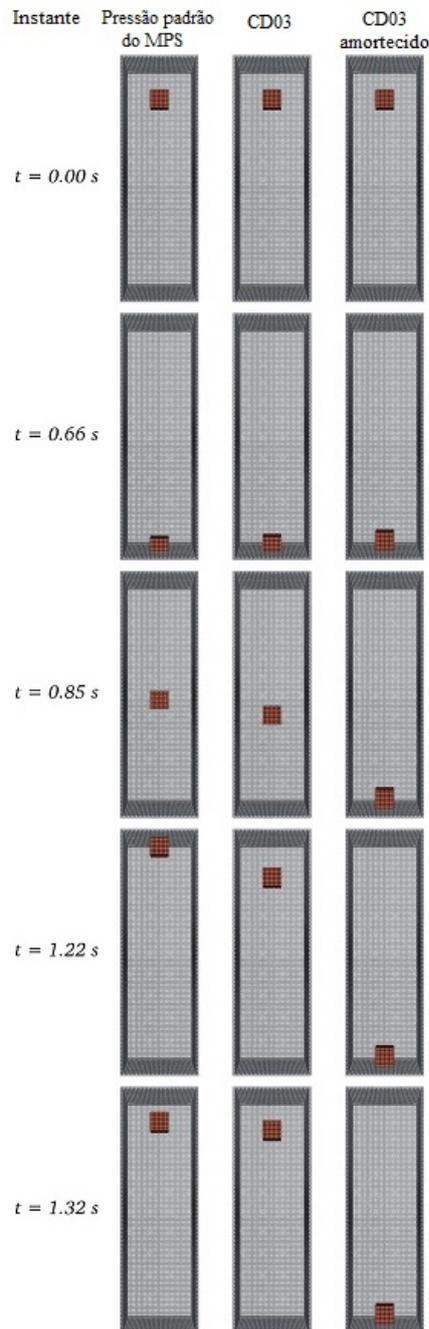


Figura 6. Comparação dos casos de colisão para determinação do K_{ideal} , cálculo pela pressão, CD03 e CD03 amortecido.

Os resultados para a calibração da constante de mola com diferentes pesos para o sólido livre (casos CD) e os resultados para a calibração da constante de mola para diferentes valores de distância inicial de partículas (casos CL), em relação ao peso por unidade de área do sólido livre, isto é, o peso dividido pela distância inicial de partículas elevada ao quadrado, são apresentados na Figura 7 e Figura 8, respectivamente. Em ambos os casos, os modelos de

correlação obtidos estão de acordo com a formulação analítica (Eq. (16)), onde a dependência do K em relação ao peso é linear e a dependência em relação à d_c é quadrática.

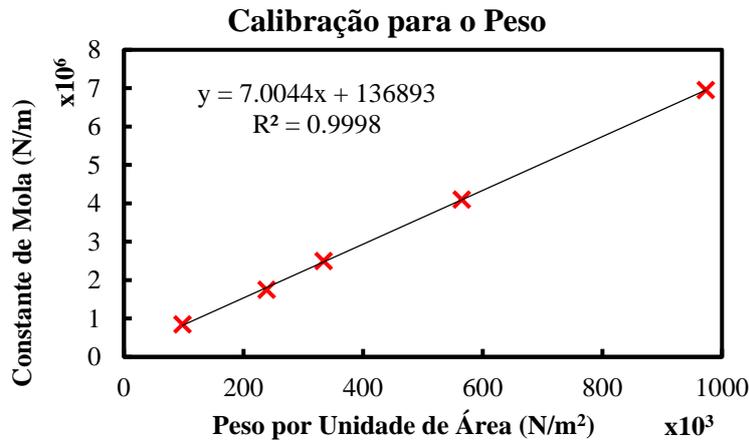


Figura 7. Calibração do K_{ideal} para pesos de sólido livre diferentes.

