



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS  
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING  
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

## FLAMBAGEM E COMPORTAMENTO PÓS-CRÍTICO DE COLUNAS LAMINADAS DE PERFIL ABERTO

**Savanna Cristina Medeiros D'Aguiar**

**Pedro Sanderson Bastos Barros**

**Luiz Antônio Taumaturgo Mororó**

**Evandro Parente Junior**

savanna\_cristina@hotmail.com

pedrosanderson88@gmail.com

luiztaumaturgo@gmail.com

evandro@ufc.br

Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará

Campus do Pici, Bloco 710, 60455-760, Fortaleza, Ceará, Brasil

**Resumo.** *A utilização dos materiais compósitos, difundida em estruturas aeronáuticas na forma de placas e cascas laminadas, tem se destacado também na indústria da construção civil, sobretudo na fabricação de vigas e colunas. Estes materiais possuem várias vantagens quando comparados aos materiais tradicionais, contudo, o comportamento mecânico destas estruturas é mais complexo, principalmente devido à ortotropia dos compósitos. O presente trabalho tem como objetivos a determinação da carga crítica, do modo de flambagem e do comportamento pós-crítico de colunas laminadas de perfil aberto, buscando-se verificar a influência da geometria e esquema de laminação no comportamento da coluna, bem como observar em quais casos a flambagem irá prevalecer sobre a resistência do material. O colapso das colunas foi avaliado segundo a abordagem baseada na Falha da Primeira Lâmina (FPF) e, para isto, alguns critérios de falha foram usados e comparados. O comportamento das colunas foi simulado utilizando elementos finitos de casca laminada. A validação do modelo de análise foi feita a partir de resultados experimentais e numéricos encontrados na literatura obtendo-se excelente concordância.*

**Palavras-Chaves:** *Colunas, Materiais Compósitos, Estabilidade, Método de Elementos Finitos.*

## 1 INTRODUÇÃO

São inúmeros os estudos que dão ênfase a utilização de novos materiais e processos em diversas áreas da engenharia, haja vista que, com a evolução tecnológica, as propriedades exigidas, muitas vezes, são superiores àquelas obtidas de maneira convencional. Neste contexto, os materiais compósitos, amplamente utilizados nas indústrias automotiva, naval, aeroespacial e civil, se destacam sobre os materiais tradicionais por possuírem vantagens, como alta rigidez, alta resistência e baixa densidade. Além disso, outras vantagens que motivam algumas aplicações incluem a transparência eletromagnética, resistência ao desgaste, melhoria na resistência à fadiga, isolamento térmico e acústico, além de baixa expansão térmica (Barbero, 2011).

Os materiais compósitos podem ser classificados em categorias que dependem do tipo, da geometria e da orientação do reforço (Daniel & Ishai, 2006). No presente trabalho serão tratados apenas os compósitos laminados reforçados por fibras, que, por sua vez, são formados a partir da combinação de fibras contínuas incorporadas em uma matriz polimérica. A laminação é utilizada de modo a melhorar a resposta mecânica da estrutura para determinado tipo de carregamento.

De acordo com Nagahama (2003), o desenvolvimento dos processos de fabricação dos materiais compostos de fibras, em especial a pultrusão, adequou a produção de perfis estruturais para as mais diversas aplicações. Os perfis pultrudados produzidos para aplicação em estruturas de edifícios e pontes (e.g. vigas, colunas e membros de treliça) possuem geometrias similares a dos materiais metálicos (Bank, 2006).

O estudo apresentado no presente trabalho irá abordar colunas de compósitos laminados reforçados por fibras, uma vez que estas, assim como vigas, têm sido usadas em uma variedade de estruturas, tais como edifícios, galpões de armazenamento e superestruturas de pontes (Barbero & Devivo, 1999). Além do mais, existem diversos problemas relacionados à sua utilização que ainda precisam ser elucidados, o que justifica a generalidade de pesquisas acerca do comportamento destas estruturas.

