



## ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA SUPERFÍCIE LIVRE DO FLUIDO NAS VIBRAÇÕES LIVRES NÃO LINEARES DA CASCA CILÍNDRICA

**Mayco V. de Sousa**

**Frederico M. A. Silva**

**Zenón J. G. N. del Prado**

eng.mayco@gmail.com

silvafma@ufg.br

zenon@ufg.br

Escola de Engenharia Civil e Ambiental – Universidade Federal de Goiás

Avenida Universitária no. 1488, 74605-220, Goiânia. Goiás, Brasil.

**Resumo.** Serão analisadas neste trabalho as vibrações não lineares de cascas cilíndricas simplesmente apoiadas, parcialmente, ou completamente, preenchidas por um fluido incompressível, irrotacional e não viscoso, considerando a influência da superfície livre no comportamento não linear do sistema. Utiliza-se a teoria não linear de Donnell e de Sanders para cascas abatidas para a representação do campo de deformação e das mudanças de curvatura da casca cilíndrica, enquanto que o fluido é dado por um potencial de velocidade, que atende a equação de Laplace e as condições de contorno do problema. Considera-se um modelo de baixa dimensão, para descrever as soluções do campo de deslocamentos da casca, obtido a partir do método da perturbação que prescreve os principais modos não lineares que se acoplam ao modo linear de vibração da casca cilíndrica. A partir da função de Lagrange da casca cilíndrica e da equação da superfície livre do fluido e empregando o método de Rayleigh-Ritz, encontram-se as equações não lineares de movimento da casca cilíndrica. Investigam-se a presença da superfície livre do fluido e da geometria da casca no comportamento das vibrações livres não lineares.

**Palavras-chave:** Superfície livre, Vibrações não lineares, Casca cilíndrica

## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, a engenharia estrutural vem passando por rigorosas transformações na concepção de seus elementos, seja pelo desenvolvimento dos procedimentos de cálculo, como também pelo avanço dos materiais empregados na construção civil. Conseqüentemente, as estruturas estão tornando-se cada vez mais leves e mais esbeltas. Neste âmbito, têm-se as cascas como um bom exemplo de quão esbeltas podem ser essas estruturas. Tais estruturas são suscetíveis aos efeitos da instabilidade estrutural e vibrações excessivas quando submetidas a cargas estáticas ou dinâmicas. Desta forma, conhecer o comportamento e as propriedades dinâmicas se torna fundamental para a análise estrutural de forma segura.

Entre alguns estudos realizados sobre a temática, têm-se os estudos realizados por Donnell (1934), um dos precursores nos estudos do comportamento não linear de cascas cilíndricas, que observou uma grande divergência entre resultados experimentais e analíticos.

A discretização do campo de deslocamento da casca cilíndrica é um importante fator, que foi estudado por anos e por diversos pesquisadores, para se soluções modais que além de atender as condições de contorno do problema sejam capazes de descrever o comportamento não linear da casca cilíndrica. Pode-se destacar os estudos de Chen e Babcock (1975), Gonçalves (1987) e Silva (2008), que utilizando o método da perturbação, realizam uma dedução consistente da solução modal do campo de deslocamento transversal capaz de caracterizar verdadeiramente o comportamento da casca cilíndrica.

Com relação a presença de meio fluido no interior da casca cilíndrica tem-se o trabalho de Amabili (1997) que analisou cascas cilíndricas simplesmente apoiadas, utilizando o modelo não linear de Donnell para descrever o campo de deslocamentos da casca e o método de Rayleigh-Ritz para obter as equações de equilíbrio do problema. Amabili (1997) concluiu que as frequências naturais da estrutura sofrem influência do nível de fluido presente em seu interior.

Kim *et al.* (2004) analisaram as vibrações de cascas cilíndricas levando em consideração a superfície livre do líquido. Para descrever o campo de deslocamento foi empregada a teoria linear de Love e para obter as equações de movimento foi utilizado o método de Rayleigh-Ritz. A formulação apresentada pelos autores é validada uma vez que os resultados numéricos foram bem próximos de outros presentes na literatura.

Ainda que as cascas sejam alvo de estudo de diversos pesquisadores pelo mundo, o seu comportamento ainda não está completamente compreendido e inúmeros fenômenos não-lineares ainda são pesquisados. A divergência entre os resultados teóricos e experimentais encontrados na literatura fortalece ainda mais a importância do estudo do comportamento das cascas cilíndricas submetidas a esforços estáticos e dinâmicos.

Há diversos trabalhos que realizam uma revisão ampla sobre as contribuições à comunidade científica sobre a análise de cascas cilíndricas. Dentre eles pode-se citar: Kubenko e Koval'chuck (1998), Amabili e Païdoussis (2003) e Alijani e Amabili (2014) que versam sobre estudos de cascas cilíndricas vazias, submetidas a cargas laterais ou axiais, com fluido interno, variando a altura do fluido e com o efeito da superfície livre – neste caso a maioria dos estudos são estudos lineares. Salvo melhor juízo, não é do conhecimento dos autores estudos sobre o comportamento não linear de cascas cilíndricas com fluido interno que consideram os efeitos do fluido interno.

Desta maneira, o presente trabalho tem o objetivo de realizar um estudo das vibrações livres e não lineares de cascas cilíndricas parcialmente preenchidas por um fluido ideal, considerando os efeitos de superfície livre deste fluido. Para descrever o campo de deslocamentos da casca cilíndrica será utilizado duas teorias não lineares: a de Donnell e a de Sanders. O fluido será representado por um potencial de velocidade que atende todas as condições de contorno do problema.

## 2 FORMULAÇÃO NÚMERICA

Nesta seção serão apresentadas as formulações numéricas do problema estudado, sendo dividido em duas seções de formulação: uma para a casca cilíndrica e outra para o fluido interno.