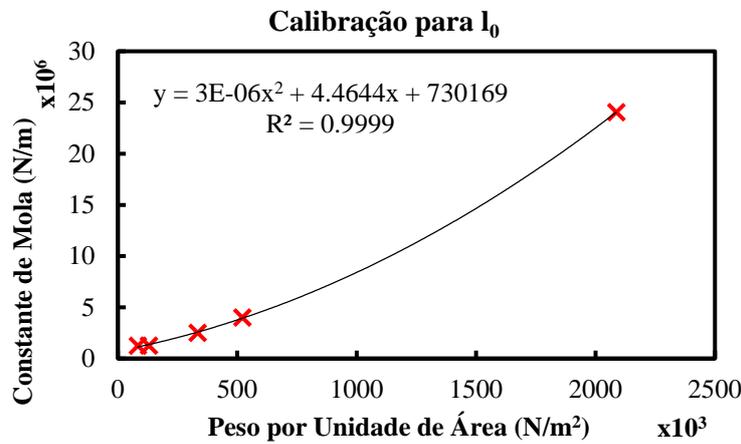


Figura 8. Calibração do K_{ideal} para um sólido livre com diferentes valores de distância inicial de partículas

A Figura 9 apresenta a proporção entre os valores obtidos de K_{ideal} (para os casos computados) e os valores teóricos de K_{min} obtidos pela formulação analítica (Eq. (16)).

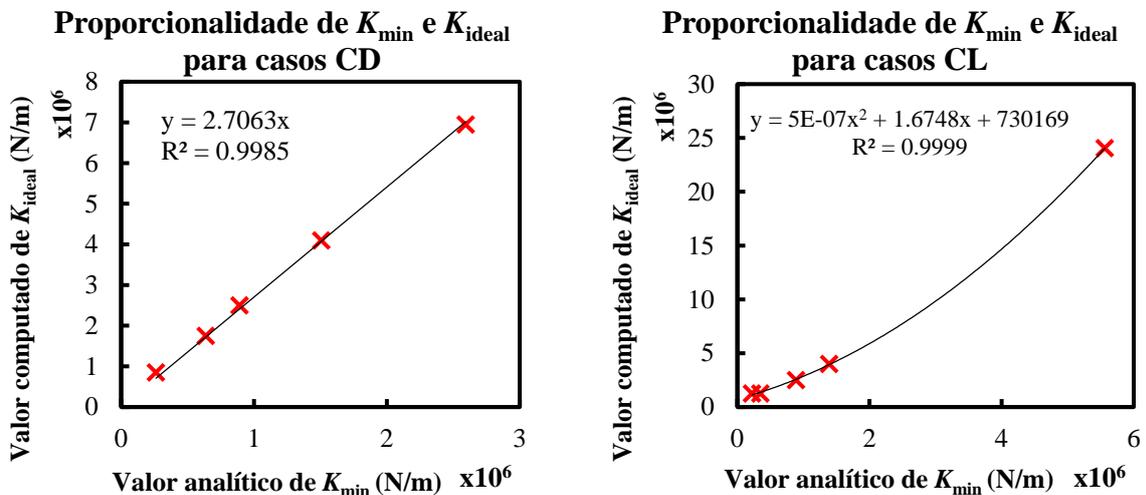


Figura 9. Proporção entre os valores de K_{ideal} (computado) e K_{min} (analítico).