As colunas de material compósito geralmente são estruturas de paredes finas e a flambagem é uma consideração importante no projeto (Barbero et al., 2000). No que tange a análise de flambagem de placas e colunas, numerosos trabalhos de investigação podem ser encontrados na literatura, tais como Barbero & Tomblin (1994), Pecce & Cosenza (2000), Mottram (2004), Cardoso (2014), dentre outros.

Nos últimos anos, em vários trabalhos acerca de materiais compósitos têm sido realizadas comparações entre resultados experimentais e os obtidos com base em aproximações numéricas a partir do Método de Elementos Finitos, com a utilização de *softwares* que são capazes de simular o comportamento destas estruturas (Debski et al, 2013a, 2013b; Donadon et al. 2008).

Além disso, outra vertente de estudo referente a materiais compósitos está na consideração da ruptura do material a partir da aplicação de critérios de falha. Análises mais sofisticadas considerando a falha progressiva do material são utilizadas em diversos trabalhos (Sleight, 1999; Lanzi, 2004; Degenhardt et al., 2008; Lopez et al., 2009).

Como é possível observar, os problemas envolvendo a análise das propriedades e previsão do comportamento mecânico, estabilidade e avaliação do processo de falha de colunas de material compósito reforçado por fibra, vem sendo intensamente estudados.

Deste modo, no presente trabalho será estudado o comportamento de uma coluna de uma seção aberta do tipo C, sendo esta modelada com elementos finitos de casca no *software* comercial ABAQUS (Simulia, 2012). Será realizado um estudo da influência do esquema de laminação e da espessura do perfil na capacidade de carga e no comportamento pós-crítico da coluna, considerando também uma abordagem de colapso do material baseado na Falha da Primeira Lâmina (*First Ply Failure* - FPF) utilizando os critérios da Máxima Tensão (Daniel & Ishai, 2006), de Hashin (1980) e Tsai-Wu (Tsai & Wu, 1971).

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na seção 2, o comportamento mecânico de um laminado será descrito considerando o modelo macromecânico, e a teoria de Reissner-Mindlin será apresentada. Na seção 3, será realizada uma abordagem geral acerca da teoria referente aos fenômenos de instabilidade de perfis com ênfase na flambagem local. Na seção 4, uma breve revisão sobre os critérios utilizados em projetos para prever as falhas em compósitos laminado será apresentada. Na seção 5, serão apresentadas as análises numéricas realizadas e os resultados obtidos serão discutidos e, por fim, na seção 6, serão feitas as considerações finais do estudo.

## 2 RELAÇÃO CONSTITUTIVA DO MATERIAL

### 2.1 Modelo Macromecânico

No modelo macromecânico, as relações tensão-deformação da lâmina são constituídas considerando-a como material homogêneo e são mais complexas do que para os materiais isotrópicos. Ainda assim, no caso mais geral, as componentes de tensão e deformação podem ser representadas pela lei de Hooke generalizada para materiais ortotrópicos. Se a espessura da lâmina é muito fina, admite-se um Estado Plano de tensão ( $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$ ), sendo assim, tem-se as relações entre as deformações ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) e tensões ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) no sistema material (Reddy, 2004):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (1)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_1$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  são os vetores das tensões e deformações, respectivamente, e  $\mathbf{Q}_m$  é a matriz de rigidez de membrana no sistema local da lâmina e seus termos são dados por:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2)$$

Por conta da laminação, os eixos principais de cada lâmina (1,2) não coincidem com o sistema de eixos do laminado ( $x, y$ ), como mostrado na Figura 1. Desta forma, é necessário realizar transformações nas componentes de tensão e deformação para se obter os esforços na seção (Daniel & Ishai, 2006). De acordo com Cook et al. (2002), as deformações e as tensões podem ser transformadas através das seguintes relações:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_m^T \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (4)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  são os vetores das tensões e deformações no sistema do laminado e a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  é dada por (Reddy, 2004):

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

Aplicando as Eqs. (1) e (3) na Eq. (4), tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_m^T \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{T}_m^T \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{T}_m^T \mathbf{Q}_m \mathbf{T}_m \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_m = \mathbf{T}_m^T \mathbf{Q}_m \mathbf{T}_m \quad (6)$$

onde  $\bar{\mathbf{Q}}_m$  é a matriz de rigidez da parcela de membrana do laminado.

