



USO DO MÉTODO HOMOGENEIZADO NA MODELAGEM DE VIGAS PAREDES DE CONCRETO ARMADO

Agno Alves Vieira

Antônio Carlos de O. Miranda

agnovieira@yahoo.com.br

acmiranda@unb.br

Universidade de Brasília – UnB, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental Campus Darcy Ribeiro, 70910-900 Brasília, Brasil

Resumo. *Esse trabalho apresenta simulações numéricas de vigas paredes de concreto armado utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) onde é adotado o método homogeneizado ou “smeared” para discretização de estruturas de concreto armado. O método homogeneizado considera a armadura distribuída uniformemente no concreto, tal procedimento interpreta as regiões entre concreto e aço como um material novo com uma rigidez equivalente, tendo como principal vantagem o processo de discretização da malha, já que não se tem a preocupação de criar elementos distintos de concreto e aço. Os fenômenos como fissuração e seus efeitos na redistribuição de tensões no elemento e na aderência entre a armadura e o concreto são inseridos implicitamente nas relações constitutivas dos materiais. A implementação do método fará uso do “Modified Compression Field Theory” (MCFT) proposto por Vecchio e Collins, uma das teorias que adota o método homogeneizado e uma das que mais se destaca na literatura. Por fim são comparados os resultados obtidos pelos modelos numéricos com resultados experimentais.*

Palavras Chave: *Viga Parede, Método dos Elementos Finitos, Método Homogeneizado, Concreto Armado.*

1 INTRODUÇÃO

Vigas Paredes de concreto armado é um assunto de grande interesse na Engenharia Estrutural já que são elementos presentes em edifícios, estruturas offshore e fundações. Uma viga de concreto armado é considerada Viga Parede quando $L/h(\text{Vão}/\text{Altura}) < 3$ (KONG et al., 2002), tal característica proporciona uma dificuldade na predição de seu comportamento já que a Hipótese de Bernoulli não pode ser aplicada, ou seja, não se pode considerar a linearidade na distribuição de deformações. Outras dificuldades são o comportamento não linear do concreto, fenômenos como fissuração e seus efeitos na redistribuição de tensões no elemento e na aderência entre concreto e armadura.

Nesse contexto o método dos elementos finitos (MEF) é uma ferramenta muito mais versátil em comparação com os antigos métodos. Ela pode ser usada para analisar vigas paredes de espessuras variáveis, em degraus ou bordas inclinadas, com aberturas e com carregamento aplicado em qualquer ponto da viga. Ao incorporar uma lei constitutiva apropriada e um procedimento incremental-iterativo, a natureza não-linear do comportamento dos materiais podem ser contabilizadas (ZIENKIEWICZ, 1971). Para modelar estruturas de concreto armado pelo MEF (KWAK; FILIPPOU, 1990) classificam em três métodos: Método homogeneizado ou “smeared”, ele é utilizado em casos onde, há uma distribuição uniforme da armadura, de modo que os elementos nesta região podem ser simulados como um novo material homogêneo com uma rigidez equivalente. O método incorporado ou “Embedded”, o aço é considerado como um membro axial incorporado no elemento isoparamétrico de tal forma que os seus deslocamentos são consistentes com os do elemento. Método discreto onde os elementos que representam a armadura podem ser elementos unidimensionais de treliça ou viga com dois ou três graus de liberdade por nó, que são conectados aos elementos que representam o concreto pelos nós ou através de elementos de contato que simulam a aderência aço concreto. O concreto pode ser modelado com elementos unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais.

O Método homogeneizado ou “smeared” traz consigo a grande vantagem na discretização dos elementos de concreto e aço, já que não é necessário criar elementos distintos de concreto e aço, em substituição destes tem-se um único elemento de concreto armado onde estão embutidos as propriedades do concreto e do aço como as interações entre si.

Uma das estratégias mais difundidas na modelagem de estruturas planas de concreto armado sujeitas a esforços no plano como Vigas Paredes empregando o método homogeneizado é a representação da estrutura através elementos de membrana que incorporam a rigidez do aço e concreto conforme Figura 1. Estão entre os primeiros trabalhos a adotarem essa estratégia (GUPTA, 1984), (GUPTA; ASCE, 1986).