4.2 Teste do plano inclinado

Com o intuito de calibrar o coeficiente de atrito numérico (η), foi modelado um caso de escorregamento de corpo sólido em um plano inclinado a 45° . Um sólido de base $0.2 \times 0.2 \text{ m}^2$ e altura 0.1 m e densidade de 780 kg/m^3 foi posicionado no topo do plano inclinado de 45° e comprimento de 2.2 m , de modo que o sólido pudesse deslocar 2.0 m sobre o plano, sob ação exclusiva da gravidade e do atrito. O valor adotado para l_0 foi de 0.025 m e a distância inicial que separa o sólido do plano é a distância de detecção de colisão (d_c). O valor adotado para o coeficiente de mola foi aproximadamente o K_{ideal} , $9 \times 10^5 \text{ N/m}$, segundo a calibração apresentada no item 4.1, e para o coeficiente de amortecimento o valor de $3.35 \times 10^3 \text{ kg/s}$, o C_{crit} , de modo a evitar oscilações do sólido na direção normal ao plano durante a simulação. O passo temporal usado foi de $1 \times 10^{-3} \text{ s}$.

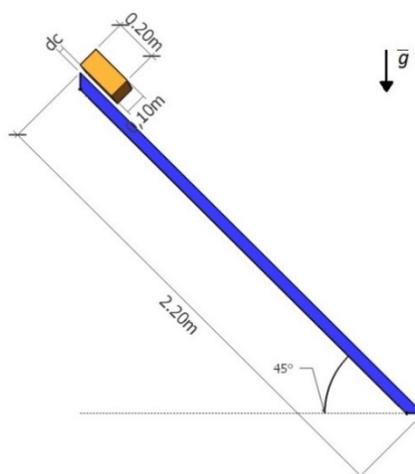


Figura 10. Geometria e dimensões do caso.

O tempo teórico (t_f) que o corpo leva para percorrer o trajeto (L) do plano inclinado foi determinado pela associação da equação da resultante das forças atuantes no sólido e aceleração do corpo na direção do movimento, Eq. (19), associada à equação horária do espaço para movimento uniformemente variado, Eq. (20), resultando na Eq. (21):

$$ma = mg \sin \alpha_p - \mu mg \cos \alpha_p, \quad (19)$$

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (20)$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2L}{\vec{g}(\sin \alpha_p - \mu \cos \alpha_p)}}, \quad (21)$$

onde μ é o coeficiente de atrito de Coulomb, α_p o ângulo de inclinação do plano, S_0 é a posição inicial, S é a posição final, V_0 é a velocidade inicial, t é o tempo que o corpo permanece em movimento e a é a aceleração atuante sobre o corpo.

Deste modo, busca-se então uma relação entre os coeficientes numérico e de Coulomb. O método adotado foi calibrar η em função de t_f , para um dado valor de μ . Alguns instantes de tempo da simulação podem ser observados na Figura 11 para o caso de $\mu = 0.3$ e o η equivalente de 9.1.

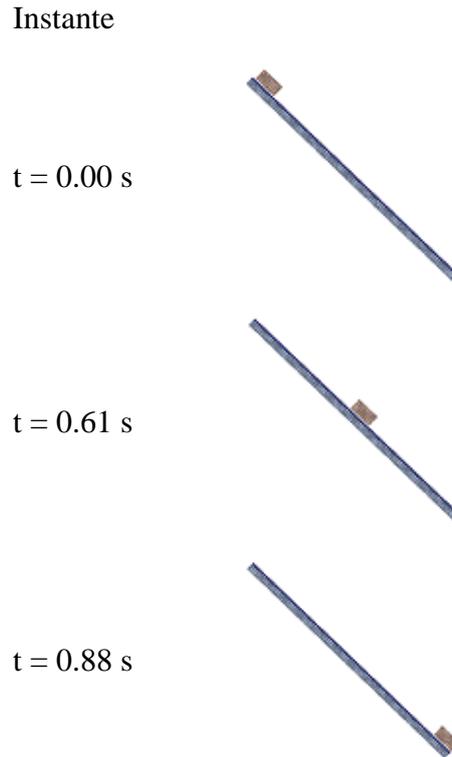


Figura 11. Escorregamento de sólido livre em plano inclinado, com valores de $\mu = 0.3$ e $\eta = 9.1$.

