



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

UM ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DO COMPORTAMENTO À FLEXÃO DE LAJES TIPO BUBBLEDECK

Wellington Vital da Silva

Brunno Emidio Sobrinho

Elvis Pereira de Santana

welington.vital@gmail.com

br_emidio@yahoo.com.br

elvissantana01@gmail.com

Universidade de Brasília - UNB

Campus Darcy Ribeiro SG-12, 70.910-900, Distrito Federal, Brasília, Brasil

Resumo. A laje tipo BubbleDeck é um sistema construtivo, proposto pelo engenheiro dinamarquês Jorgen Breuning, que se utiliza do princípio em que no interior das lajes surge uma zona onde o concreto pode ser desprezado, por ter função estrutural limitada. Nesta zona são adicionadas esferas (“bubbles”) plásticas vazias, adequadamente espaçadas, propiciando uma redução considerável do consumo de concreto, o que pode gerar uma diminuição em torno de 35% do peso próprio da laje. Essas lajes se comportam como lajes maciças homogêneas e são largamente aceitas e utilizadas em diversas partes do mundo, tais como, na Europa, Américas, Ásia, etc. No entanto, esse sistema de laje ainda gera muitas dúvidas quando do seu real comportamento e dimensionamento, principalmente pela complexidade do problema e das dificuldades em se calcular os esforços internos. Portanto, este trabalho se insere dentro de uma perspectiva de criação de processos de análise que permitam uma melhor compreensão do problema. Assim, foram implementadas em MATLAB a Teoria de Placas Finas, conhecida como hipóteses de Kirchhoff, definidas pelas hipóteses de Kirchhoff-Love para obtenção dos esforços internos. Para tanto, foi determinada a rigidez equivalente entre lajes bidirecionais tipo BubbleDeck e lajes sólidas.

Palavras-chave: BubbleDeck; Flexão; Teoria de Placas; ABAQUS; Elementos Finitos.

INTRODUÇÃO

É cada vez mais frequente a busca por edificações com maior liberdade de espaços, projetos arquitetônicos que necessitam de lajes com grandes vãos livres, e pilares cada vez mais espaçados. Esta tendência tem levado à busca constante por técnicas que viabilizem essa realidade.

Neste contexto, as lajes *BubbleDeck* apresentam vantagens significativas em relação aos sistemas convencionais, permitindo ao projetista maiores possibilidades, tais como: aumento dos vãos, redução da altura total do edifício, diminuição de volume de concreto, elementos estruturais mais esbeltos e diminuição do tempo de execução, demonstrando ser uma alternativa com enorme potencial nesse tipo de construção.

Estas lajes surgiram na Dinamarca, em meados da década de 1980, quando o governo apoiou um concurso nacional que buscava desenvolver as melhores ideias para construções inovadoras. Estas construções deveriam ser leves e aplicáveis em larga escala, além de ser uma boa solução ecológica e econômica. Foi nesse interim que o engenheiro dinamarquês Jorgen Breuning começou a desenvolver as lajes *BubbleDeck* (Bubbledeck-UK, 2008).

Este novo sistema construtivo proposto pela *BubbleDeck*, se utiliza do princípio que dentro das lajes surge uma zona onde o concreto é pouco solicitado, por ter função estrutural limitada. Nesta zona são adicionadas esferas, “*bubbles*” vazios, plásticos previamente espaçados propiciando uma redução considerável do consumo de concreto o que pode gerar uma diminuição em torno de 35% do peso próprio da laje. São adicionadas também duas malhas de aço, uma na parte inferior da laje e outra na parte superior, mantendo seções sólidas no topo e na parte inferior, onde pode existir tensões elevadas. Assim, essa tecnologia faz com que todo o processo seja industrializado, aumentando a produtividade de execução.

Entretanto, as principais desvantagens das lajes *BubbleDeck* são: necessidade de emprego de mão de obra especializada, dependência de um único fabricante, maior canteiro de obras, custos com transporte, logística para içamento das lajes, principalmente em edifícios altos, distribuição de tensões localizadas devido ao encontro de painéis pré-moldados e possibilidade de colapso progressivo.

Desta forma, ao adotar a solução por lajes *BubbleDeck*, deve-se ater aos riscos de colapso progressivo da estrutura, uma vez que as esferas plásticas diminuem a rigidez da laje e conseqüentemente, aumenta os deslocamentos horizontais e as flechas nos pavimentos, que podem aumentar as tensões nas ligações entre painéis pré-moldados. O mecanismo de ruptura dos painéis pré-moldados podem ter comportamento frágil em função de tensões localizadas, por isso a determinação dos esforços causados nas barras de ligação entre painéis devem ser investigados.

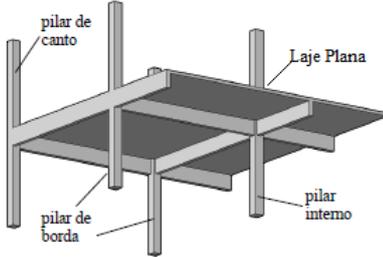
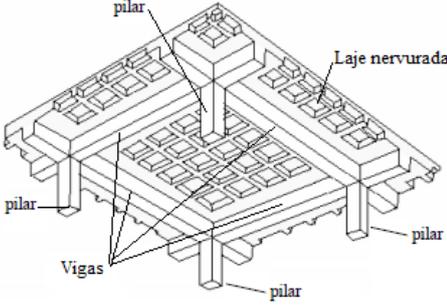
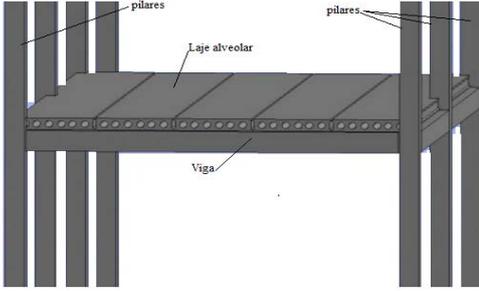
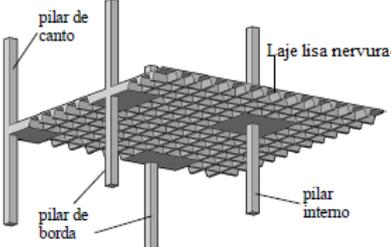
1 PESQUISAS DE LAJES AO LONGO DOS ANOS

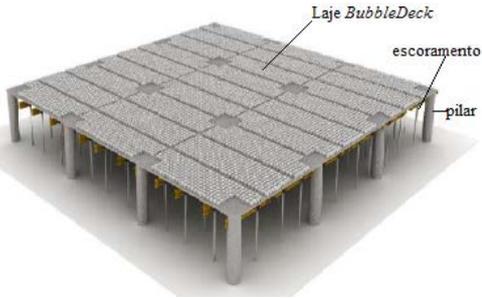
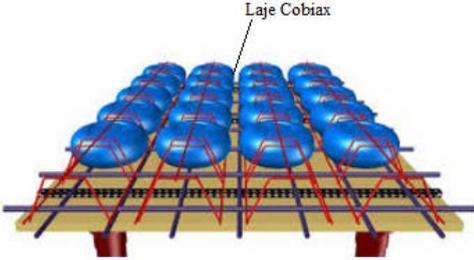
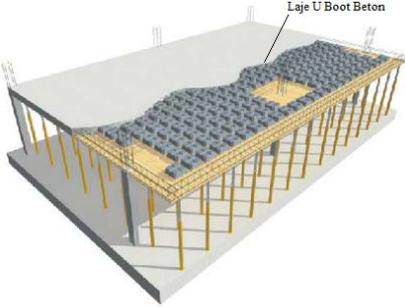
Nos edifícios de múltiplos pisos com estruturas em concreto armado as lajes são responsáveis pelo consumo de elevada parcela do volume total de concreto utilizado. De acordo com Franca e Fusco (1997), utilizando sistema de lajes maciças com vigas nos pavimentos de edifícios usuais de concreto armado, esta parcela chega a quase dois terços do volume total de concreto consumido.