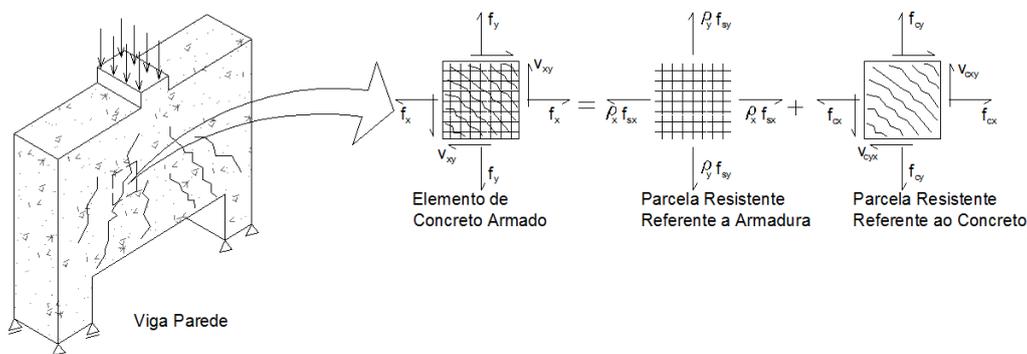


Figura 1 - Elementos de Membrana em Viga Parede de Concreto Armado

Nesse contexto este trabalho tem como objetivo principal simular numericamente o comportamento de vigas paredes de concreto armado sob carregamento monotônico utilizando Método dos Elementos Finitos Não Linear (MEFNL) onde é adotado o método homogeneizado ou “smeared” para discretização de estruturas de concreto armado e para as relações constitutivas do concreto será utilizado o Smeared Crack Model ou modelo de fissuras distribuídas com uso do Rotation Crack Model ou Modelo de fissuras rotativa, mais especificamente a Modified Compression Field Theory ou Teoria do Campo Modificado de Compressão proposta por (VECCHIO, F. J., AND COLLINS, 1986).

2 TEORIA DO CAMPO DE COMPRESSÃO MODIFICADA

A partir do Diagonal Compression Field Theory proposta por (MITCHELL; COLLINS, 1974) e Compression Field Theory proposta por (COLLINS, 1978) e uma campanha de ensaios, onde foram testados trinta corpos de provas com 890 milímetros quadrados x 70 mm de espessura, os quais foram submetidos a diversos tipos de carregamentos como cisalhamento puro, obtiveram dados de tensão e deformação que serviu como aporte para propor a teoria do campo de compressão modificada (The Modified Compression-Field Theory, ‘MCFT’).

O MCFT foi desenvolvido para determinar como as três tensões no plano σ_x, σ_y e τ_{xy} estão relacionados com as três deformações no plano $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e γ_{xy} . Para isso o MCFT faz os seguintes pressupostos:

1. Para cada estado de deformação só existe um correspondente estado de tensão;
2. Tensões e deformações podem ser consideradas em termos de valores médios, quando tomado em cima de áreas ou distâncias grandes o suficiente para incluir várias fissuras.
3. As barras da armadura do concreto são perfeitamente ligadas em conjunto com os limites do elemento (isto é, sem escorregamento global).
4. As barras longitudinais e transversais da armadura são distribuídas uniformemente ao longo do elemento.

No MCFT as relações constitutivas do concreto no elemento de concreto armado são aplicadas nas tensões principais através de curvas empíricas, as quais são diferentes do comportamento tradicional obtido do ensaio de corpos-de-prova cilíndricos submetidos à compressão.

As deformações utilizadas consistem em deformações médias, isto é, elas reúnem de maneira acoplada efeitos combinados como deformações locais nas fissuras e deformações entre fissuras. Da mesma maneira, as tensões também são médias, isto é, elas incluem implicitamente as tensões entre fissuras, tensões nas fissuras, a interface de cisalhamento entre fissuras e o efeito pino (dowel action of reinforcement) propiciado pelas armaduras.

De forma resumida a Figura 2 apresenta as equações envolvidas no MCFT, para mais informações ver (VECCHIO, F. J., AND COLLINS, 1986), (VECCHIO, 1989), (VECCHIO, 1990), (BENTZ, 2000). O painel da esquerda apresenta as equações de equilíbrio baseadas nas equações do Círculo de Mohr para tensões. O painel intermediário apresenta as condições de deformação, também resumidas através do Círculo de Mohr. Deve se observar que, no MCFT, o ângulo da tensão principal no concreto é tomado como sendo igual ao ângulo da deformação principal. O painel da direita ilustra as relações constitutivas para os materiais, nomeadamente aço e concreto. Finalmente, a base de cada painel ilustra as componentes de

verificação localizada na fissura, de maneira que as tensões médias possam ser transmitidas (SOUZA, 2013).