Na Figura 12 é apresentada a relação obtida entre os coeficientes de atrito numérico e de Coulomb junto a uma correlação quadrática entre ambos. O intervalo de análise foi determinado entre o caso com atrito nulo e o caso com coeficiente de atrito de coulomb de 0.9, o caso com coeficiente de atrito de coulomb de 1.0 não foi testado pois trata-se da situação limite para o plano inclinado a 45° , onde o bloco está na iminência do movimento.

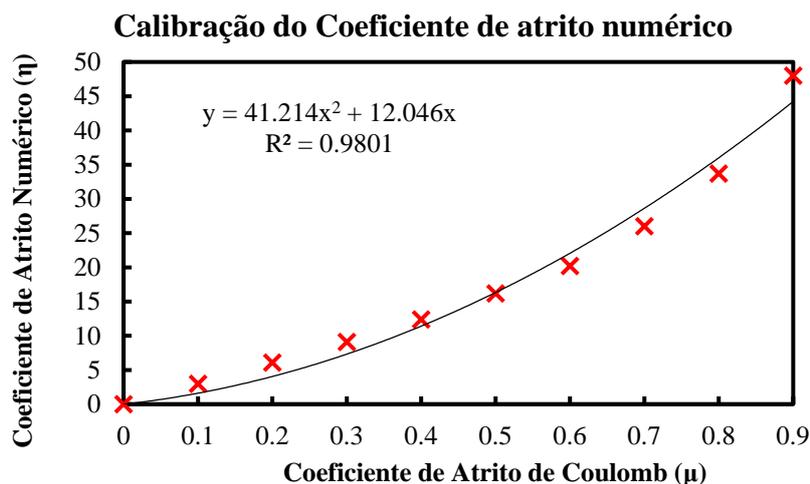


Figura 12. Calibração dos coeficientes de atrito de Coulomb e numérico.

4.3 Dam-break com transporte de sólido

Como validação do modelo proposto foi utilizado um caso de transporte de sólido baseado no estudo experimental e numérico de Amicarelli et al. (2015). Trata-se de um caso de transporte de sólido por um escoamento transitório gerado pela queda de coluna d'água sob ação da gravidade (*dam-break*), com o sólido permanecendo em repouso durante os instantes iniciais da simulação. A geometria e as dimensões deste caso são mostradas na Fig. 12. O tanque retangular de $3.5 \times 0.5 \times 0.5 \text{ m}^3$ (comprimento \times largura \times altura), restringe o escoamento e deslocamento do sólido livre. No extremo esquerdo do tanque, delimitado por uma comporta, existe um reservatório de água, de base $0.5 \times 0.5 \text{ m}^2$, preenchido com água até o nível de 0.35 m . As dimensões da comporta são $0.0376 \times 0.5 \times 0.4 \text{ m}^3$. No lado extremo direito do tanque existem duas colunas retangulares de dimensões $0.150 \times 0.150 \times 0.750 \text{ m}^3$, formando obstáculos ao escoamento, com a primeira localizada a 2.5 m de distância da extrema esquerda do tanque, e a segunda a 2.95 m . Ambos os obstáculos distam 0.06 m das paredes frontal e posterior, respectivamente. O sólido livre de formato cúbico, com arestas de 0.054 m , tem seu centro deslocado de 2.532 m da extrema esquerda do tanque e 0.313 m da parede frontal. O sólido livre possui uma massa de 0.073 kg .