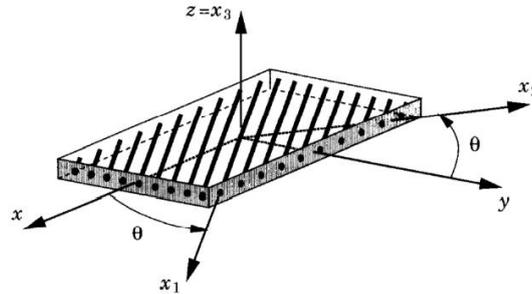


Figura 1 – Sistemas de coordenadas (Reddy, 2004).

À medida que a espessura do laminado vai aumentando, torna-se necessário captar o efeito do cisalhamento transversal. Assim, as componentes de deformação  $\gamma_{13}$  e  $\gamma_{23}$  devem ser consideradas. As tensões de cisalhamento estão relacionadas às deformações no sistema local pela matriz  $\mathbf{Q}_s$ :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma}_1 \quad (7)$$

sendo  $Q_{44} = G_{13}$  e  $Q_{55} = G_{23}$ .

Pela Teoria da Elasticidade, obtém-se uma matriz  $\mathbf{T}_s$  que relaciona as deformações de cisalhamento nos sistemas local e global:

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \mathbf{T}_s^T \boldsymbol{\gamma} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}_s^T \boldsymbol{\tau}_1 \quad (9)$$

sendo

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

Pode-se mostrar que, de modo semelhante à matriz de rigidez de membrana no sistema do laminado, a transformação das tensões de cisalhamento do sistema local para o global é realizada através de:

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{Q}}_s \boldsymbol{\gamma} \Rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_s = \mathbf{T}_s^T \mathbf{Q}_s \mathbf{T}_s \quad (11)$$

Finalmente, pode-se reorganizar todas as componentes de tensão associadas ao modelo supracitado da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\tau} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{Q}}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{Q}}_s \end{bmatrix} \quad (12)$$

onde  $\bar{\mathbf{Q}}$  é chamada matriz de rigidez transformada e ela transforma as deformações em tensões no sistema global. Os coeficientes  $\bar{Q}_{ij}$  são calculados conforme as operações matriciais apresentadas anteriormente.

## 2.2 Teoria de Reissner-Mindlin

A hipótese básica da Teoria de Mindlin é que uma reta normal ao plano médio da placa não necessariamente permanecerá normal ao plano médio da placa após a deformação, como mostrado na Figura 2.

Deste modo, pode-se constatar que os deslocamentos em qualquer ponto da placa são dados por:

$$u_x(x, y, z) = u(x, y) + z\theta_y \quad u_y(x, y, z) = v(x, y) - z\theta_x \quad u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (13)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são os deslocamentos no plano  $x$ ,  $y$  e  $z$  e  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são as rotações da reta normal em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

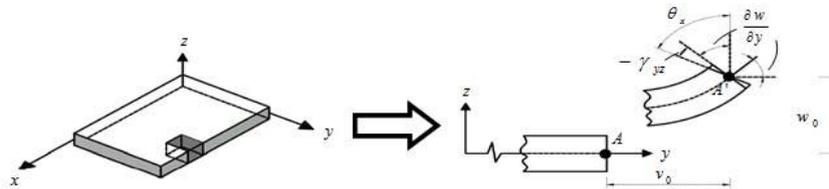


Figura 2 - Configuração indeformada e deformada de um trecho de uma placa.