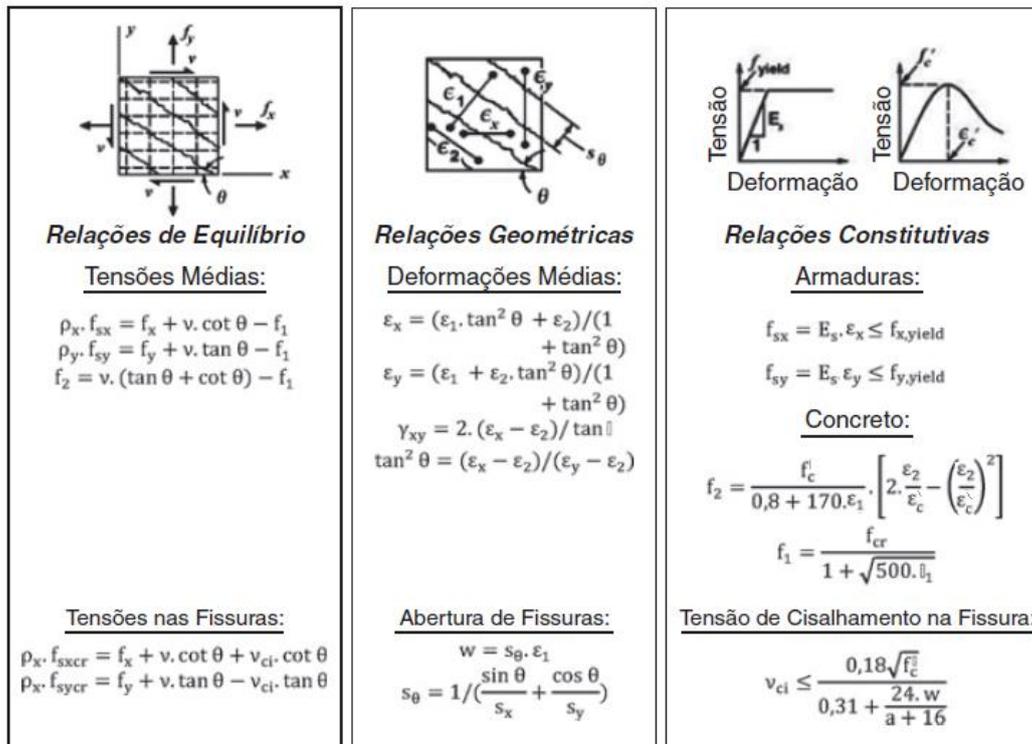


Figura 2 - Resumo das equações utilizadas no modelo MCFT (BENTZ, 2000).

3 MODELOS CONSTITUTIVOS

Como já relatado para representar o comportamento não linear do concreto advindo em parte por sua característica de fissuração este trabalho fará o uso do modelo de fissuração distribuída ou Smeared Crack Model, em que um sólido fissurado é imaginado como contínuo, onde as relações de tensão-deformação se iniciam com uma lei isotrópica e à medida que há formação de fissuras essa lei se transforma em ortotrópica, com os eixos de ortotropia determinados de acordo com as condições de formação de fissuras. O modelo de fissuração distribuída pode ser dividido em fissuras com direção fixa (Fixed Crack Direction) fissuras com direção rotativa (Rotating Crack Direction). Com a concepção de fissuras com direção fixa, a fissura mantém a mesma direção durante todo processo computacional, ao passo que um conceito de fissuras com direção rotativa permite a que a orientação da fissura gire conforme os eixos de deformação principal (ROTS; BLAAUWENDRAAD, 1989).

O MCFT é um modelo de fissuração distribuída onde suas fissuras possuem direção rotativa conforme as direções principais de deformação. As relações constitutivas do concreto são aplicadas nas direções principais de deformação, onde são adotadas relações de tensão-deformação equivalentes, de modo que, a partir de resultados experimentais de corpos de prova cilíndricos e considerando as relações de deformação no plano possa se gerar uma lei apropriada para cada situação. Essas relações foram extraídas por (VECCHIO, F. J., AND COLLINS, 1986) de modelos físicos ensaiados com diversas de condições de carregamento, a Figura 3 mostra tais relações.