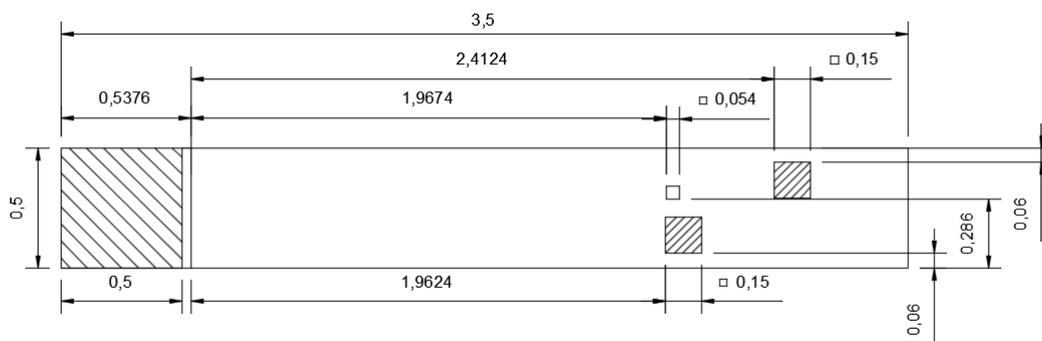


Figura 13. Vista superior e dimensões do caso, adaptado de Amicarelli et al. (2015).

No instante $t = 0.00 \text{ s}$ da simulação com o MPS, é imposto um movimento ascendente com velocidade constante de 0.11 m/s à comporta, que para imediatamente ao atingir $t = 3.00 \text{ s}$. O caso foi modelado com uma distância inicial entre partículas de 0.0075 m , mesma dimensão das partículas de sólido utilizada no caso original, totalizando cerca de 580 mil partículas. O passo de tempo usado foi de $9 \times 10^{-4} \text{ s}$. O contato entre o sólido livre e as paredes sólidas foi modelado como uma interação massa-mola-amortecedor, ou seja, um oscilador harmônico amortecido, com constante de mola de $5.6 \times 10^5 \text{ N/m}$ e constante de amortecimento de 40 kg/s , sendo a constante de mola estimada em um valor próximo ao sugerido pela calibração apresentada no item 4.1, e a constante de amortecimento equivalente a $0.1C_{crit}$, calculado pela Eq. (15).

A Figura 14 apresenta a comparação entre os resultados experimentais e computados com o método SPH, apresentados por Amicarelli et al. (2015), e os resultados computados pelo MPS com modelo de contato proposto.