Quando os deslocamentos são moderadamente grandes, começa a haver uma interação entre os efeitos de membrana e flexão, devido aos deslocamentos transversais. Para levar em conta este acoplamento, utilizam-se as deformações de Green-Lagrange, desprezando os termos não-lineares associados às componentes do deslocamento nas direções do plano da placa,  $u_x$  e  $u_y$  (Crisfield, 1991). Neste caso, as componentes de deformações em qualquer ponto da placa são dadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{,x}^2 \\ w_{,y}^2 \\ 2(w_{,x})(w_{,y}) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_0^m + \boldsymbol{\varepsilon}_L^m) + z\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\varepsilon}^m + z\boldsymbol{\kappa} \quad (14)$$

onde as duas primeiras parcelas da Eq. (14) correspondem às deformações de membrana ( $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ ) – sendo que uma ocorre devido ao comportamento linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_0^m$ ) e a outra por conta do efeito não-linear dos deslocamentos transversais ( $\boldsymbol{\varepsilon}_L^m$ ) – e a terceira parcela é associada à curvatura ( $\boldsymbol{\kappa}$ ) da placa.

As deformações devido ao cisalhamento transversal são dadas por:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,x} + \theta_y \\ w_{,y} - \theta_x \end{Bmatrix} \quad (15)$$

As forças e momentos resultantes são obtidos por integração das tensões ao longo da espessura da placa:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad \mathbf{V} = \begin{Bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (16)$$

É importante notar que as deformações são contínuas ao longo da espessura do laminado, o que não ocorre necessariamente com as componentes de tensão. Pode-se ainda escrever os esforços internos em termos das deformações generalizadas, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (17)$$

onde as componentes das sub-matrizes são dadas por:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k) \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^2 - z_k^2)}{2} \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^3 - z_k^3)}{3} \quad (18)$$

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^n f_s \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k)$$

Sendo **A**, **B**, **D** e **G** as matrizes de rigidez extensional, de acoplamento membrana-flexão, flexional e de cisalhamento, respectivamente, e  $f_s = 5/6$ , é o fator de correção das tensões de cisalhamento (Reddy, 2004).

Existem muitas configurações de laminados e, dependendo do tipo, alguns termos das sub-matrizes **A**, **B** ou **D** pode desaparecer. Por exemplo, a matriz de acoplamento membrana-flexão é nula ( $B_{ij} = 0$ ) para os laminados simétricos. Já para os laminados balanceados alguns termos da matriz que representa a rigidez de membrana do laminado são anulados ( $A_{16} = A_{26} = 0$ ), enquanto que os laminados balanceados simétricos tem  $B_{ij} = 0$ , mas  $D_{16} \neq 0$  e  $D_{26} \neq 0$ , e os laminados antissimétricos possuem  $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ , mas  $B_{16} \neq 0$  e  $B_{26} \neq 0$  (Barbero, 2011).

As expressões da Teoria Clássica da Laminação (TCL) podem ser obtidas fazendo  $\theta_y = -w_{,x}$  e  $\theta_x = w_{,y}$  na Eq. (15), que são resultado da hipótese das retas planas e perpendiculares ao plano da placa, assim permanecerem após a aplicação das cargas. Com isto, tem-se que  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ , nas Eqs. (16) e (17), respectivamente.

### 3 INSTABILIDADE DE PERFIS

A flambagem pode ser definida como uma perda de estabilidade devido a efeitos geométricos em vez da falha de material, entretanto, esta pode levar à insuficiência de material e ocasionar o colapso se as deformações que se seguirem não forem contidas (Barbero, 2008).

Os perfis com seção aberta e parede fina podem apresentar os modos de instabilidade de natureza global e local. Por conseguinte, o comportamento estrutural destes perfis, de acordo com sua geometria – forma e dimensões da seção transversal e comprimento – pode ser tanto influenciado por um dos dois tipos de modos de instabilidade, como por ambos (Pierin, 2005).