### 2.1 Equações da casca cilíndrica

Considera-se para os estudos deste trabalho uma casca cilíndrica, simplesmente apoiada sobre uma base rígida, de paredes finas constituída por material elástico linear e isotrópico, com modulo de elasticidade  $E$ , coeficiente de Poisson  $\nu$  e densidade  $\rho$ . A geometria e os campos de deslocamento nas direções axial ( $u$ ), circunferencial ( $v$ ) e transversal ( $w$ ) da casca cilíndrica estão ilustrados na Figura 1.

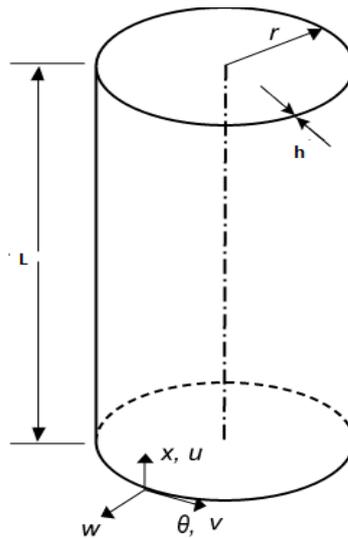


Figura 1. Geometria e campos de deslocamentos da casca cilíndrica.

A presente formulação é baseada na teoria não linear Sanders, ou de Donnell, a depender do parâmetro  $\alpha$  empregado para descrever as relações de deformações e de mudanças de curvatura para uma casca cilíndrica esbelta, a saber:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 & \kappa_x &= -w_{,xx} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} (v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2R^2} (w_{,\theta} - \alpha v)^2 & \kappa_\theta &= \frac{1}{R^2} (\alpha v_{,\theta} - w_{,\theta\theta}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{1}{R} u_{,\theta} + v_{,x} + \frac{1}{R} w_{,x} (w_{,\theta} - \alpha v) \quad \kappa_{x\theta} = \kappa_{\theta x} = -\frac{w_{,x\theta}}{R} + \frac{\alpha}{4} \left( \frac{3}{R} v_{,x} - \frac{1}{R^2} u_{,\theta} \right)$$

onde  $\alpha = 1$  tem-se o emprego da teoria não linear de Sanders enquanto  $\alpha = 0$  tem-se a utilização da teoria não linear de Donnell

O conjunto de equações de movimento para o problema de interação entre estrutura e fluido pode ser obtido a partir da função Lagrange:

$$\bar{L} = T_C + T_L - U \quad (2)$$

onde  $T_C$  é a energia cinética da casca,  $T_L$  é a energia cinética do fluido e  $U$  representa a energia interna de deformação da casca cilíndrica.

A energia interna de deformação, segundo Brush e Almoroth (1975), é dada por:

$$U = \frac{R E}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ h \left[ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\theta}^2 \right] + \frac{h^3}{12} \left[ \kappa_x^2 + \kappa_\theta^2 + 2\nu \kappa_x \kappa_\theta + 2(1-\nu) \kappa_{x\theta}^2 \right] \right\} dx d\theta \quad (3)$$

A energia cinética da casca, desconsiderando as parcelas de velocidades axial ( $u$ ) e circunferencial ( $v$ ), devido ao fato da vibração no sentido radial apresentar valores bem maiores que as demais, não ocasionam erros significativos, é dada por:

$$T_C = \frac{R}{2} \rho_C h \int_0^L \int_0^{2\pi} \dot{w}^2 dx d\theta \quad (4)$$

onde  $\rho_C$  é a densidade do material que constitui a casca cilíndrica.

Já a enérgica cinética do fluido é calculada a partir da seguinte equação:

$$T_L = \frac{\rho_L}{2} h \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[ \dot{\phi} \dot{w} \right]_{r=R} dx d\theta \quad (5)$$

onde  $\rho_L$  é a densidade do fluido e  $\phi$  é o potencial de velocidade do fluido.

## 2.2 Equações do fluido interno

O fluido é assumido como ideal, incompressível e não-viscoso, sendo seu movimento considerado irrotacional. Conforme apresentado na Fig. 2, tem-se que para  $x < H$ , o fluido exerce uma pressão interna nas paredes da casca, e, para  $x = H$  existe uma superfície livre do fluido que pode se movimentar na direção vertical e interagir com a vibração radial da casca. Esta parte da formulação é apresentada por Kim *et al.* (2004) e terá suas principais etapas descritas a seguir.

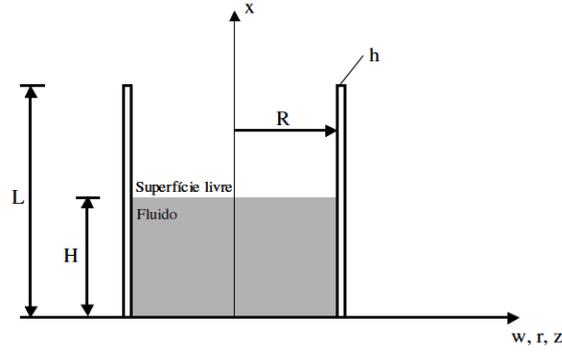


Figura 2. Representação da interação entre fluido e a casca cilíndrica.

A função potencial do fluido deve satisfazer a equação de Laplace, que em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

Dois comportamentos distintos do fluido no interior da casca são observados, tornando-se possível, por meio do princípio da superposição dos efeitos e que a casca se encontra apoiada sobre um fundo rígido, dividir o potencial de velocidade em duas parcelas, como se segue:

$$\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(S)} \quad (7)$$

sendo  $\phi^{(1)}$  a parcela associada ao potencial de velocidade do fluido, considerando uma casca flexível e com fundo rígido e  $\phi^{(S)}$  é o potencial de velocidade devido a superfície livre do fluido interno à casca, sendo denominado com *sloshing*.