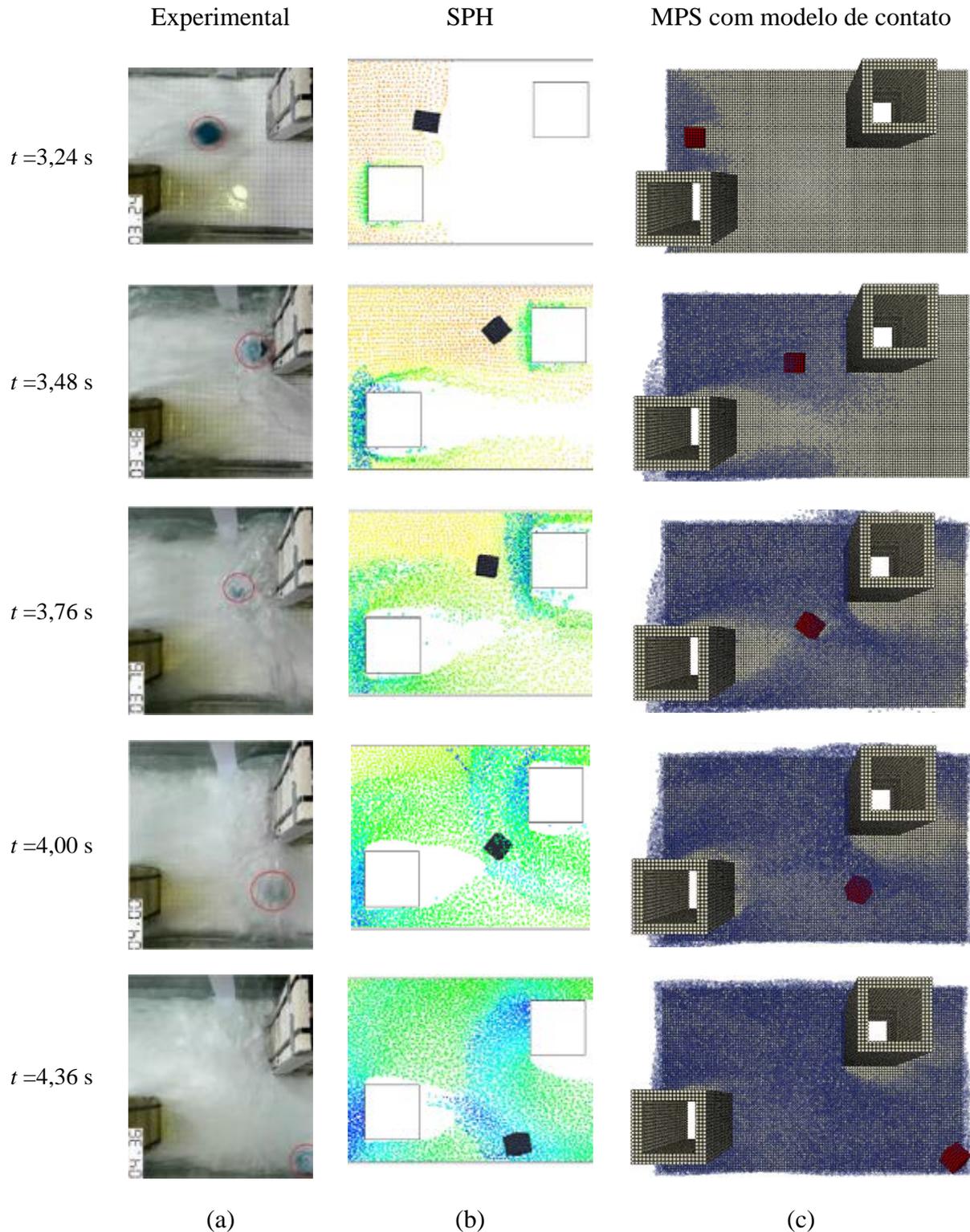


Figura 14. Transporte de sólido em *dam-break*, comparação entre os casos experimental (a), com SPH (b), e com MPS (c) usando o modelo proposto.

A sequência de imagens apresentadas para os três casos (experimental, SPH e MPS com modelo de contato proposto) mostra que há um atraso no avanço da frente de onda dos resultados computacionais em relação ao experimental, no instante $t = 3.24$ s, onde o sólido já havia sido carregado por uma pequena distância, suficiente para ultrapassar o limite posterior

do primeiro obstáculo no experimento. Nesse mesmo instante, o caso com o SPH apresenta a posição do sólido atrasada em relação ao experimento, onde o sólido não ultrapassa por completo o primeiro obstáculo. No caso computado pelo MPS, o atraso do movimento do sólido em relação ao experimento é um pouco maior, com o contato do fluido e sólido acontecendo próximo desse instante, sem carregamento significativo do sólido. Considerando o comprimento relativamente longo percorrido pelo fluido antes de atingir o sólido, é provável que o atraso da frente de onda tenha ocorrido devido a efeitos de amortecimento numérico. Em $t = 3.48$ s, o sólido colide com o segundo obstáculo e, posteriormente, no instante $t = 3.76$ s, começa a ser empurrado no sentido da parede direita do tanque, para o caso experimental. O caso computado com o SPH apresenta novamente um pequeno atraso em relação ao experimento no instante $t = 3.48$ s, e uma boa concordância com o instante $t = 3.76$ s. Para o caso computado com o MPS, o atraso ainda é um pouco maior em relação ao experimento para o instante $t = 3.48$ s, ocorrendo uma compensação para o instante seguinte, de modo que o sólido apresenta uma velocidade transversal superior ao caso experimental e com SPH. Nos dois instantes subsequentes, $t = 4.00$ s e $t = 4.36$ s, a simulação computada com o MPS apresenta uma concordância melhor com o resultado experimental, comparada a simulação computada com SPH.