A flambagem global de colunas é um termo genérico usado pelos engenheiros e, normalmente compreende modos de flambagem quando o comprimento de meia onda é da mesma ordem de grandeza que o comprimento do elemento de comprimido e para a qual a seção permanece sem distorções (Cardoso, 2014).

De acordo com Tomblin e Barbero (1994), para uma coluna de material compósito, a teoria clássica de flambagem, apresentada por Chajes (1974), em combinação com os conceitos básicos da teoria clássica da laminação, descritos por Jones (1999), são aplicados a fim de determinar a rigidez de flexão e a carga crítica da coluna.

No presente texto será feita uma avaliação da flambagem local em colunas laminadas, deixando a análise de estabilidade global ou a possível interação entre as duas para trabalhos posteriores.

### 3.1 Flambagem local

Para Cardoso (2014), na determinação analítica da carga de flambagem local de colunas submetidas à compressão centrada, podem ser utilizados três abordagens distintas: i) análise de flambagem da seção completa, considerando as condições de continuidade apropriadas entre as placas adjacentes; ii) análise de flambagem das placas individuais considerando as restrições à rotação devido às placas adjacentes; iii) análise de flambagem das placas individuais sem considerar a interação entre os elementos.

Segundo Qiao et al. (2001), geralmente as análises de perfis de compósitos de polímeros reforçados com fibras são realizadas a partir de modelagem dos componentes individuais da estrutura, considerando a flexibilidade da ligação entre eles, sendo assim, neste tipo de simulação cada parte da seção transversal é modelada como uma placa e analisada independentemente.

Barbero e Tomblin (1994) apresentaram em seu estudo equações de projetos para colunas de compósito reforçadas com fibras com base na interação entre a flambagem local e global, observada durante testes experimentais. Pecce e Cosenza (2000), analisaram a flambagem local em perfis de compósitos de polímeros reforçados com fibras (*Fiber Reinforced Polymer* – FRP) e propuseram curvas de flambagem local como uma ferramenta de projeto. Os autores ainda introduziram um modelo numérico pelo Método de Elementos finitos e este foi validado com base em resultados experimentais.

Kollar (2003), por exemplo, desenvolveu expressões explícitas para a análise da flambagem local de colunas e vigas de materiais compósitos de polímeros reforçados com fibras, compreendendo seções transversais abertas e fechadas (I-, C-, Z- e L-). Os resultados obtidos, utilizando as fórmulas apresentadas pelo autor, foram comparados com resultados determinados a partir de análises analíticas, de testes experimentais e de cálculos utilizando o Método de Elementos Finitos.

Mottram (2004), a partir de ensaios experimentais e métodos teóricos, determinou a carga crítica em colunas pultrudadas sujeita a carregamento concêntrico e apresentou em seu trabalho nove equações retiradas de manuais de projetos e periódicos utilizados para prever a carga crítica para a instabilidade local que incluem a rigidez de rotação na ligação entre os elementos do perfil.

Qiao & Shan (2005) propuseram uma formulação explícita e compararam os resultados com os obtidos através de análises utilizando o Método dos Elementos Finitos, e concluíram que a formulação apresentada pode ser aplicada de forma eficaz na análise de flambagem

local de placas compósitas com apoio elástico ao longo dos bordos descarregados e pode ainda ser usada na previsão da resistência da flambagem local para seções de materiais compósitos de polímero reforçado por fibra.

De acordo com Cardoso (2014), as equações apresentadas por Kollar (2003) e Qiao e Shan (2005), apesar de muito precisas, necessitam de cálculos independentes para cada uma das placas da seção transversal e a determinação dos parâmetros específicos da seção, tais como os coeficientes de restrição elástica, tende a aumentar consideravelmente o esforço de cálculo.