Como consequência, ao longo dos anos, estudos foram desenvolvidos com lajes a fim de diminuir o peso próprio, na busca de um sistema que fosse eficiente tanto aos esforços de

cisalhamento quanto à flexão, com vazios internos. Tais estudos estão resumidamente apresentados a seguir na “Tab. 1”.

Tabela 1 - Evolução das lajes de concreto armado utilizadas em construção de edifícios

Tipos de lajes	Histórico do desenvolvimento das lajes	Figuras
Planas com vigas	Segundo Bares (1832) as lajes planas datam do início do século XIX, sendo que, no princípio, tais lajes eram executadas empiricamente e, posteriormente, submetidas a ensaios de carga (Santos, 1983).	 <p>Ferreira (2010)</p>
Nervuradas	O sistema de laje nervurada tem sua origem em 1854, na época utilizava-se concreto armado em pequenas vigas regularmente espaçadas, onde os vazios entre as nervuras eram obtidos pela colocação de moldes de gesso (Wilkinson, 1854).	 <p>Marchetti (2008)</p>
Alveolares	As lajes alveolares surgiram na Alemanha em 1956, representam um dos mais populares elementos pré-fabricados no mundo, em especial na América do Norte e na Europa Ocidental (El Debs, 2000).	 <p>El Debs (2000)</p>
Lisa nervurada	O primeiro edifício em lajes sem vigas foi o C.A Bovery Building, construído por C.A.P Turner, em 1966, Minneapolis, Minnesota (Filho, 1989).	 <p>Ferreira (2010)</p>

<p>BubbleDeck</p>	<p>A tecnologia Bubbledeck teve início em 1980 pelo engenheiro dinamarquês Jorgen Breuning (<i>BubbleDeck</i>, 2008).</p>	 <p><i>BubbleDeck</i> (2014)</p>
<p>Cobix</p>	<p>O sistema Cobix teve origem na Suíça em 1997, e constitui num sistema de lajes biaxiais com os mesmos princípios das lajes <i>BubbleDeck</i> (COBIAX, 2014).</p>	 <p><i>Cobix</i> (2014)</p>
<p>U Boot Beton</p>	<p>O desenvolvimento das lajes U Boot Beton iniciou-se em 2001, com a utilização de cubetas dentro das lajes, sistema parecido com as lajes <i>BubbleDeck</i> (Daliform Group, 2015).</p>	 <p>Daliform Group (2015)</p>

2.1 BubbleDeck

A tecnologia *BubbleDeck* teve um crescimento considerável, desde que foi inventada pelo dinamarquês Jorgen Breuning em 1980, se tornando a Companhia *BubbleDeck* International em 1990, onde suas lajes são projetadas e se comportam como lajes maciças homogêneas tendo aceitação em diversos países, tais como: Austrália, Nova Zelândia, Bélgica, Reino Unido, Dinamarca, Suíça, Itália, Áustria, Alemanha, Hungria, Irlanda, Ilhas Aland, Lituânia, Emirados Árabes, Arábia Saudita, Barein, Líbano, Catar, Holanda, Canadá, Estados Unidos, Romênia, Rússia, Cingapura, África do Sul, Inglaterra, Vietnã e Brasil (*BubbleDeck-UK*, 2008).

A primeira obra a ser executada utilizando o conceito de lajes *BubbleDeck* no Brasil foi a nova sede da empresa Odebrecht na cidade de Salvador, Bahia, conforme ilustra a “Fig. 1”. Outros projetos, como o novo Centro Administrativo de Brasília também utilizou o sistema de lajes *BubbleDeck*.



Figura 1 - Construção da sede da Empresa Odebrecht no Brasil, com lajes tipo BubbleDeck (BubbleDeck Brasil, 2014)

BubbleDeck é um sistema construtivo inovador, composto pela incorporação de esferas plásticas nas lajes de concreto, uniformemente espaçados entre duas telas metálicas soldadas.

Apresentam os mesmos princípios e funcionam como uma laje maciça, mas com até 35% a menos do seu peso próprio. Por não apresentar algumas das características negativas de lajes nervuradas, tais como: dificuldade na passagem de tubulação, dificuldade na fixação dos elementos de enchimento e maior número de operários na montagem do sistema. As lajes *BubbleDeck* atingem uma redução considerável em torno de 5 a 16% no valor final da obra comparada com laje maciça (BubbleDeck-UK, 2008).

O sistema construtivo tipo *BubbleDeck* possui três possibilidades construtivas: sistema com módulo reforçado, sistema com painéis acabados e sistema com pré-lajes.

O sistema construtivo de módulo reforçado consiste em adicionar as esferas entre telas de aço (armaduras) para posteriormente posicioná-las nas fôrmas onde serão colocadas as armações adicionais, ilustrado na “Fig. 2”. A concretagem é realizada em dois estágios devido à tensão superficial que tende a levantar as bolas plásticas, sendo o primeiro uma camada de no máximo até a metade da altura da laje e posteriormente é complementado (BubbleDeck Brasil, 2014).

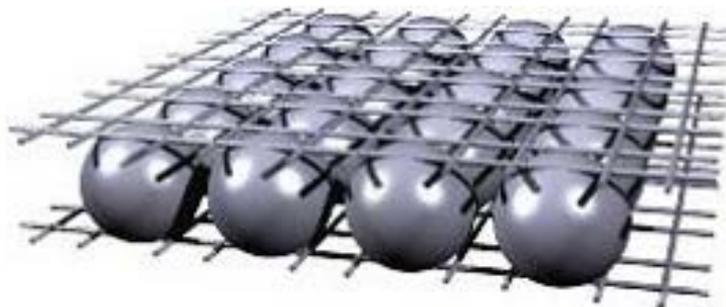


Figura 2 - Sistema de módulo reforçado (BubbleDeck Brasil, 2014)

Seu uso se faz mais presente em obras de reforma, pisos térreos ou de difícil acesso, pois os módulos reforçados podem ser posicionados e transportados manualmente. A “Fig. 3” mostra um exemplo de módulo de laje *BubbleDeck*.