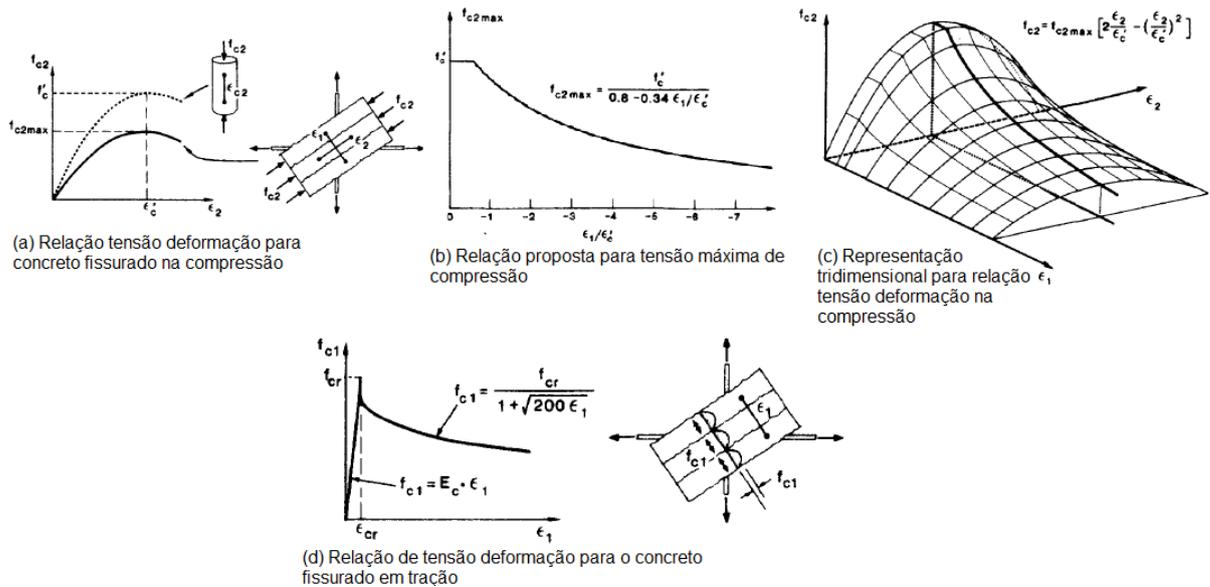


Figura 3 - Relações Constitutivas do Concreto adotadas no MCFT (VECCHIO, F. J., AND COLLINS, 1986)

4 PROGRAMA COMPUTACIONAL

A partir do código em Matlab de Elementos Finitos linear elástico do livro First Course in Finite Elements (FISH; BELYTSCHKO, 2007) foi criado um código de análise não linear de elementos finitos, utilizando como método de resolução do problema não linear o Método Quase-Newton, onde a matriz de rigidez do material adotada é matriz secante conforme trabalhos de (VECCHIO, 1989), (VECCHIO, 1990), (SELBY; VECCHIO, 1997), (BENTZ, 2000), (FOSTER; MARTI; ASCE, 2003).

A alteração do código de elementos finitos linear elástico para não linear inicia com adequação da matriz de rigidez [K], onde a matriz de rigidez material [D] para material linear elástico no estado plano de tensão descrita na eq. 1 se transforma na eq. 2 onde são contabilizados as parcelas de rigidez do concreto e do aço.

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$D = T^T D_c T + D_s \tag{2}$$

A parcela de rigidez D_c é descrita na eq. 3 onde E_{C1} e E_{C2} são os módulos secantes referentes às direções principais conforme as eq. 4 e 5 e o modulo G_{C12} descrito na eq. 6. O processo de obtenção da rigidez secante é ilustrado na Figura 4.

$$D_c = \begin{bmatrix} E_{C1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{C2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{C12} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$E_{C1} = f_{C1} / \varepsilon_{C1} \quad (4)$$

$$E_{C2} = f_{C2} / \varepsilon_{C2} \quad (5)$$

$$G_{C12} \approx (E_{C1}E_{C2}) / (E_{C1} + E_{C2}) \quad (6)$$

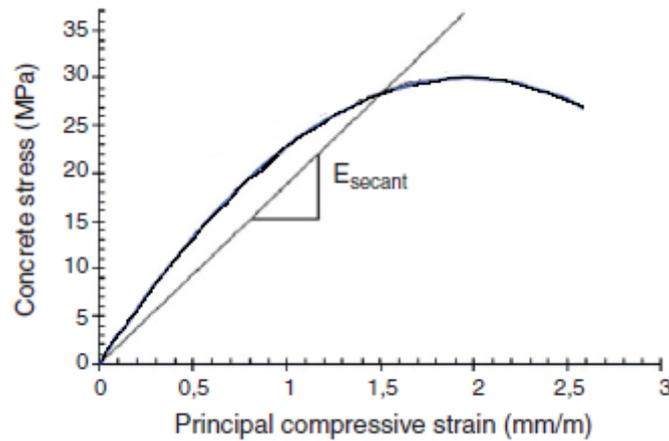


Figura 4 - Modulo Secante.