Conforme Pierin (2005), com os avanços computacionais, em virtude, principalmente, do desenvolvimento do Método de Elementos Finitos, observou-se uma progressiva substituição dos métodos analíticos pelos métodos numéricos. O autor ainda destaca a utilização do Método das Faixas Finitas no estudo acerca do modo local da placa de seções com geometrias diversas.

## 4 FALHA DOS MATERIAIS COMPÓSITOS

Como definido anteriormente, os materiais compósitos são constituídos por dois componentes – fibra e matriz – cujas propriedades mecânicas são extremamente diferentes. Assim, pode-se dizer que a presença destes componentes, considerados homogêneos a nível macroscópico, é responsável pelo alto desempenho dos compósitos. Contudo, por conta destas particularidades esses materiais se tornam inerentemente anisotrópicos, caracterizados por diversos modos de falha (Pietropaoli, 2012).

A escolha de um critério de falha para compósitos é considerada complexa, visto que este deve representar de forma consistente os fenômenos físicos envolvidos e ser capaz de estabelecer uma superfície suave no espaço de tensões sem necessitar de muitos experimentos (Tita et al., 2002).

Muitas teorias de falha foram desenvolvidas para os materiais compósitos. Existem tanto teorias dependentes como independentes do modo em que a falha se manifesta no laminado e diversos estudos acerca da temática podem ser citados, como por exemplo, Dávila et al. (2005), Nali & Carrera (2012), Banat e Mania (2016), dentre outros.

### 4.1 Critério de Máxima Tensão

O Critério de Máxima Tensão compara cada componente de tensão com o valor de resistência máxima correspondente (Knight, 2006). Ou seja, este critério prediz a falha de uma lâmina quando pelo menos uma tensão em coordenadas materiais excede o valor correspondente de resistência, que é obtido experimentalmente (Barbero, 2011).

De acordo com Jones (1999), se qualquer uma das condições, mostradas abaixo, não for satisfeita, então supõe-se a falha do material, visto que o mecanismo de falha está relacionado com as resistências  $X_t$ ,  $X_c$ ,  $Y_t$ ,  $Y_c$ , ou  $S$ , respectivamente.

$$\sigma_1 \begin{cases} < X_t \\ > X_c \end{cases} \quad \sigma_2 \begin{cases} < Y_t \\ > Y_c \end{cases} \quad |\tau_{12}| < S \quad (19)$$

## 4.2 Critério de Tsai-Wu

O critério de Tsai-Wu não possui uma base física, uma vez que foi formulado de modo a se ajustar aos resultados obtidos experimentalmente (Nali & Carrera, 2012). Este pode ser definido como um critério de falha interativo, em que todos os componentes de tensão são usados simultaneamente para determinar se ocorreu ou não uma falha material de um ponto (Knight, 2006). Sendo assim, de acordo com Tsai e Wu (1971), tem-se:

$$f(\sigma_k) = f_i \sigma_i + f_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (20)$$

com  $i, j, k = 1, \dots, 6$ .

Na forma expandida e para um estado plano de tensão, o Critério de Tsai-Wu, segundo Daniel & Ishai (2006), pode ser expresso como:

$$f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_6 \tau_6 + f_{11} \sigma_1^2 + f_{22} \sigma_2^2 + f_{66} \tau_6^2 + 2f_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2f_{16} \sigma_1 \tau_6 + 2f_{26} \sigma_2 \tau_6 = 1 \quad (21)$$

## 4.3 Critério de Hashin

O critério de Hashin pode ser descrito como uma combinação de quatro condições interativas e não-interativas, a fim de distinguir a falha da matriz e da fibra, causada por esforços de tração ou compressão (Nali & Carrera, 2012). Este critério foi proposto por Hashin & Rotem (1973), no entanto foi modificado posteriormente por Hashin (1980).