Assim, as condições de contorno, para o potencial de velocidade em que há a presença do fundo rígido,  $\phi^{(1)}$ , são:

- Na base rígida da casca,  $x = 0$ , a velocidade axial do fluido é nula, ou seja:

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0} \quad (8)$$

- A condição de impenetrabilidade que garante a continuidade dos deslocamentos radiais entre o fluido e a casca cilíndrica deve ser:

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial r} = \dot{w} \Big|_{x=R} \quad (9)$$

- A pressão hidrodinâmica na superfície livre do fluido,  $x = H$ , é igual a zero, a saber:

$$\phi^{(1)} = 0 \Big|_{x=H} \quad (10)$$

Uma vez que as frequências naturais da superfície livre do líquido são inferiores quando comparadas com a menor frequência natural da casca, admite-se que a ação da superfície livre não é capaz de excitar o primeiro modo de vibração da casca cilíndrica. Desta forma, é possível assumir o fluido interagindo com uma casca rígida. Desta maneira, as condições de contorno impostas para o potencial de velocidade  $\phi^{(s)}$  são:

- A velocidade axial deve ser nula na base rígida ( $x = 0$ ), ou seja:

$$\left. \frac{\partial \phi^{(s)}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (11)$$

- A velocidade radial é nula nas paredes da casca ( $x = R$ ), garantindo assim que a casca cilíndrica seja rígida, a saber:

$$\left. \frac{\partial \phi^{(s)}}{\partial r} \right|_{x=R} = 0 \quad (12)$$

- Na superfície livre ( $x = H$ ), a condição da superfície livre é dada pela igualdade:

$$\left. \frac{\partial^2 \phi^{(s)}}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} (\phi^{(1)} + \phi^{(s)}) \right|_{x=H} \quad (13)$$

onde  $g$  é aceleração da gravidade.

De maneira análoga ao potencial de velocidade, a energia cinética proveniente do fluido também pode ser dividida em duas parcelas, sendo elas:

$$T_L = T_L^{(1)} + T_L^{(s)} \quad (14)$$

onde  $T_L^{(1)}$  corresponde a parcela da energia cinética considerando uma casca cilíndrica flexível e com fundo rígido e  $T_L^{(s)}$  é a parcela da energia cinética devido a superfície livre do fluido.

As parcelas que compõem a eq. (14) são dadas por:

$$T_L^{(1)} = \frac{R}{2} \rho_L \int_0^{2\pi} \int_0^H \dot{\phi}^{(1)} \dot{w} dx d\theta \quad \left|_{r=R} \quad (15)$$

$$T_L^{(s)} = \frac{R}{2} \rho_L \int_0^{2\pi} \int_0^H \dot{\phi}^{(s)} \dot{w} dx d\theta \quad \left|_{r=R} \quad (16)$$

Segundo Kim *et al.* (2004), tem-se que o potencial de velocidade  $\phi^{(1)}$  é dado por:

$$\phi^{(1)} = \sum_{m=1}^M \sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}} A_{m\bar{m}n} \cos\left(\frac{(2\bar{m}-1)\pi x}{2H}\right) I_n\left(\frac{(2\bar{m}-1)\pi r}{2H}\right) \quad (17)$$

onde  $I_n$  é a função Bessel de primeira classe e ordem  $n$ .

A eq. (17) satisfaz as condições de contorno (8) e (10) e a equação de Laplace (6). Para determinar a amplitude de cada modo de  $A_{m\bar{m}n}$ , presente na eq. (17), utiliza-se a condição de impenetrabilidade, eq. (9), a partir da aplicação do método de Galerkin e utilizando como função peso o próprio termo trigonométrico presente na equação do potencial de velocidade  $\phi^{(1)}$ . Têm-se que as amplitudes modais  $A_{m\bar{m}n}$  podem ser escritas em função das amplitudes do campo de deslocamentos laterais da casca,  $w$ , a saber:

$$A_{m\bar{m}n} = \frac{\int_0^H \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) \cos\left(\frac{(2\bar{m}-1)\pi x}{2H}\right) dx}{\int_0^H \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial r}\right) \cos\left(\frac{(2\bar{m}-1)\pi x}{2H}\right) dx} \quad (18)$$

Já o potencial de velocidade  $\phi^{(S)}$ , segundo Kim *et al.* (2004), apresenta distintas definições de acordo com os modos adotados para descrever o deslocamento transversal ( $w$ ). Podendo ser então axi-simétrico, caso o número de ondas circunferenciais que descreve o modo de vibração casca seja nulo ( $n = 0$ ), ou assimétrico caso o número de ondas circunferenciais do modo de vibração da casca seja diferente de zero ( $n > 0$ ).

Assim, o potencial de velocidade da superfície livre  $\phi^{(S)}$  de um fluido em uma casca rígida para os modos assimétricos, ( $n > 0$ ), é dada pela equação:

$$\phi^{(S)} = \sum_{k=1}^K B_k(t) \cosh\left(\frac{\varepsilon_{kn}x}{R}\right) J_n\left(\frac{\varepsilon_{kn}r}{R}\right) \cos(n\theta) \quad (19)$$

tal equação satisfaz automaticamente a condição de contorno (11). Nessa equação,  $J_n$  é a função de Bessel de primeira classe e ordem  $n$ . Substituindo-se o potencial de velocidade, eq. (19), na condição de contorno (12) chega-se à condição de restrição dada por:

$$\frac{d}{dr} \left[ J_n\left(\frac{\varepsilon_{kn}r}{R}\right) \right]_{r=R} = 0 \quad (20)$$

onde  $\varepsilon_{kn}$  são as raízes dessa equação de restrição.