A matriz T indicada na eq. 2 se refere a matriz de transformação que transfere a matriz D_c da referência das direções principais para referencial global, conforme eq. 7.

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta & 2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

Onde θ é o ângulo principal.

A parcela de rigidez D_s é descrita na eq. 8

$$D_s = \begin{bmatrix} \rho_x E_{sx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_y E_{sy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde: ρ_x e ρ_y são as taxas de aço na direção x e y respectivamente

E_{sx} e E_{sy} são os módulos secantes do aço na direção x e y respectivamente

Por fim a matriz de rigidez é extraída conforme eq. 9.

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (9)$$

Onde B é a matriz de deformação e Ω é o volume de cada elemento.

Como já descrito o programa implementado utiliza o Método Quase-Newton para análise não linear, onde a cada passo de carga, são realizadas interações para convergência da resposta, a cada interação são avaliados estado de deformação dos materiais e gerado um nova matriz secante. A Figura 5 apresenta o fluxograma implementado.

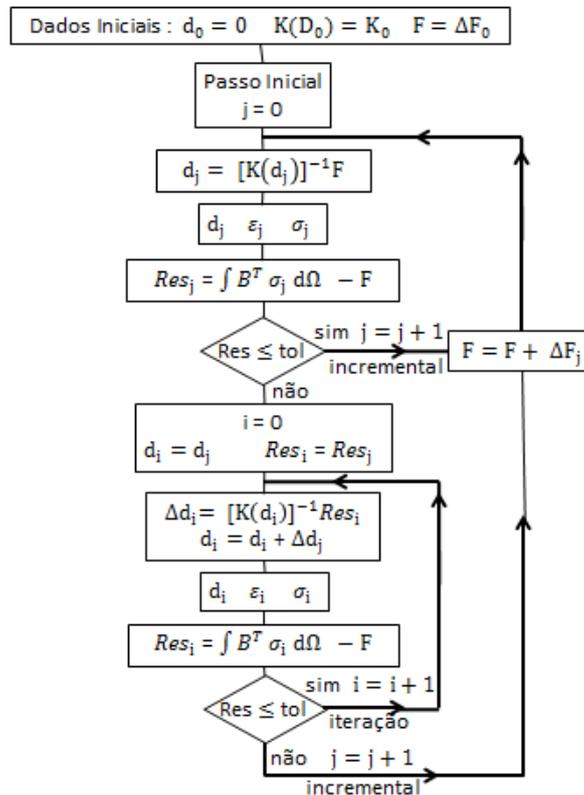


Figura 5 - Fluxograma de análise não linear implementado.

5 EXEMPLOS COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Para avaliação da eficiência do método numérico implementado será utilizado os dados de duas pesquisas. A primeira se refere a uma das vigas parede ensaiadas por (LEONHARDT; WALTHER, 1966), esses dados já foram utilizados por diversos pesquisadores entre eles (VECCHIO, 1989). O segundo se refere a uma viga parede ensaiada por (SHIN, 1988).

A viga parede ensaiada por (LEONHARDT; WALTHER, 1966) tinha comprimento e altura iguais a 1600 mm com espessura de 100 mm, com carga distribuída ao longo do topo e bi-apoiada. A armadura vertical uniforme em toda viga com taxa de aço $\rho_y = 0.00175$ e armadura horizontal mais densa nas regiões inferiores com taxa de aço $\rho_x = 0.00175$ e mais leve acima com taxa de aço $\rho_x = 0.01787$, conforme Figura 6.

A viga parede ensaiada por (SHIN, 1988) tinha comprimento de 2400 mm e altura de 600mm com espessura de 200 mm, com carga duas cargas aplicadas o topo e bi-apoiada. Sem armadura na alma com apenas armadura horizontal no inferior da viga, conforme Figura 7.