Nas expressões apresentadas na Tabela 1, os modos de falha incluídos no Critério de Hashin são descritos (Hashin, 1981; Knight, 2006; Pietropaoli, 2012).

**Tabela 1 – Modos de falha - Critério de Hashin.**

|  |   |
|--|---|
| Falha na matriz à tração<br>( $\sigma_{22} + \sigma_{33} \geq 0$ )     | $\left( \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{Y_t} \right)^2 + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_{12}^2} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{S_{23}^2} \geq 1$  |
| Falha da matriz à compressão<br>( $\sigma_{22} + \sigma_{33} \leq 0$ ) | $\frac{1}{Y_c} \left[ \left( \frac{Y_c}{2S_{23}} \right)^2 - 1 \right] (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{1}{4S_{23}^2} (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{S_{23}^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S_{23}^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) \geq 1$ |
| Falha da fibra à tração<br>( $\sigma_{11} > 0$ )                       | $\left( \frac{\sigma_{11}}{X_t} \right)^2 + \frac{1}{S_{12}^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) \geq 1$  |
| Falha da fibra à compressão<br>( $\sigma_{11} < 0$ )                   | $\left( \frac{ \sigma_{11} }{X_c} \right) \geq 1$   |
| Falha por cisalhamento fibra-matriz                                    | $\left( \frac{\sigma_{11}}{X_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1$   |

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

As colunas analisadas neste trabalho são perfis C de paredes finas estudadas anteriormente por Debski et al. (2013b). Estas colunas foram fabricadas com *Hexcel's HexPly M12* carbono-epóxi, cujas propriedades mecânicas são apresentadas na Tabela 2, sendo considerados três esquemas de laminação distintos: *L1* [0/-45/45/90]<sub>s</sub>, *L2* [0/90/0/90]<sub>s</sub> e *L3* [45/-45/90/0]<sub>s</sub>. A Figura 3 apresenta as dimensões do perfil, bem como a ilustração referente às orientações das fibras.

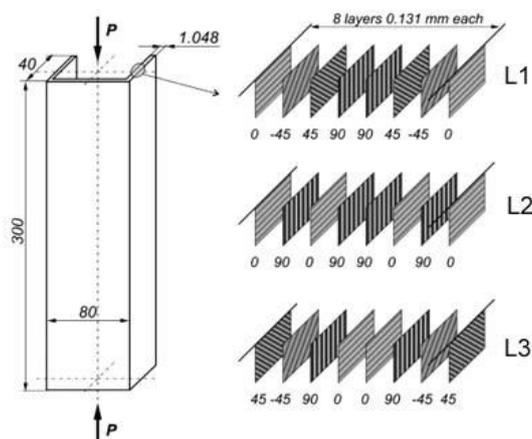


Figura 3 - Geometria da coluna e seqüência das camadas (Adaptado de Debski et al., 2013b).

Tabela 2 – Propriedades elásticas e mecânicas do laminado.

| $E_1$ (GPa) | $E_2$ (GPa) | $G_{12}$ (GPa) | $\nu_{12}$ | $X_t$ (MPa) | $Y_t$ (MPa) | $X_c$ (MPa) | $Y_c$ (MPa) | $S$ (MPa) |
|-------------|-------------|----------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------|
| 130,71      | 6,36        | 4,18           | 0,32       | 1867,2      | 25,97       | 1531        | 214         | 100,15    |

Foram realizadas análises numéricas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando o *software* ABAQUS (Simulia, 2012), visando avaliar a estabilidade e resistência de colunas de material compósito laminadas reforçadas com fibras. Em todas as análises foram utilizados 480 elementos quadráticos de casca baseados na teoria de Reissner-Mindlin com oito nós e integração reduzida (S8R).