A Figura 15 apresenta uma comparação entre os resultados de deslocamento do centro de massa do sólido ao longo da simulação na horizontal (ao longo do comprimento do tanque) e na vertical (altura do centro de massa em relação à base do tanque).

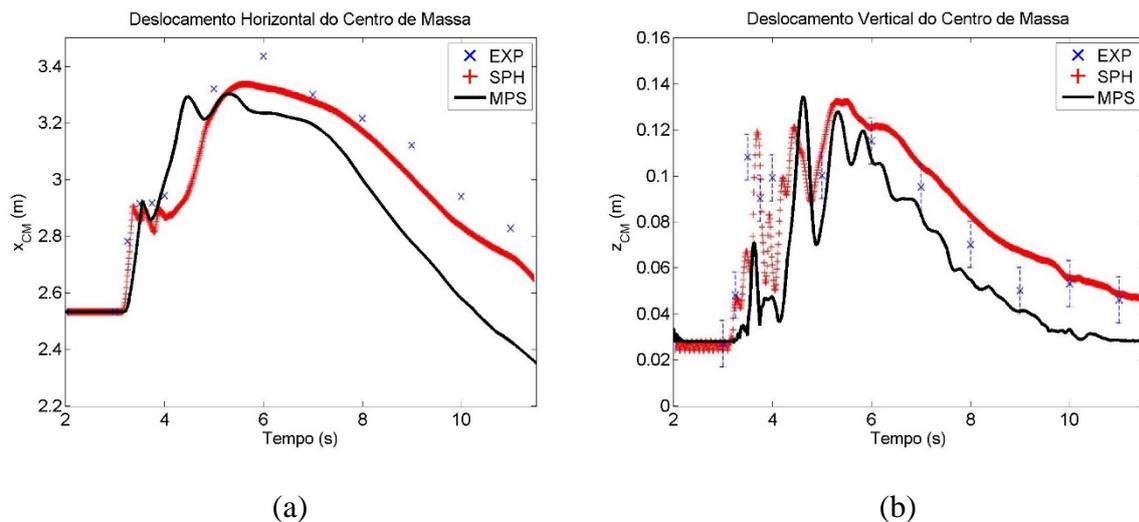


Figura 15. Comparação dos deslocamentos do centro de massa do sólido ao longo do tempo. Componente x , ao longo do tanque, (a), e componente z , altura em relação à base, (b), para os resultados experimental (X), com SPH (+) e com MPS usando o modelo proposto (-).

A evolução da posição do centro de massa do sólido ao longo do tempo, apresentada na Figura 15, oferece uma visão quantitativa do caso, viabilizando a comparação da aderência do resultado computado com o MPS e os resultados apresentados por Amicarelli et al. (2015). Os deslocamentos horizontal e vertical, obtidos com o MPS, apresentam um pequeno atraso em relação aos outros resultados, até o instante $t = 3.70$ s, aproximadamente. Entre os instantes $t = 4.00$ s e $t = 4.5$ s, o sólido é submetido a uma velocidade horizontal maior para o caso com o MPS, em relação aos outros dois casos. Em relação ao deslocamento vertical entre esses instantes, o sólido permanece em uma altura próxima da base, seguido por um rápido deslocamento vertical no caso com o MPS. Após o instante $t = 5.00$ s, os deslocamentos apresentam tendências bem semelhantes, com valores mais baixos para o caso simulado com