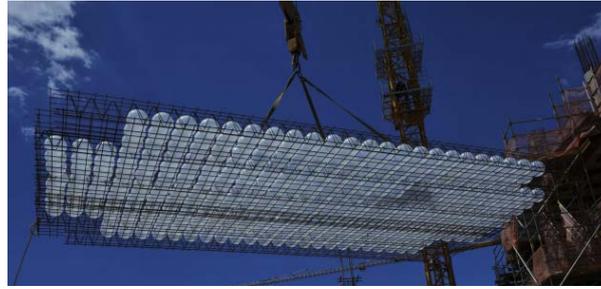


Figura 3 - Módulo de laje *BubbleDeck* (*Bubbledeck Brasil*, 2014)

Já o sistema construtivo de laje *BubbleDeck* com painéis acabados consiste em armar e concretar por completo as lajes em fábricas, sendo entregues na obra já prontas. Um exemplo de peça pré-moldada está representado na “Fig. 4”.

Quando os painéis já estão posicionados em seu local final as armaduras de flexão são conectadas e as barras de ligação são posicionadas para que sua união seja perfeita. Como as lajes distribuem seus esforços em apenas uma direção se comportando como uma laje pré-moldada unidirecional, necessitam do uso de vigas ou de paredes para suporte, entretanto, este sistema é menos interessante do ponto de vista arquitetônico por apresentar os mesmos problemas das lajes alveolares (*BubbleDeck Brasil*, 2014).

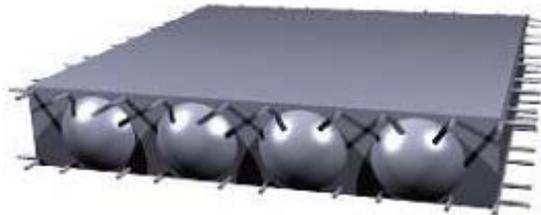


Figura 4 - Painéis acabados (*BubbleDeck Brasil*, 2014)

Por último, tem-se o sistema de painéis pré-moldados com pré-laje, já incorporando armações com as esferas plásticas, conforme “Fig. 5”. Esta pré-laje dispensa o uso de fôrmas inferiores, sendo colocada diretamente sobre vigas metálicas e escoras. Após a montagem dos painéis, são adicionadas as armaduras de reforço e barras de ligação entre as placas, sendo então concluída a concretagem.

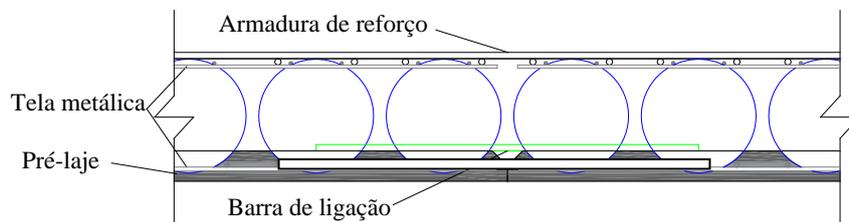


Figura 5 - Sistema com pré-laje

Esse sistema com utilização de pré-lajes é o tipo mais utilizado, e para sua montagem necessita de utilização de guindastes para elevação das peças. É ideal para construções novas, pois se pode industrializar a produção dos painéis, reduzindo o tempo gasto na execução das lajes, este sistema é exclusivo da *BubbleDeck*. A “Fig. 6” ilustra uma laje *BubbleDeck* com pré-laje.



Figura 6 - Exemplo de laje *BubbleDeck* com pré-laje (*Bubbledeck Brasil*, 2014)

2.2 Teoria da Elasticidade - Teoria Clássica de Placas Grossas

A solução de placa finas requer o desenvolvimento de equações diferenciais parciais conforme Eq. (1), esta equação relaciona o deslocamento w na direção perpendicular à superfície média ($z/2$) com carregamento P , foi desenvolvida por Sophie Germain, e apresentado em um concurso em 1810, em que Lagrange era membro da banca examinadora. Lagrange relacionou a equação ao estudo de placas finas, conhecida hoje como a relação fundamental da teoria das placas finas.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (1)$$

Em que, D é a rigidez à flexão da placa:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2)$$

Onde, E é o módulo de elasticidade do concreto, e ν é o coeficiente de Poisson.

Para determinar a função que satisfaz a Eq. (1) foi utilizando as hipóteses de Kirchhoff consideradas válidas para as placas finas, em que a equação aproximada é dada pela seguinte expressão:

$$\omega(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (3)$$

Onde ω é a deflexão da laje, e a , b as dimensões da placa.

A determinação da solução da Eq. (1) basta aplicar o operador diferencial na Eq. (3) conforme apresenta a Eq. (4) e Eq. (5):

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad \text{Eq.(4)}$$

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right) \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{n^2 \pi^2}{b} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\right) &= -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{mn^2 \pi^3}{ab} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\right)\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\end{aligned}$$

No caso admite-se que a função de carga pode ser representada por série dupla de Fourier do seguinte modo:

$$P(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{b}\right) \quad (6)$$

Os coeficientes P_{mn} tomam a forma:

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, z) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{b}\right) dx dz \quad (7)$$

Colocando os termos das equações Eq. (4) e Eq. (5) na forma da Eq. (1), encontra-se o coeficiente de amplitude W_{mn} conforme apresenta a Eq. (8).

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\end{aligned} \quad (8)$$

Dividindo toda Eq. (8) por $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty}$ temos:

$$\begin{aligned}W_{mn} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + 2 \cdot W_{mn} \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \\ + W_{mn} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \frac{1}{D} P_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\end{aligned} \quad (9)$$

$$W_{mn} \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{2 \cdot m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} = \frac{1}{D} P_{mn} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^4 D \left(\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right)^2}$$

Após encontrar o coeficiente de amplitude W_{mn} é possível encontrar a flecha da placa dada pela expressão Eq. (10):

$$\omega(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{\pi^4 D \left(\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right)^2} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (10)$$

As deformações no plano x_1, y_1 a uma distância z_1 do plano médio da placa são deformações devidas à flexão. Que podem ser representadas pelas derivadas parciais, conforme Szilard (2003):