Enquanto que o mesmo potencial de velocidade  $\phi^{(S)}$  para os modos axissimétricos ( $n = 0$ ) é dado por:

$$\phi^{(S)} = B_0 + \sum_{k=1}^K B_{k0}(t) \cosh\left(\frac{\varepsilon_{k0}x}{R}\right) J_0\left(\frac{\varepsilon_{k0}r}{R}\right) \quad (21)$$

Para a solução de um problema de interação fluido-estrutura em que se considera o efeito da superfície livre do fluido, torna-se necessário satisfazer a condição de superfície livre descrita pela eq. (13). Substituindo-se os potenciais de velocidades na eq. (13) e aplicando o método de Galerkin, obtêm-se as equações de *sloshing* em função da amplitude  $B_k$  e também dos parâmetros do deslocamento transversal,  $w$ . Desta forma, para determinar as amplitudes  $B_k$ , torna-se necessário a resolução conjunta destas equações com o sistema de equações não lineares da casca cilíndrica, garantindo assim uma interação entre o fluido e a estrutura.

### 3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Para o presente trabalho utiliza-se para descrever o campo de deslocamento da casca cilíndrica a solução modal obtida a partir do método da perturbação (Gonçalves, 1987), onde as componentes de deslocamento na direção transversal ( $w$ ), circunferencial ( $v$ ) e longitudinal ( $u$ ) são dadas por:

$$\begin{aligned}
 w &= W_0(t) \left( \frac{3}{4} - \cos(2m\pi x/L) + \frac{1}{4} \cos(4m\pi x/L) \right) \\
 &\quad + W_1(t) \cos(n\theta) \sin(m\pi x/L) \\
 u &= U_0(t) [\sin(2m\pi x/L) - \sin(4m\pi x/L)/2] + U_1(t) \cos(m\pi x/L) \cos(n\theta) \\
 &\quad + U_2(t) \cos(2n\theta) [\sin(2m\pi x/L) - \sin(4m\pi x/L)/2] \\
 &\quad + U_3(t) \cos(n\theta) \cos(3m\pi x/L) + U_4(t) \cos(n\theta) \cos(5m\pi x/L) \\
 &\quad + U_5(t) \left[ \sin(6m\pi x/L) - \frac{3}{4} \sin(8m\pi x/L) \right] \\
 v &= V_0(t) \sin(m\pi x/L) \sin(n\theta) + V_1(t) \sin(2n\theta) \cos(2m\pi x/L - 1) \\
 &\quad + V_3(t) \sin(n\theta) \sin(3m\pi x/L) + V_4(t) \sin(n\theta) \sin(5m\pi x/L)
 \end{aligned} \tag{22}$$

onde  $U_i(t)$ ,  $V_i(t)$  e  $W_i(t)$  são as amplitudes de vibração dos modos da expansão,  $t$  o tempo,  $L$  o comprimento da casca,  $n$  o número de ondas circunferenciais,  $m$  o número de semi-ondas longitudinais,  $x$  a coordenada axial e  $\theta$  a coordenada circunferencial.

Para a obtenção dos valores da frequência natural da casca, admite-se que a mesma é livre de imperfeições geométricas e que o sistema está em vibração livre e não amortecida. Inicialmente é necessário obter a função Lagrange do sistema ( $\bar{L}$ ), utilizando as energias de deformação interna e cinética tanto da casca, eqs. (3) e (4), quanto do fluido, eqs. (15) e (16).

Em seguida, para obtenção das equações de movimento do problema, aplica-se o princípio de Hamilton à função Lagrange como demonstrado a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{q}}} [\bar{L}] - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{s}}} \right) [\bar{L}] = 0 \tag{23}$$

sendo  $\bar{\mathbf{q}}$  o vetor formado por todas as amplitudes da casca e  $\bar{\mathbf{s}}$  é o vetor composto por todas as derivadas no tempo destas mesmas amplitudes.

Desta forma, obtêm-se um sistema equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo, sendo que o número de equações de movimento é igual a soma do número de termos adotados para as soluções modais apresentadas na eq. (22) com o número de amplitudes empregadas na eq. (19), ou seja, o sistema de equações obtido tem  $12 + K$  graus de liberdade. Ainda há o acréscimo de  $K$ -equações de movimento devido a equação da superfície livre do líquido, obtidas a partir da condição de *sloshing*, eq. (13). A quantidade de equações adicionadas ao sistema nesta etapa corresponde ao número de amplitudes  $B_k$ , ou seja, do valor adotado para  $K$  no somatório dado pela eq. (19).

A próxima etapa para o cálculo da frequência natural da casca é linearizar as equações de movimento encontradas a partir da eq. (23) e discretizar ao longo do tempo as amplitudes que acompanham os modos das soluções modais (22) e das amplitudes  $B_k$ , eq. (19). Aplica-se, em seguida, o método de Urabe integrando as equações no tempo no intervalo  $0 < t < 2\pi/\omega$ . A discretização no tempo das amplitudes, segundo o método da perturbação Gonçalves (1987), seguem as seguintes equações:

$$U_0(t) = u_0 \cos(\omega t)^2 \quad U_1(t) = u_1 \cos(\omega t) \quad U_2(t) = u_2 \cos(\omega t) \quad (24)$$

$$U_3(t) = u_3 \cos(\omega t)^3 \quad U_4(t) = u_4 \cos(\omega t)^5 \quad U_5(t) = u_5 \cos(\omega t)^6$$

$$V_1(t) = v_1 \cos(\omega t) \quad V_2(t) = v_2 \cos(\omega t)^2 \quad V_3(t) = v_3 \cos(\omega t)^3 \quad (25)$$

$$V_4(t) = v_4 \cos(\omega t)^5$$

$$W_0(t) = w_0 \cos(\omega t)^2 \quad W_1(t) = w_1 \cos(\omega t) \quad (26)$$

$$B_k(t) = C_k \cos(\omega t) \quad (27)$$

onde  $\omega$  é a frequência natural da casca cilíndrica e  $k$ -ésimo termo adotado para descrever o potencial de velocidade devido a superfície livre do líquido na eq. (19).