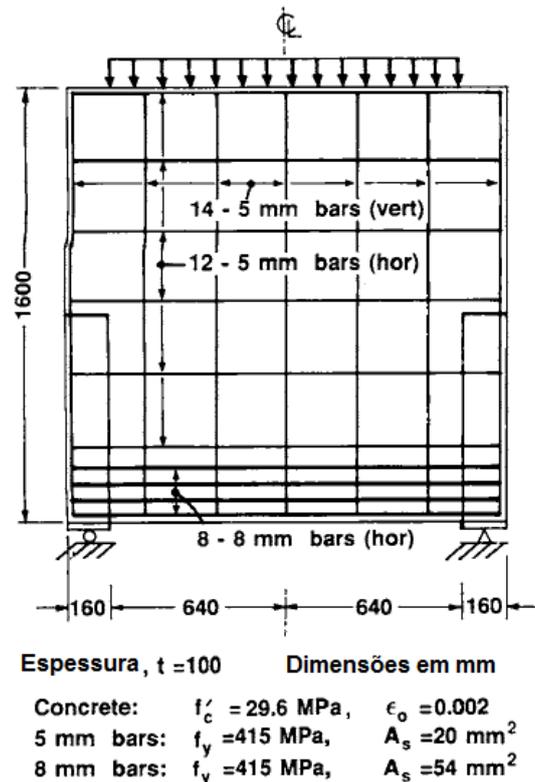


Figura 6 - Modelo experimental viga parede (LEONHARDT; WALTHER, 1966)

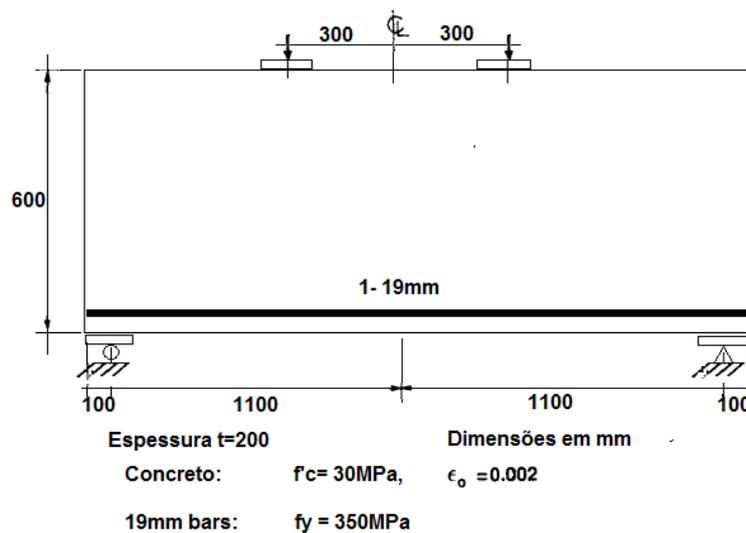


Figura 7 - Modelo experimental viga (SHIN, 1988)

Para a viga de (LEONHARDT; WALTHER, 1966) foi modelado a apenas a metade da estrutura pelo fato da simetria apresentada onde o modelo possui 96 elementos quadrilaterais de quatro nós cada. Para a viga de (SHIN, 1988) também foi modelado a apenas a metade da estrutura pelo fato da simetria apresentada onde o modelo possui 120 elementos quadrilaterais de quatro nós cada.

A Figura 8 é apresentada a comparação entre as relações carga versus deslocamento dos dados experimentais com os numéricos da viga (LEONHARDT; WALTHER, 1966) é

verificado que as curvas possuem boa concordância até a carga de 1250 kN onde o modelo numérico não acompanhou os dados experimentais, a partir desse ponto o modelo numérico não conseguiu atingir a carga última experimental, porém obtendo deslocamento final semelhante. Essa divergência se deve em parte ao fato que no modelo numérico a resistência residual de tração do concreto não obteve o mesmo desempenho do experimental, ou seja, nas proximidades da carga de colapso a armadura foi responsável quase que exclusivamente pelas tensões de tração.