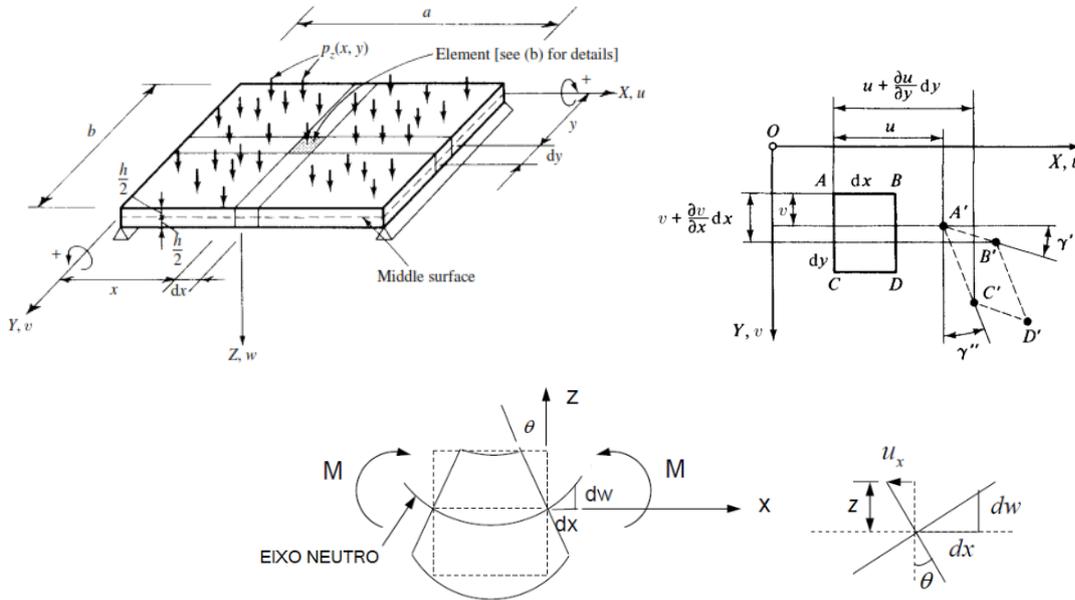


Figura 7 – Deformada da placa biapoada com carregamento distribuído (Szilard, 2003)

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \epsilon_{xy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (11)$$

Utilizando a Lei de Hooke Generalizada para definir a relação entre tensão e deformação;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1/\nu & 1/\nu & 0 \\ 1/\nu & 1/\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}$$

Pode-se relacionar as tensões com os deslocamentos transversais do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{E}{1+\nu} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \theta_2}{z_1} \right) \\ \sigma_{22} &= -\frac{E}{1+\nu} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_{12} &= -\frac{E}{2(1+\nu)} z \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

As tensões variam linearmente ao longo do eixo x_1 e y_1 , como pode-se observar através das tensões σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} porém, a tensão σ_{33} é nula devido às tensões de cisalhamento serem constantes ao longo da espessura da laje.

Os esforços unitários, os momentos fletores unitários M_{11} e M_{22} e o momento torçor unitário M_{12} , e os esforços de cisalhamento unitários Q_1 , e Q_2 , são calculados através da integração das tensões ao longo do eixo da laje.

$$M_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\sigma z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{E}{1+\nu} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \theta_2}{z_1} \right) z^2 dz \quad (14)$$

A integração resulta em:

$$M_{11} = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \theta_2}{z_1} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \theta_2}{z_1} \right) \quad (15)$$

De forma análoga é determinada os momentos M_{22} e M_{12} ;

$$M_{22} = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (16)$$

$$M_{12} = -\frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (17)$$

Sendo D o módulo de rigidez à flexão da placa.

Segundo Kirchhoff (1951), os esforços generalizados definidos de acordo com as tensões podem ser representados na forma matricial:

$$\begin{cases} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{cases} k_1 \\ k_2 \\ k_{12} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} Q_1 \\ Q_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} E_{44} & 0 \\ 0 & E_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{cases}$$

Onde:

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{\nu Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (19)$$

$$D_{33} = \beta G b^3 h k$$

$$E_{44} = E_{55} = G$$

A configuração geométrica da laje é a mesma nas direções x e z, portanto, $D_{11}=D_{22}$ $D_{12}=D_{21}$ e $E_{44}=E_{55}$ são valores de rigidez de cisalhamento transversais. Já a rigidez à torção D_{33} depende das propriedades da seção transversal e do coeficiente β retirado das tabelas de engenharia Ugural e Fenster (2003).

Com as equações de equilíbrio pode-se procurar as equações candidatas para solução da laje ou seja, equações que atendam as condições de contorno. Segundo Ugural (1981), a solução da Eq. 1 da placa ortotrópica é do tipo Navier sendo possível para placas simplesmente apoiadas sujeitas a um carregamento distribuído, esta solução toma a forma de séries duplas de Fourier para a deformada e para as rotações, isto é:

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^4 D \left(\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right)^2} \quad (20)$$

$$\omega(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (21)$$

$$\varphi_x(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi z}{b} \right) \quad (22)$$

$$\varphi_z(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi z}{b} \right) \quad (23)$$

Em que $w(x, y)$ é a deformada da placa, $\varphi_x(x, z)$ e $\varphi_z(x, z)$ são as rotações ao longo das direções X e Y. W_{mn} , B_{mn} e C_{mn} são amplitudes para deflexões e rotações.

Substituindo a forma geral da solução $\omega(x, y)$ da Eq. (1) na equação de Lagrange e levando em conta o desenvolvimento em série dupla de Fourier da função de carga $p(x, y)$, obtém-se a Eq. (24):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_1 W_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_3 A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_2 A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] = P_{mn} \quad (24)$$

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{\left[D_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right]} \quad (25)$$

As constantes desconhecidas A_{mn} , B_{mn} e C_{mn} são obtidas através da substituição das relações constitutivas sob a forma de deformação conforme equações Eq. (22), Eq. (23) e Eq. (23). Isto resulta num sistema de três equações lineares e três incógnitas, conforme equações apresentadas por (Blaauwendraad, 2010).

$$\begin{bmatrix} E_{55} \left(\frac{m\pi}{a} \right) & E_{44} \left(\frac{n\pi}{b} \right) & E_{55} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + E_{44} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \\ (D_{12} + 0.5D_{33}) \left(\frac{mn\pi^2}{ab} \right) & D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + 0.5D_{33} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + E_{44} & E_{44} \left(\frac{n\pi}{b} \right) \\ D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 0.5D_{33} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + & (D_{12} + 0.5D_{33}) \left(\frac{mn\pi^2}{ab} \right) & E_{55} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{mn} \\ C_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

1.3 Cálculo da Rigidez de lajes Sólidas e lajes *BubbleDeck*

O conceito de homogeneização tem sido aplicado para resolver diversos problemas estruturais, onde a geometria da estrutura varia periodicamente, como no caso de lajes *BubbleDeck* (Marais, 2010). Dessa forma é possível empregar a técnica de homogeneização para determinar sua rigidez equivalente. Essa homogeneização pode ser feita igualando-se a energia de deformação da estrutura real com a energia de deformação da estrutura equivalente.