MPS. De forma geral, considerando o complexo fenômeno envolvido no caso, com presença de superfície livre e dinâmica não-linear, conclui-se que o método numérico computacional foi capaz de reproduzir com uma fidelidade bastante razoável o fenômeno de transporte de sólido em escoamento transiente com presença de superfície livre.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de modelar a interação entre fluídos e multicorpos sólidos usando o método de partículas *Moving Particle Simulation* (MPS), foi proposto um modelo de contato entre sólidos, baseado no sistema massa-mola-amortecedor. Primeiramente, foi realizado um estudo numérico-computacional para calibração das constantes de mola, de amortecimento, e de atrito dinâmico, considerando casos quase estáticos e dinâmicos. Através da calibração dos coeficientes, foi verificada a proporcionalidade entre os resultados numéricos obtidos e os resultados analíticos. No caso do coeficiente de mola, foi observada uma forte correlação linear entre os resultados numéricos e os resultados analíticos obtidos para os casos onde a variável analisada era o peso do sólido livre. Para os casos onde a variável analisada era a distância inicial entre partículas l_0 , a correlação observada entre os resultados numéricos e o previsto analiticamente foi parabólica. Para calibração da constante de atrito, observou-se que, dentro das condições adotadas, o coeficiente de atrito numérico apresentou uma correlação razoavelmente boa com o coeficiente de Coulomb. Ao aplicar o modelo proposto em um caso de validação de *dam-break* com transporte sólido foi possível manter uma computação estável do sólido livre nos instantes iniciais da simulação. O resultado obtido pelo método MPS com o modelo de contato proposto, apresentou um pequeno atraso no início do carregamento do corpo sólido em relação aos resultados experimental e computado pelo SPH, mas nos instantes seguintes, a posição do corpo sólido se desenvolveu com significativa semelhança durante seu carregamento pelo escoamento. Maiores estudos são necessários para verificar a eficiência do modelo em situações de maior complexidade. Uma deficiência a ser tratada é a inexistência do modelo numérico para o caso de atrito estático. Ainda assim, o funcionamento do modelo para intervalos de velocidade pequenos e para valores de coeficiente de atrito de Coulomb intermediários apresentou-se satisfatório.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a FDTE pela concessão da bolsa de Iniciação Científica ao graduando Pedro Henrique Saggioratto Osello, a CAPES pela concessão da bolsa de Doutorado para o pós-graduando Rubens Augusto Amaro Junior, e a Petrobras S.A. pelo suporte financeiro no desenvolvimento do simulador de hidrodinâmica não linear baseado no método MPS.

REFERÊNCIAS

Amicarelli, A., Albano, R., Mirauda, D., Agate, G., Sole, A. & Guandalini, R. A., 2015. Smoothed Particle Hydrodynamics model for 3D solid body transport in free surface flows. *Computer & Fluids*, vol. 116, n. 205, pp. 205-228.

Chorin, A. J., 1967. The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 73, n. 6, pp. 928-931.

- Gingold, R. A. & Monaghan, J. J., 1977. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 181, pp. 375-389.
- Harada, T., Tanaka, M., Koshizuka, S. & Kawaguchi, Y., 2007. Real-time Coupling of Fluids and Rigid Bodies. *APCOM '07 in conjunction with EPMESC XI*.
- Harlow, F. H., 1964. The particle-in-cell computing method for fluid dynamics. *Methods in Computational Physics*, vol. 3, pp. 319-343.
- Idelsohn, S. R., Ónate, E & Del Pin, F., 2004. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, n. 7, pp. 964-989.
- Koshizuka, S. & Oka, Y., 1996. Moving-Particle Semi-Implicit Method for fragmentation of incompressible fluid. *Nuclear Science and Engineering*, vol. 123, pp. 421-434.
- Lee, B.-H., Park, J.-C., Kim, M.H., Hwang, S-C., 2011. Step-by-step improvement of MPS method in simulating violent free-surface motions and impact-loads. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, n. 9-12, pp. 1113-1125.
- Lucy, L., 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, vol. 82, pp. 1013-1024.
- Ren, B., Jin, Z., Gao, R., Wang, Y.-X. & Xu, Z.-L., 2014. SPH-DEM modeling of the hydraulic stability of 2D blocks on a slope. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 140, n. 6.
- Sulsky, D., Chen, Z. & Schreyer, H. L., 1994. A Particle method for history-dependent materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 118, n.1, pp. 179-196.