Após a realização da discretização temporal das amplitudes e aplicação do método de Urabe, obtêm-se um sistema de equações algébricas lineares em função das amplitudes de vibração e da frequência,  $\omega$ . O cálculo da frequência natural se dá por meio de um problema de autovalor e autovetor generalizado (Amabili, 1998; Gonçalves e Ramos, 1996; Kim *et al.* 2004).

Para o estudo das vibrações não lineares, foram adotadas as soluções modais dadas pelas eqs. (22), utilizando o modo de vibração que corresponde a menor frequência natural da estrutura, obtida previamente na análise das vibrações lineares. Após a discretização das amplitudes no tempo, conforme as eqs. (24) – (27), as equações de equilíbrio são integradas segundo o método de Urabe, obtendo-se então um sistema de equações não lineares em relação as amplitudes de vibração e a frequência do problema, onde a partir do método de Newton-Raphson encontram-se as relações entre a frequência e a amplitude da casca cilíndrica, utilizando a amplitude radial  $w_1$  como o parâmetro de controle do método de Newton-Raphson.

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para verificar a validade e a precisão da metodologia apresentada neste estudo, casos reportados na literatura foram analisados para comparar os resultados encontrados por diferentes autores com os obtidos no presente trabalho.

No primeiro caso, tem-se uma casca cilíndrica simplesmente apoiada e completamente preenchida por fluido, apresentando os seguintes parâmetros geométricos e características do material:

$$\begin{aligned}
 R &= 0.3015 \text{ m} & L &= 0.41 \text{ m} & h &= 0.001 \text{ m} & H &= 0.41 \text{ m} \\
 \rho_c &= 7850 \text{ N/m}^3 & E &= 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 & \nu &= 0.3 & \rho_L &= 1000 \text{ N/m}^3
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Essa estrutura foi analisada experimentalmente por Gasser (1987) e numericamente por Gonçalves e Batista (1986), que obtiveram os resultados por meio de uma solução analítica aproximada do problema para a interação entre o fluido e a estrutura. Já Gonçalves e Ramos (1996) realizaram estudos analíticos para a mesma casca cilíndrica levando em consideração os efeitos da superfície livre. Na Tab. 1 são apresentados os valores encontrados neste trabalho e os resultados encontrados pelos autores citados acima.

**Tabela 1. Comparação das frequências naturais variando o número de ondas circunferenciais (Hz).  $m = 1$ .**

n	Gasser (1987)	Gonçalves e Batista (1986)	Gonçalves e Ramos (1996)	Presente Trabalho	
				Donnell	Sanders
8	120	118	119	119,2	118,9
9	124	124	128	127,99	127,56
10	146	144	146	146,78	146,36
11	182	171	173	173,46	173,16
12	214	204	206	206,57	206,22
13	254	243	245	245,23	244,86

Kim *et al.* (2004) e Amabili *et al.* (1998) realizaram um estudo analítico de um tanque cilíndrico simplesmente apoiado e parcialmente cheio por um fluido que apresenta as seguintes características físicas e geométricas:

$$\begin{aligned}
 R &= 25 \text{ m} & L &= 30 \text{ m} & h &= 0.03 \text{ m} & H &= 21.6 \text{ m} \\
 \rho_c &= 7850 \text{ N/m}^3 & E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 & \nu &= 0.3 & \rho_L &= 1000 \text{ N/m}^3
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Os resultados obtidos por Kim *et al.* (2004) consideram a teoria linear de Love para descrever o campo de deformação. Já para descrever o campo de deslocamento da casca cilíndrica os autores utilizam um somatório de modos lineares que atendem as condições de

contorno da casca simplesmente apoiada. Amabili *et al.* (1998) utilizam o mesmo campo de deslocamento que Kim *et al.* (2004), porém a teoria para representar o campo de deformação foi a teoria de Flügge. A comparação entre os resultados obtidos neste trabalho e os apresentados pelos autores citados acima está apresentada na Tab. 2. Observou-se uma boa convergência dos resultados para  $K$  igual a 5 e  $\bar{M}$  igual a 15.

**Tabela 2. Comparação entre os resultados do presente estudo com os trabalhos de Kim et al. (2004) e Amabili et al. (1998). (n=4).**