Assim, considerando-se a rigidez da laje na região das nervuras, e rigidez na mesa, é dada por:

$$D_1 = \frac{E h_{eq}^3}{12(1 + \nu^2)}; \quad D_2 = \frac{E h_f^3}{12(1 + \nu^2)}; \quad (27)$$

A rigidez $D(x, z)$ da laje *BubbleDeck* pode ser definida como:

$$D_2 \leq D(x, z) \leq D_1 \quad (28)$$

A rigidez equivalente será a rigidez média da laje (Araújo, 2006), dada pela seguinte expressão:

$$D_{11eq} = (1 - \xi)D_1 + \xi D_2 \quad (29)$$

Onde:

$$\xi = \frac{(b_{f,x} - b_{w,x})(b_{f,y} - b_{w,y})}{b_{f,x} b_{f,y}} \quad (30)$$

Para lajes *BubbleDeck* com espaçamentos das bolas iguais nas direções x e z, pode-se escrever a expressão (30) como:

$$\xi = \frac{(b_f - b_w)^2}{b_f^2} \quad (31)$$

1.4 Determinação do Momento de Inércia Equivalente

A seção equivalente pode ser determinada a partir de uma seção com o mesmo momento de inércia. Para isso atribui-se à seção retangular, o momento de inércia da seção “T”, mantendo-se o mesmo valor da largura mesa da laje *BubbleDeck*, ou seja deixando fixo, como largura da seção retangular para então se obter o valor da altura equivalente. Nesse método a altura equivalente h_{eq} pode ser expressa pela seguinte equação:

$$h_{eq} = \left(\frac{12I}{b_f} \right)^{1/3} \quad (32)$$

Onde a inércia I é dada por:

$$I = (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot \left(h - \frac{h_f}{2} - yt_{inf} \right)^2 + b_w \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2} - yt_{inf} \right)^2 + \frac{b_w \cdot h^3}{12} + (b_f - b_w) \cdot \frac{h_f^3}{12} \quad (33)$$

Em que a distância do centro de gravidade da seção “T” até a fibra mais tracionada yt_{inf} é dada por:

$$yt_{inf} = \frac{b_w \cdot \frac{h^2}{2} + (b_f - b_w) \cdot \left(h - \frac{h_f}{2} \right)}{b_w \cdot h + (b_f - b_w) \cdot h_f} \quad (34)$$

A expressão da Eq. (34) é válida apenas para momento de inércia no estágio I. O momento de inércia I é considerado para a seção “T” de cada nervura conforme apresenta a “Fig. 7”.

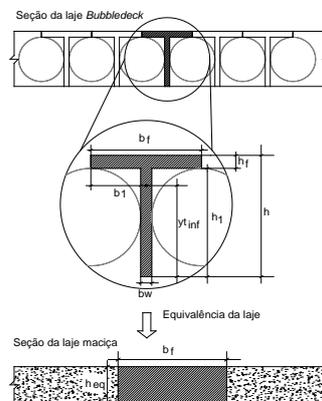


Figura 7- Altura equivalente de laje maciça

3. CÁLCULO DA RIGIDEZ DA LAJE COM TEORIA DE PLACAS

Para determinar a rigidez das lajes sólidas e *BubbleDeck* foram implementadas através de programação em MATLAB sugeridas por Ali (2014), que consistem em calcular a matriz de rigidez e aplicar numa placa retangular com dimensões de 12000 x 10000 mm com espessura de 280 mm a fim de verificar a influência da rigidez na deformação da placa, bem como determinar o fator de rigidez de lajes sólidas aplicadas em lajes *BubbleDeck*.

3.1 Determinação da rigidez de lajes sólidas

A finalidade é apresentar uma análise macromecânica de laje solida e *BubbleDeck* através da matriz de rigidez aplicadas na Teoria de Placas: Teoria de Placas Finas definidas pelas hipóteses de Kirchhoff - Timoshenko, S.P & Woinowsky e Krieger, S. (1959). Essa teoria foi utilizada para analisar a rigidez das lajes à flexão. A laje *BubbleDeck* foi homogeneizada para uma seção “T”, posteriormente foi calculada a rigidez através da altura equivalente da laje sólida e aplicada na Teoria de Placas, conforme “Fig. 8”.

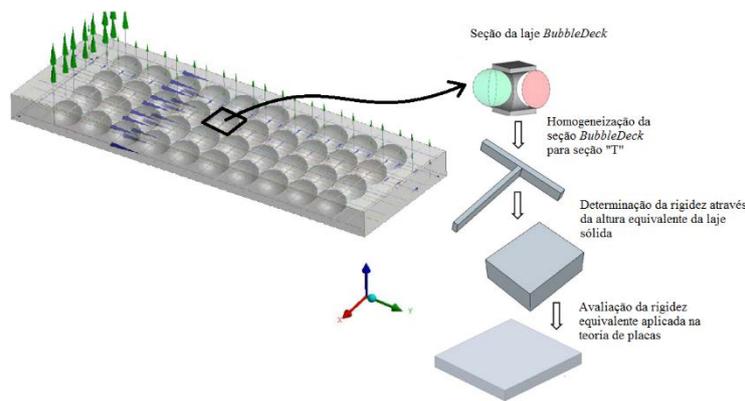


Figura 8 - Homogeneização da seção de laje *BubbleDeck* para seção retangular

Na avaliação da rigidez equivalente foi considerado uma laje ortotrópica simplesmente apoiada ao longo do contorno exterior e submetida à ação de uma carga distribuída, a qual se pode representar através de séries trigonométricas duplas de Fourier que satisfaz a equação diferencial da placa.

Onde:

$$0 \leq x \leq a; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (35)$$

Na análise as seguintes hipóteses foram tomadas:

- Não se consideram descontinuidades a nível macroscópico;
- A laje tem uma espessura constante com valores conhecidos de rigidez;
- Os deslocamentos são pequenos. Portanto, as tensões envolvidas são infinitesimais;
- Os pontos pertencentes à normal ao plano médio da placa antes da deformação permanecem numa direção linear mas não necessariamente na normal à superfície média fletida.

Pretende-se resolver a equação de Lagrange da Eq. (1). Sujeita às condições de fronteira. Estas condições são: ao longo dos lados $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$ e altura $z = h/2$.

$$x = [0, a]: w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad y = [0, b]: w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (36)$$

A laje em estudo possui altura de 280 mm com carregamento distribuído que representa o peso próprio mais uma sobrecarga de utilização de 2 kN/m² definida como sendo $P(x,y)$. Primeiramente foi calculado a laje sólida e posteriormente as lajes *BubbleDeck* com a definição de homogeneização para seção retangular.

Utilizando a Eq. (19), tem-se:

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{26500 \cdot 280^3}{12(1-0,18^2)} = 5,03841 \cdot 10^{10} - N/mm^2 \quad (37)$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{0,18 \cdot 26500 \cdot 280^3}{12(1-0,18^2)} = 9,0691 \cdot 10^9 - N/mm^2 \quad (38)$$

Para determinar a rigidez a torção D_{33} utilizou $\beta = 0,163$ valor obtido através de tabela de engenharia (Ugural e Fenster, 2003), b equivale a menor dimensão da seção transversal adotado como sendo 280 mm, o valor da taxa de torção é dada por $k = \Delta\theta/\Delta l$, $\Delta\theta = 1$ rad e $\Delta l = 280$ mm, já o módulo de elasticidade de cisalhamento é dado por $\mu = E/2(1+\nu)$ em que foi adotado a média do módulo de elasticidade como sendo $E = 26650$ MPa. Portanto tem-se:

$$D_{33} = \beta \cdot G \cdot b^3 \cdot h \cdot k = 0,163 \cdot 1,1292 \cdot 10^4 \cdot 280^3 \cdot 280 \cdot \frac{1}{280} = 4,0406 \cdot 10^{10} N \cdot mm \quad (39)$$