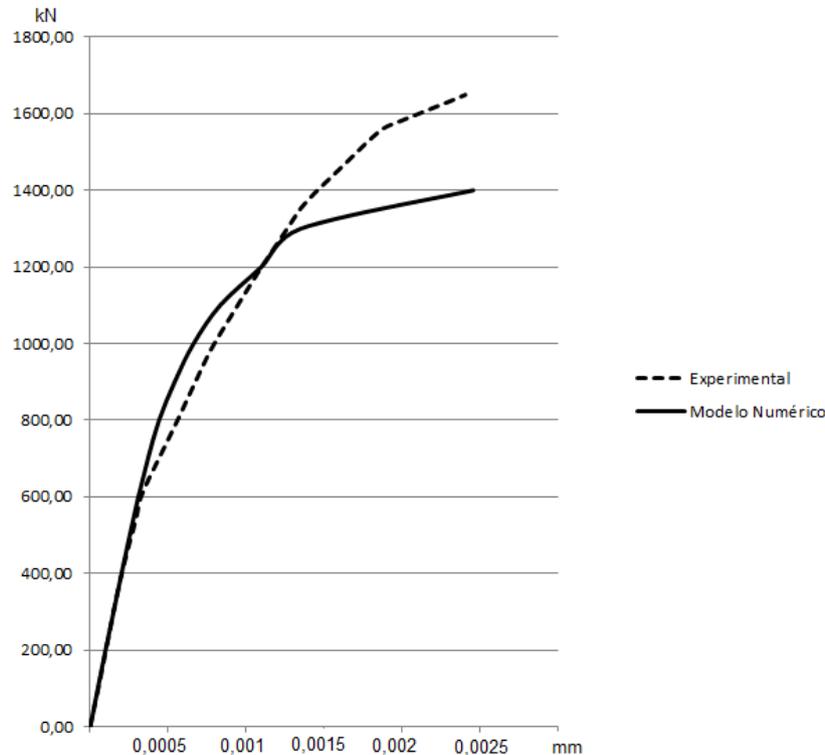


Figura 8 - Carga x Deslocamento viga (LEONHARDT; WALTHER, 1966)

A Figura 9 apresenta a comparação entre as relações carga versus deslocamento dos dados experimentais com os numéricos da viga de (SHIN, 1988) é verificado que o modelo numérico apresenta um comportamento muito mais rígido que os dados experimentais obtidos. Essa diferença se deve em parte ao fato que essa viga não possui armadura em sua alma, assim as relações constitutivas propostas por (VECCHIO, F. J., AND COLLINS, 1986) não fornecem bons resultados para elementos somente de concreto, o que ocorre em boa parte da viga, já que essa só tem armadura longitudinal inferior. Outro fato a ser considerado é que diferentemente do ocorrido na viga de (LEONHARDT; WALTHER, 1966) a resistência residual de tração do concreto no modelo numérico obteve um desempenho bem melhor que o experimental. Dessa forma o modelo numérico obteve uma carga última bem maior com deslocamento bem menor que o experimental.

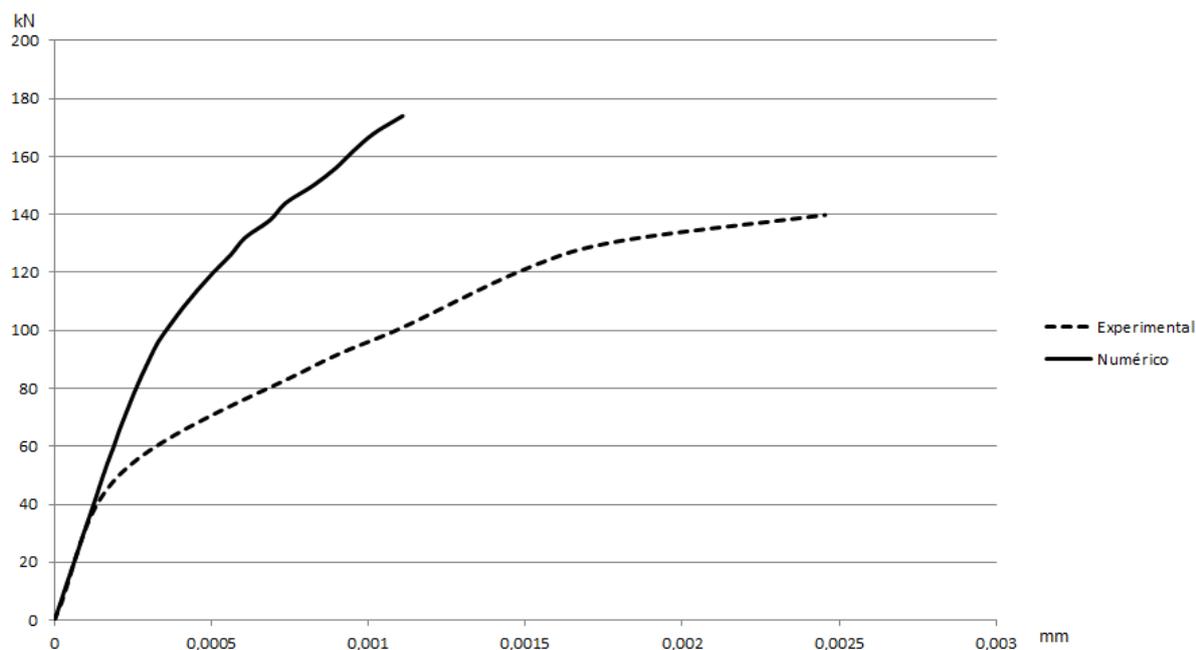


Figura 9 - Carga x Deslocamento viga (SHIN, 1988)