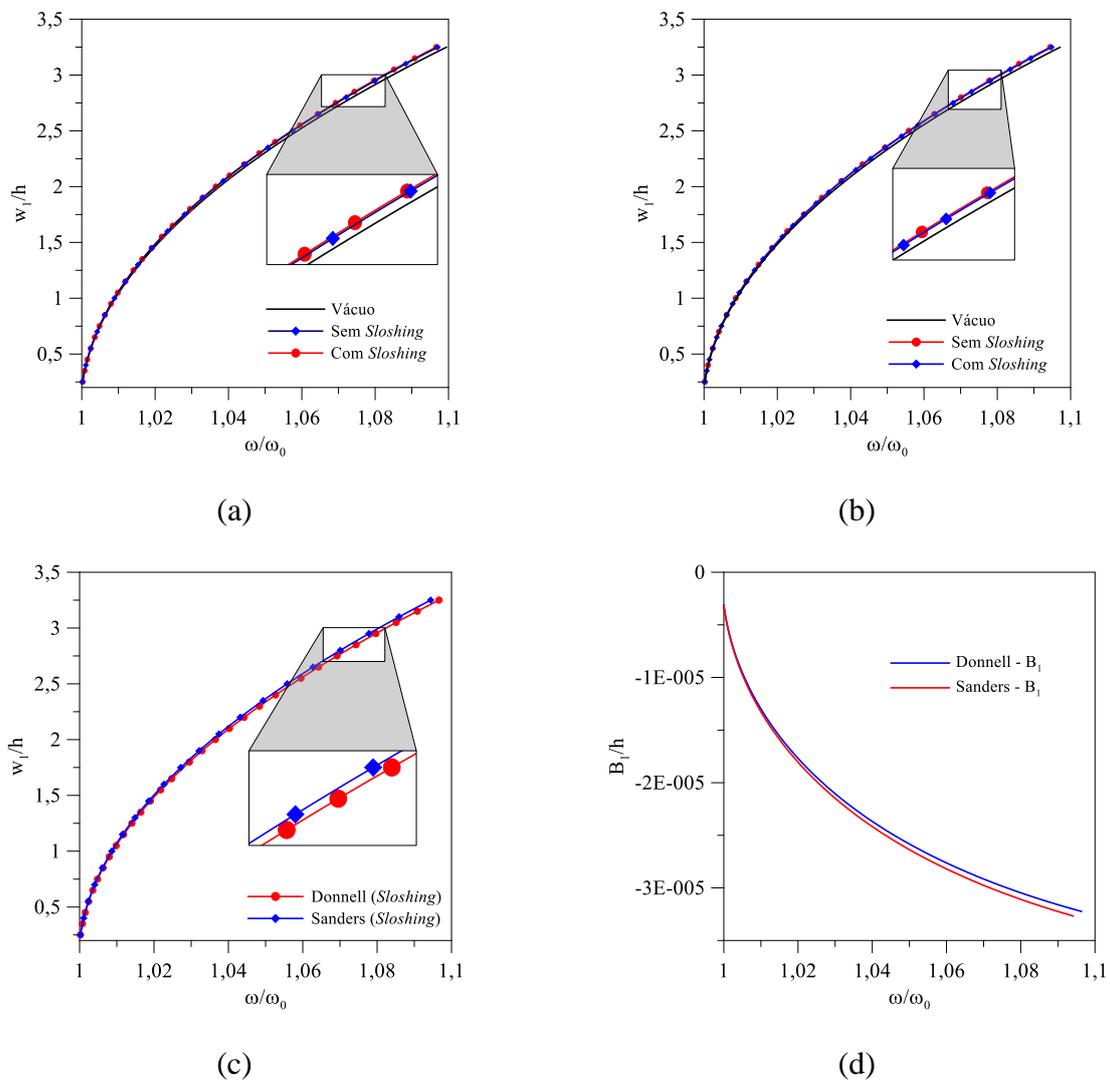
m	Frequência <i>Sloshing</i> - Hz				Frequência da Casca - Hz			
	Amabili <i>et al.</i> (1998)	Kim <i>et al.</i> (2004)	Presente trabalho		Amabili <i>et al.</i> (1998)	Kim <i>et al.</i> (2004)	Presente trabalho	
			Donnell	Sanders			Donnell	Sanders
1	1,4425	1,4426	1,4437	1,4437	13,658	14,054	14,3798	14,379
2	1,9081	1,9081	1,9083	1,9083	34,441	34,672	36,621	36,620
3	2,2305	2,2305	2,2307	2,2307	49,692	49,592	48,907	48,907
4	2,5027	2,5027	2,5028	2,5028	61,877	61,556	59,222	59,221
5	2,7444	2,7444	2,9647	2,9647	71,804	71,476	69,368	69,367

**Tabela 3. Espectro de frequência (rad/s) da casca para  $m = 1$**

n	Vácuo		Preenchida (Sem <i>Sloshing</i> )		Preenchida (Com <i>Sloshing</i> )	
	Donnell	Sanders	Donnell	Sanders	Donnell	Sanders
9	17,2409	17,2407	5,4117	5,4115	3,2527	3,2523
10	15,3206	15,3203	5,0104	5,0101	2,8869	2,8867
11	14,4806	14,4804	4,9162	4,9158	2,6409	2,6404
12	14,5237	14,5233	5,1029	5,1026	2,9159	2,9157

Para observar o comportamento não linear da estrutura adotou-se a geometria e as características físicas do material dado na eq. (29). Conforme apresentado na Tab. 3,  $m = 1$  e  $n = 11$  ocorre a menor frequência natural da casca cilíndrica e não há mudanças no modo de vibração com a consideração dos efeitos da superfície livre para esta geometria analisada. Deve-se destacar que quando se considera o fluido interno, sem a consideração do *sloshing*, a casca cilíndrica há uma redução da frequência natural devido a massa adicionada do meio fluido, como pode ser notado na Tab. 3. Já quando se insere a contribuição dos efeitos da superfície livre ao problema, observa-se que há uma nova redução das frequências naturais devido a alteração da rigidez e da inércia do sistema que tanto a energia cinética da contribuição do *sloshing* quanto a rigidez adicional das equações de *sloshing* promovem ao problema.

Apresenta-se, na Fig. 3, as relações frequência – amplitude da casca cilíndrica obtidas tanto para as teorias de Donnell e de Sanders quanto aos casos avaliados, a saber: vácuo, parcialmente preenchida sem a consideração do sloshing e parcialmente preenchida com a consideração do sloshing. A geometria avaliada é a geometria dada em (29) e para este caso a combinação modal  $(m, n) = (1, 11)$  será utilizada por ser o modo de vibração natural da casca cilíndrica, conforme a Tab. 3. Os eixos horizontais dessas figuras foram normalizados em relação a frequência natural da casca cilíndrica de cada caso avaliado.