Para o $E_{44} = E_{55}$ que são valores de rigidez de cisalhamento, tem-se então:

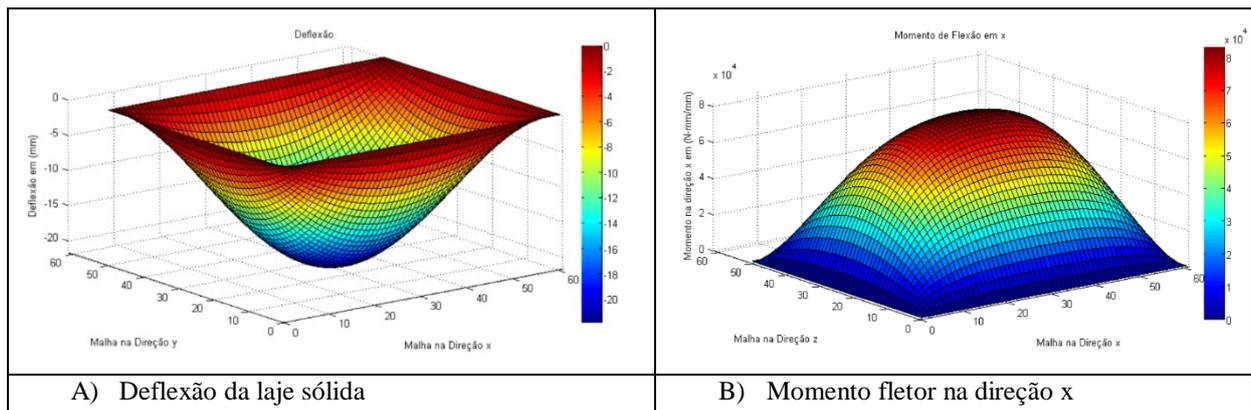
$$E_{44} = E_{55} = G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{26650}{2 \cdot (1 + 0,18)} = 1,1292 \cdot 10^4 - N/mm \quad (40)$$

Assim a matriz de rigidez pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50,3841 & 9,0118 & 0 \\ 9,0181 & 50,3841 & 0 \\ 0 & 0 & 40,4060 \end{bmatrix} \cdot 10^9 N \cdot mm \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} E_{44} & 0 \\ 0 & E_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1292 & 0 \\ 0 & 1,1292 \end{bmatrix} \cdot 10^4 N/mm \quad (42)$$

Utilizando programação em MATLAB de Ali (2014), que calcula os momentos fletores, momentos torçores e deslocamentos de placas retangulares sujeitas a carregamento distribuído apoiadas nas extremidades, foi possível obter a solução aproximada da Eq. (1). Assim, pode-se determinar a magnitude dos momentos fletores e torçores conforme apresenta a “Fig. 9”.



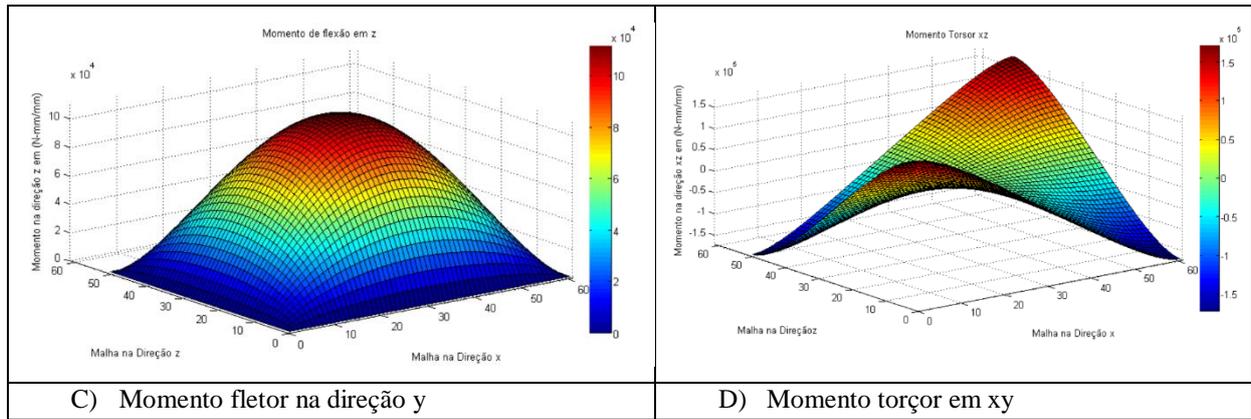


Figura 9 – Análise gráfica dos esforços internos na laje sólida

3.1 Determinação da rigidez de lajes *BubbleDeck*

Para calcular a rigidez das lajes *BubbleDeck* foi feito processo análogo ao das lajes sólidas porém, utilizando o processo de homogeneização para se determinar a rigidez equivalente através das equações Eq. (30), Eq. (31), Eq. (33) e Eq. (34). Portanto, a altura equivalente da laje aplicando a Eq. (32) foi de 250,22 mm.

$$D_{11eq} = D_1(1 - \xi) + D_2\xi = \frac{26650 \cdot 280^3}{12 \cdot (1 - 0,18^2)} \cdot \left(1 - \left(\frac{280 - 25}{280}\right)^2\right) + \frac{26650 \cdot 250,22^2}{12 \cdot (1 - 0,18^2)} \cdot \left(\frac{280 - 25}{280}\right)^2 = 8595515536,73 + 29822940707,04 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad (43)$$

$$D_{11eq} = 38418456244,1 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$D_{12eq} = D_1\xi = \frac{26650 \cdot 250,22^2}{12 \cdot (1 - 0,18^2)} \cdot \left(1 - \frac{280 - 25}{280}\right)^2 = 5069899920,1968 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad (44)$$

$$D_{33eq} = \beta \cdot G \cdot b^3 \cdot h_{eq} \cdot k = \frac{1}{280} \cdot 0,163 \cdot 280 \cdot 250,33^3 \cdot 11292,3$$

$$D_{33eq} = 28836248751,9 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Após a determinação da altura equivalente foi possível determinar a rigidez equivalente de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38,4184 & 9,0118 & 0 \\ 9,0181 & 38,4184 & 0 \\ 0 & 0 & 28,8362 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} E_{44} & 0 \\ 0 & E_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1292 & 0 \\ 0 & 1,1292 \end{bmatrix} \cdot 10^4 \text{ N/mm}$$

Com os valores de rigidez das lajes *BubbleDeck* foi possível calcular os diagramas de esforços internos através de rotinas de programação em MATLAB conforme apresenta a “Fig. 10”.