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou a implementação de um programa em código Matlab de Elementos Finitos Não Linear onde foi utilizado o método homogeneizado ou “smeared” para discretização de estruturas de concreto armado e para as relações constitutivas do concreto foi utilizado o Smeared Crack Model ou modelo de fissuras distribuídas com uso do Rotation Crack Model ou Modelo de fissuras rotativa, mais especificamente a Teoria do Campo Modificado de Compressão para modelagem de Vigas Paredes de concreto.

Foram modeladas duas vigas ensaiadas por (LEONHARDT; WALTHER, 1966) e (SHIN, 1988) para avaliação do método implementado. O uso do método homogeneizado ou “smeared” no Método de Elementos Finitos Não Linear apresentou se como uma boa ferramenta de análise para estruturas de concreto armado devido sua simplicidade na discretização dos elementos de concreto e aço.

As discrepâncias ocorridas entre os resultados numérico e experimentais ressaltam que o MCFT apresenta uma boa acurácia para estruturas com armadura em todo seu domínio, necessitando de uma otimização na equação que representa as relações constitutivas de tração pós-fissuração. Para modelos com regiões sem armadura o MCFT não apresenta bons resultados necessitando de novas equações para representar as relações constitutivas do concreto nessas regiões.

REFERENCIAS

BENTZ, E. C. **Sectional Analysis of Reinforced Concrete Members**. [s.l.] UNIVERSITY OF TORONTO, 2000.

COLLINS, M. P. TOWARDS A RATIONAL THEORY FOR RC MEMBERS IN SHEAR. **JOURNAL OF THE STRUCTURAL DIVISION, ASCE**, v. 104, 1978.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. [s.l.] John Wiley e Sons,

Ltd, 2007.

FOSTER, S. J.; MARTI, P.; ASCE, F. Cracked Membrane Model: Finite Element Implementation. v. 129, n. September, p. 1155–1163, 2003.

GUPTA, A. Membrane reinforcement in concrete shells: a review. **NUCLEAR ENGINEERING AND DESIGN**, v. 82, 1984.

GUPTA, A. K.; ASCE, M. COMBINED MEMBRANE AND FLEXURAL REINFORCEMENT IN PLATES AND SHELLS. **Journal of Structural Engineering**, v. 112, n. 3, p. 550–557, 1986.

KONG, F. et al. **Reinforced concrete deep beams**. [s.l.] Faculty of Engineering, Alexandria University, 2002. v. 114

KWAK, H.-G.; FILIPPOU, F. C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures. **Matrix**, v. 14, n. November, p. 717–725, 1990.

LEONHARDT, F.; WALTHER, R. DEEP BEAMS. **BULLETIN 178, DEUTSCHER AUSSCHUSS FUR STAHLBETON, BERLIN**, 1966.

MITCHELL, D.; COLLINS, M. P. DIAGONAL COMPRESSION FIELD THEORY. **JOURNAL, ACI**, v. 71, p. 396–408, 1974.

ROTS, J. G.; BLAAUWENDRAAD, J. Crack models for concrete: discrete or smeared? Fixed multi-directional or rotatin? **Heron**, v. 34, n. 1, p. 3–59, 1989.

SELBY, R. G.; VECCHIO, F. J. A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 24, n. 3, p. 460–470, 1997.

SHIN, H. M. **FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE MEMBERS SUBJECTED TO REVERSED CYCLIC IN-PLANE LOADING**. [s.l.] TOKYO UNIVERSITY, 1988.

SOUZA, R. A. DE. Desenvolvimento de uma ferramenta computacional para a análise de elementos de membrana em concreto estrutural. **Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseno en Ingenieria**, v. 29, n. 1, p. 38–51, 2013.

VECCHIO, F. J., AND COLLINS, M. P. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. **Journal Proceedings, ACI**, v. 83, n. 2, p. 219–231, 1986.

VECCHIO, B. F. J. Reinforced concrete membrane element formulations. v. 116, n. 3, p. 730–750, 1990.

VECCHIO, F. J. Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Columns. **Journal of the Korea Concrete Institute**, v. 16, n. 3, p. 397–406, 1989.

ZIENKIEWICZ, O. C. **THE FINITE ELEMENT METHOD IN ENGINEERING SCIENCE**. LONDON: MCGRAW-HILL, 1971.