**Figura 3. Relação frequência-amplitude: a) teoria de Donnell, b) teoria de Sanders, c) comparação entre as teorias de Donnell e Sanders, d) variação da amplitude do fluido quando considerado o efeito da superfície livre.  $(m = 1, n = 11)$ .**

Observa-se na Fig. 3a e na Fig. 3b que o comportamento não linear da casca cilíndrica é do tipo *hardening*, ou seja, a frequência natural da casca cilíndrica aumenta com o incremento da amplitude independentemente da presença do fluido, da consideração dos efeitos de *sloshing* e da teoria não linear para o campo de deformação e mudanças de curvatura empregada. A aproximação entre os resultados obtido a partir da teoria de Donnell e de Sanders, Fig. 3c, já cockera esperada por conta do modo de vibração ter  $n = 11$ , quanto maior for o número de ondas circunferências melhor será a aproximação entre as teorias de Donnell

e de Sanders. Por fim, na Fig. 3d nota-se a variação da amplitude do potencial de velocidade da superfície livre com o incremento da frequência não linear o que indica sua participação na vibração livre não linear da casca cilíndrica.

Afim de se avaliar os efeitos que a superfície livre do líquido tem sobre o comportamento das cascas cilíndricas, buscou-se uma nova geometria para avaliar a resposta não linear da estrutura. A nova geometria a ser estudada apresenta um raio ( $R$ ) maior do que a sua altura ( $L$ ), diferentemente da geometria apresentada em (29). As propriedades geométricas e físicas do material são dadas a seguir:

$$\begin{aligned} R=75 \text{ m} \quad L=30 \text{ m} \quad h=0.03 \text{ m} \quad H=20 \text{ m} \\ \rho_c = 7850 \text{ N/m}^3 \quad E=2.06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \quad \nu=0.3 \quad \rho_L = 1000 \text{ N/m}^3 \end{aligned} \quad (29)$$

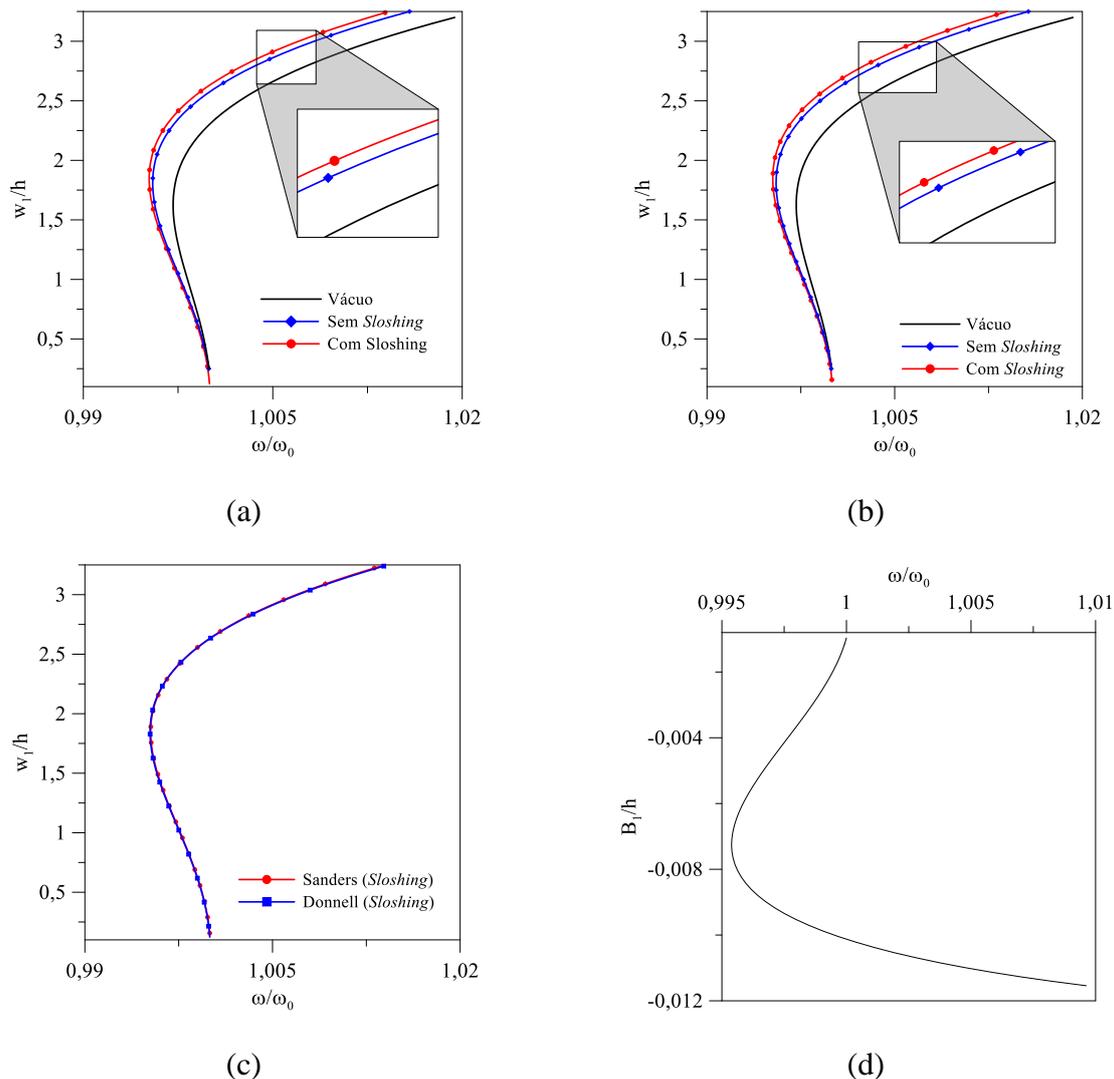
Para tal geometria realizou-se um novo estudo dos modos de vibração da estrutura para a casca no vácuo, preenchida com fluido sem consideração do efeito de superfície livre e por último a casca contendo fluido e considerando a influência do *sloshing*, conforme o apresentado na Tab. 4. Analisando os resultados da Tab. 4 é possível observar que o modo de vibração da estrutura acontece com um número de ondas circunferenciais  $n = 24$ .