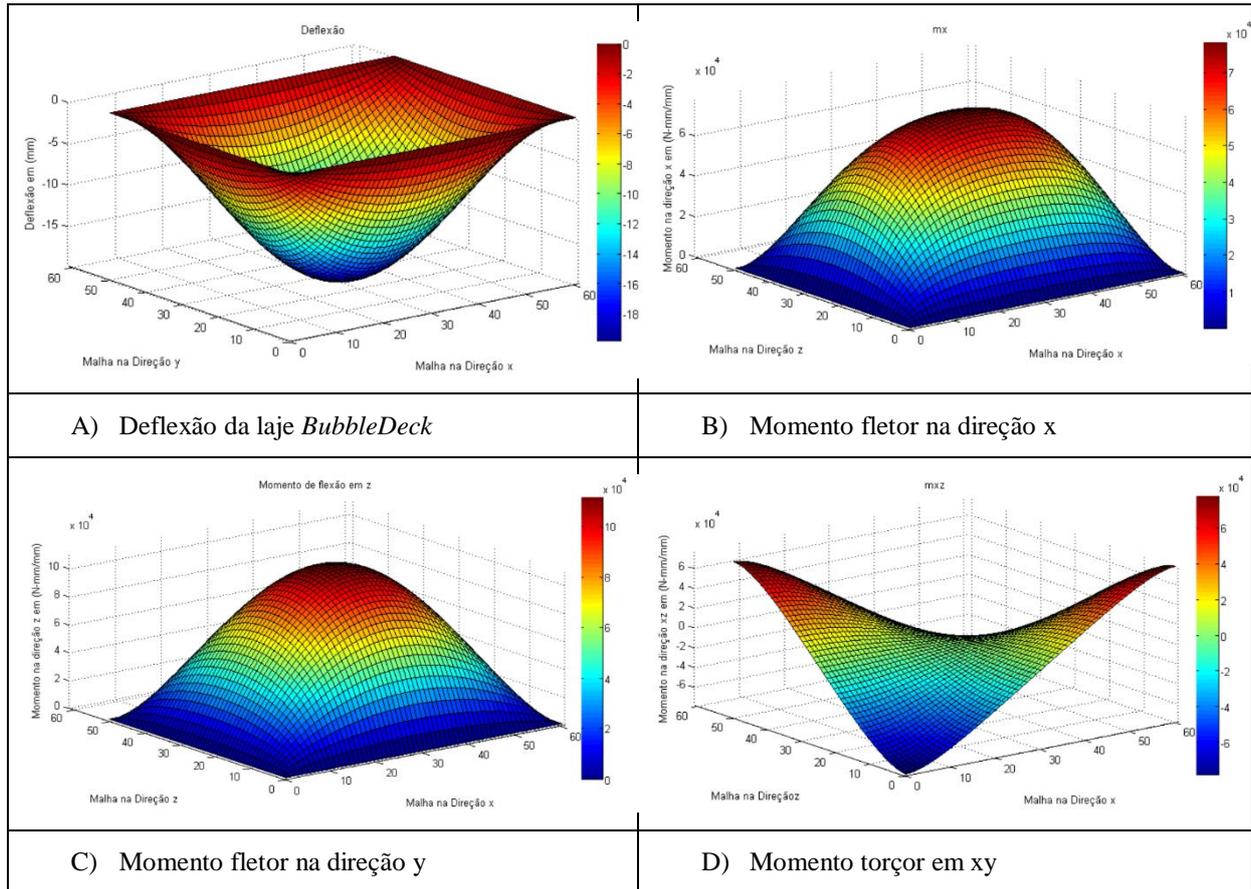


Figura 10 – Análises gráficas dos esforços internos na laje *BubbleDeck*

3.3 Modelo em Elementos Finitos Tridimensionais no ABAQUS CAE

Foi utilizado o ABAQUS CAE na modelagem, com elementos tridimensionais tipo C3D8. Este elemento é definido por oito nós, com três graus de liberdade em cada nó, translações nodais nas direções x, y e z (U_x , U_y , U_z) conforme mostra a “Fig. 11”.

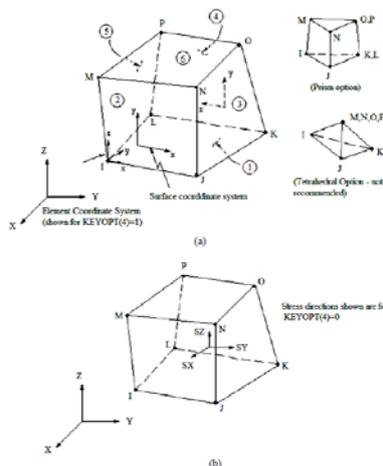


Figura 11- Graus de liberdade do elemento finito e direção das tensões principais

3.3 Geometria da laje e condições de contorno

As dimensões da laje foram de 10000x12000 mm, com altura de 280 mm, foram modeladas em com elementos sólidos *C3D8: A 10-node quadratic tetrahedron*. Onde C: Contínuo para esforços e deslocamentos (C), D: três dimensões (3D), 8: números de nós. As condições de contorno adotada foi do tipo biapojada. O carregamento foi de 2kN/m², perpendicular ao plano médio da placa. Foi adotado dimensão máxima de 24 cm para cada elemento finito conforme “Fig. 12”.

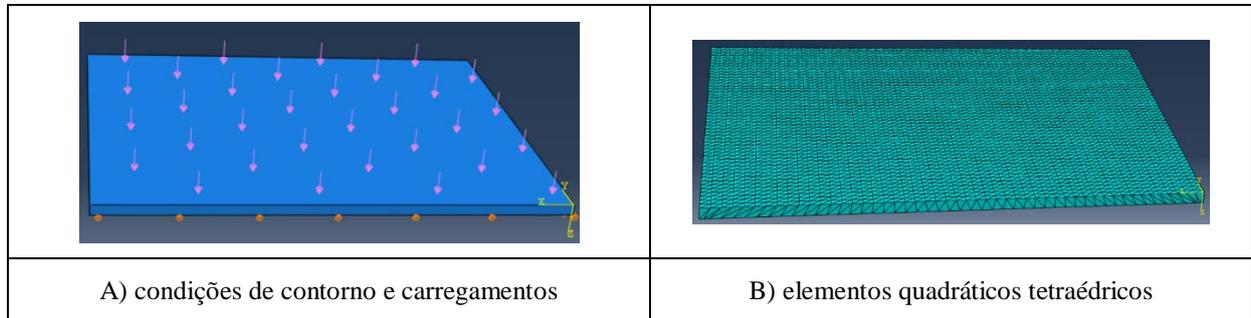


Figura 12 - Modelagem no ABAQUS CAE

3.4 Propriedades do material

Nesse modelo foi considerado o concreto no estágio I, ou seja sem presença de fissuras-análise elástico linear. O coeficiente de Poisson do concreto, segue a prescrição da NBR 6118 (2014), sendo $\nu = 0.20$.

Para a laje *BubbleDeck* foi adotado uma altura equivalente $h_{eq} = 250,22$ cm. O módulo de elasticidade em ambos os modelos foi de $E_{cs}(t) = 26.650$ MPa.

Com as alturas das lajes definidas, tanto da sólida como da *BubbleDeck*, foi possível modelar em elementos finitos através do ABAQUS CAE conforme “Fig. 13”.

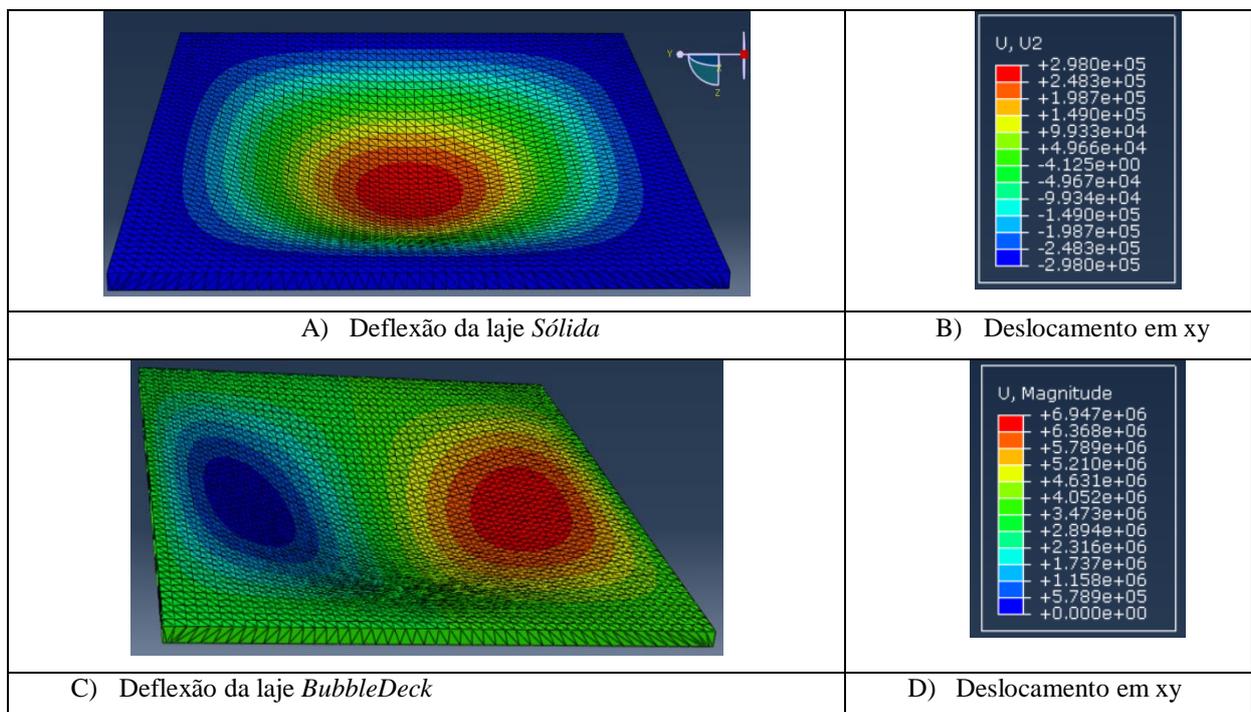


Figura 13 – Análises gráficas dos esforços internos na laje *BubbleDeck*

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

O fator de rigidez de lajes sólidas comparadas com lajes *BubbleDeck* utilizando a simplificação para uma seção “T” foi de 76,26%, este valor poderia ser maior se tivesse sido adotado uma seção I. Embora a seção I apresente maior inércia em comparação com uma seção “T”, deve-se ter cuidado nessa simplificação, pois, no dimensionamento, o concreto da zona tracionada é desconsiderado devido às aberturas de fissuras, tendo função apenas para ancoragem das armaduras, a fim de evitar o escorregamento das mesmas.

Pode-se observar nas análises gráficas apresentados na “Fig. 17” que a diferença de rigidez entre as lajes influencia principalmente nos deslocamentos, ou seja, a laje *BubbleDeck* apresentou um deslocamento no meio do vão de 30 mm, já a laje sólida ficou com valor de 20 mm.

Já as demais análises gráficas de tensões, momentos fletores e torçores apresentados na “Fig. 13” e “Fig. 14” não apresentaram grandes diferenças entre si, isto mostra que as lajes *BubbleDeck* oferecem uma vantagem no que se refere à economia de material e facilidade de vencer grandes vãos, mas sobretudo tendo o cuidado com as flechas excessivas.

Os valores de deslocamentos, momentos fletores e momentos torçores são válidos apenas para o regime linear. Assim, deve-se ter o cuidado com as soluções apresentadas, porque no dimensionamento de estruturas de concreto armado leva-se em conta que o concreto está fissurado, ou seja, não está no regime linear.

A rigidez das lajes *BubbleDeck* foi de 83,88% em relação às lajes sólidas e a diferença do modelo numérico para o analítico ficou em 21% mostrando que deveria se fazer um teste de convergência da malha de elementos finitos para obter melhores resultados de rigidez.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer pelo apoio a esta e a outras pesquisas à: Universidade de Brasília e às Agências de fomento CNPq e CAPES.

6. REFERÊNCIAS

Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6118 – *Projeto de estruturas de concreto - Procedimentos*. Rio de Janeiro, Brasil, 2014, 238 p.

Ali, Wondwosen Belay. *Two Dimensional Micromechanics Based Computational Model for Spherically Voided Biaxial Slabs (SVBS)*. Mason Archival Repository Service Norwegian University of Science and Technology, 2014, 177p.

Araujo, J.M. *A rigidez equivalente das lajes nervuradas de concreto armado*. Revista: Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.8, p.1-9. 2006.

BubbleDeck-UK (2008). *BubbleDeck structure solutions – Product Introduction*. Part 1, BubbleDeck UK Ltd.

BubbleDeck-UK (2008). *Design Guide for compliance with BCA using AS3600 and EC2*, BubbleDeck UK Ltd.

BubbleDeck Brasil, disponível em <<http://www.bubbledeck.com.br>>, Acesso em: 17 de maio de 2016.

- Blaauwendraad, J. (2010). *Plates and FEM – Surprises and Pitfalls*. Springer ISBN 978- 90-481-3595-0.
- Cobiax, disponível em <http://www.cobiax.com/startseite>, Acesso em 21 de maio de 2016.
- Daliform Groups, disponível em < <http://www.daliform.com>>, Acesso em 21 de maio de 2016.
- Franca, A. B. M; Fusco, P. B. *As lajes nervuradas na moderna construção de edifícios*. São Paulo: AFALA& ABRAPEX, 1997.
- Marais, C. C., Robberts, M. J., and Rensburg, B. W. (2010). “*Spherical void formers in concrete slabs.*” *Journal of the South African Institution of Civil Engineering*, 52 (2), 2-11.
- Mindlin, R.D. (1951). *Influence of rotary inertia and shear on flexural motions isotropic, elastic plates*. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 18:31-38.
- Moraes Neto, B.N. *Comportamento à Punção de Lajes Lisas em Concreto Reforçado com Fibras de Aço sob Carregamento Simétrico*. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil,. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 2013, 349 p.
- Santos, L.M. *Cálculo de concreto armado*. 2v. São Paulo, LMS, 1983 (v.1), 1981.
- Timoshenko, S. P; Woinowsky-Krieger, S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959.
- Ugural C. A., e Fenster K. S. (2003). *Advanced Strength and Applied Elasticity*. 4th Edition. Pearson Education, Inc ISBN-10: 0130473928.