**Tabela 4. Espectro de frequência (rad/s) da nova geometria analisada para  $m = 1$**

n	Vácuo		Preenchida (Sem <i>Sloshing</i> )		Preenchida (Com <i>Sloshing</i> )	
	Donnell	Sanders	Donnell	Sanders	Donnell	Sanders
23	8,6445	8,6445	3,1606	3,1606	2,7903	2,7903
24	8,3493	8,3493	2,6801	2,6801	2,1669	2,1669
25	8,3557	8,3557	2,6899	2,6899	2,1968	2,1968

Na Fig. 4 mostra-se o comportamento não linear do sistema por meio da relação frequência-amplitude da nova geometria, de forma análoga ao que foi feito nas análises expostas na Fig. 3. Neste novo caso, é possível perceber que, independente da teoria adotada para descrever o campo de deformação, os três casos estudados apresentam o comportamento do tipo *softening*, isto é, a frequência natural da casca diminui com o incremento da amplitude de vibração. Para esta geometria é possível observar uma maior diferença entre o comportamento do sistema quando se considera, ou não, o efeito da superfície livre, como ilustrado nas Figs. 4a e 4b, pois a participação da amplitude do potencial de velocidade do *sloshing* aumentou nesta nova geometria, Fig. 4d.

Na Fig. 4c observa-se que as relações frequência – amplitude obtidas para ambas as teorias não lineares para o campo de deformação, Donnell e Sanders, são coincidentes o que já era esperado pois o número de ondas circunferenciais é elevado.



**Figura 4.** Relação frequência-amplitude da nova geometria: a) teoria de Donnell, b) teoria de Sanders, c) comparação entre as teorias de Donnell e Sanders, d) variação da amplitude do fluido quando considerado o efeito de superfície livre.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram analisadas as vibrações não lineares de cascas cilíndricas simplesmente apoiadas, parcialmente, ou completamente, preenchidas por um fluido incompressível, irrotacional e não viscoso, considerando a influência da superfície livre no comportamento não linear do sistema. Utilizou-se duas teorias não lineares para descrever o campo de deformação e mudanças de curvatura da casca cilíndrica, a saber: Donnell e Sanders. O fluido é dado por um potencial de velocidade, que atende a equação de Laplace e as condições de contorno do problema. As equações de movimento foram obtidas a partir da função de Lagrange da casca cilíndrica, da equação da superfície livre do fluido e do método de Rayleigh-Ritz. Observou-se que a consideração da superfície livre do fluido diminui as frequências naturais da casca cilíndrica quando comparadas a uma consideração simplificada do fluido (sem *sloshing*). Isto era esperado e está em consonância com outros trabalhos da literatura, pois a adição da superfície livre do fluido acrescenta massa adicional e altera a

rigidez global do sistema. Quanto aos resultados sobre a vibração livre não linear, os resultados obtidos indicaram que a superfície livre do fluido não causou consideráveis alterações no comportamento não linear. O presente estudo está em andamento e como continuidade aos estudos serão avaliadas as principais modificações nas oscilações não lineares de cascas cilíndricas excitadas dinamicamente, levando em conta também a superfície livre do fluido.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi possível graças ao apoio do Ministério da Educação - CAPES, CNPq e FAPEG.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALIJANI, F.; AMABILI, M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, [s.l.], v. 58, p. 233-257, 2014.

AMABILI, M. Shell-plate interaction in the free vibrations of circular cylindrical tanks partially filled with a liquid: the artificial spring method. **Journal of Sound and Vibration**, [s.l.], v. 199, n. 3, p. 431-452, 1997.

AMABILI, M., PAIDOUSSIS, M.P., LAKIS, A.A. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom. **Journal of Sound and Vibration**, [s.l.], v. 213, p. 259-299, 1998.

AMABILI, M.; PAÏDOUSSIS, M. P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. **Applied Mechanics Reviews**, [s.l.], v. 56, n. 4, p. 349-381, 2003.

BRUSH, D. O.; ALMROTH, B. O. **Buckling of bars, plates, and shells**. New York: McGraw-Hill, 1975. 379 p.

CHEN, J. C.; BABCOCK, C. D. Nonlinear vibration of cylindrical shells. **AIAA Journal**, [s.l.], v. 13, n. 7, p. 868-876, 1975.

DONNELL, L. H. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. **Transactions ASME**, [s.l.], v. 56, p. 795-806, 1934.

GASSER, F. L. F. **Vibração de cascas cilíndricas contendo fluido**. Rio de Janeiro, 1987. 138p. Dissertação de Mestrado – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

GONÇALVES, P. B. **Interação dinâmica não-linear entre fluido e cascas delgadas**. Rio de Janeiro, 1987. 317p. Tese de Doutorado – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

GONÇALVES, P. B.; BATISTA, R. C. Free vibration analysis of cylindrical tanks partially filled with liquid. **Journal of Sound and Vibration**, [s.l.], v. 195, n. 3, p. 429-444, 1986.

GONÇALVES, P. B.; BATISTA, R. C. Frequency response of cylindrical shells partially submerged or filled with liquid. **Journal of Sound and Vibration**, [s.l.], v. 113, n. 1, p. 59-70, 1987.

GONÇALVES, P. B., RAMOS, N. R. S. S., Free vibration analysis of cylindrical tanks partially filled with liquid. **Journal of Sound and Vibration**, v. 195, p. 429-444, 1996.

KIM, Y-W.; LEE, Y-S.; KO, S-H. Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners. **Journal of Sound and Vibration**, [s.l.], v. 276, n. 3-5, p. 869-897, 2004.

KUBENKO, V.D., KOVAL'CHUK, P.S., Nonlinear problems of the vibration of thin shells (review). **International Applied Mechanics**, [s.l.], v. 34, p. 703–728, 1998.

SILVA, F. M. A. **Modelos de dimensão reduzida para análise das oscilações não lineares e instabilidade de cascas cilíndricas**. Rio de Janeiro, 2008. 182p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.