### 5.1 Validação dos modelos

Inicialmente, foram propostos dois modelos distintos, cujas condições de contorno adotadas estão apresentadas na Figura 4. No Modelo 1 aplica-se uma carga concentrada no centroide da seção e considera-se uma restrição adicional para que deslocamento axial seja constante no topo da coluna onde o carregamento é aplicado, visando representar as condições utilizadas em Debski et al. (2013b). No Modelo 2 aplica-se diretamente uma carga uniforme no topo da coluna.

Os resultados obtidos para as cargas críticas são apresentados na Tabela 3, juntamente com os valores obtidos experimentalmente e numericamente por Debski et al. (2013b). Verifica-se uma excelente concordância para todas as laminações, dado que a maior diferença percentual observada foi de aproximadamente 4,2% para as colunas com laminação *L1*, enquanto que as diferenças percentuais para as colunas com laminação *L2* e *L3* foram inferiores a 1%. Adicionalmente, estes resultados mostram a influência do esquema de

laminação sobre a carga crítica das colunas, com a carga da laminação *L3* sendo cerca de 90% maior que a da laminação *L2*.

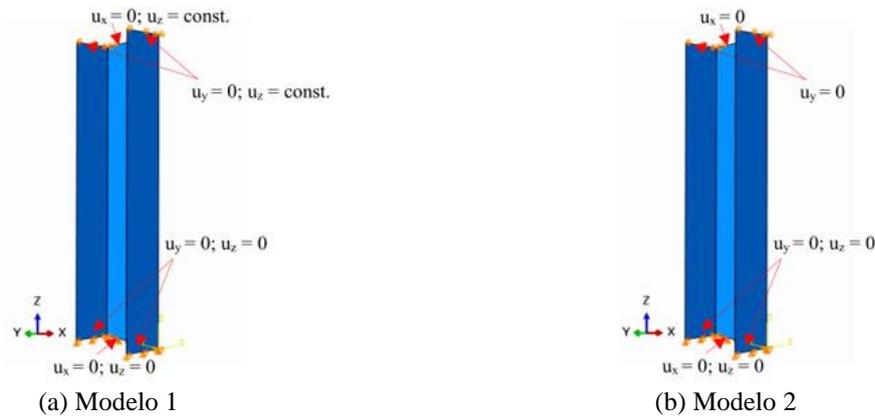


Figura 4 - Condições de contorno adotadas.

Tabela 3 – Cargas Críticas para diferentes laminações.

| Esquema de Laminação | Cargas Críticas (N)  |           |           |          | Diferenças Percentuais (%) |        |        |        |
|----------------------|----------------------|-----------|-----------|----------|----------------------------|--------|--------|--------|
|                      | Debski et al. (2013) |           | MEF (S8R) |          | A e C                      | B e C  | A e D  | B e D  |
|                      | Experimental         | MEF (S4R) | Modelo 1  | Modelo 2 |                            |        |        |        |
|                      | A                    | B         | C         | D        |                            |        |        |        |
| L1                   | 2848,3               | 2977,2    | 2972,5    | 2971,8   | 4,178                      | -0,158 | 4,157  | -0,182 |
| L2                   | 2274,8               | 2282,3    | 2274,9    | 2274,7   | 0,004                      | -0,325 | -0,004 | -0,334 |
| L3                   | 4369,7               | 4402,4    | 4405,9    | 4401,12  | 0,822                      | 0,080  | 0,714  | -0,029 |

A Figura 5 ilustra os primeiros modos de flambagem para os três tipos de laminações avaliadas. É possível observar que como as cargas críticas para as laminações *L1* e *L2* são relativamente próximas, seus modos de flambagem são semelhantes, enquanto que o modo de flambagem para a coluna *L3* apresenta um comportamento distinto das demais.

Os resultados mostram que as diferenças entre o Modelo 1 e o Modelo 2 são desprezíveis, sendo o Modelo 1 um pouco mais rígido devido a consideração da restrição  $u_z$  constante. Em virtude da pequena diferença, apenas o Modelo 1 será considerado nas análises seguintes.

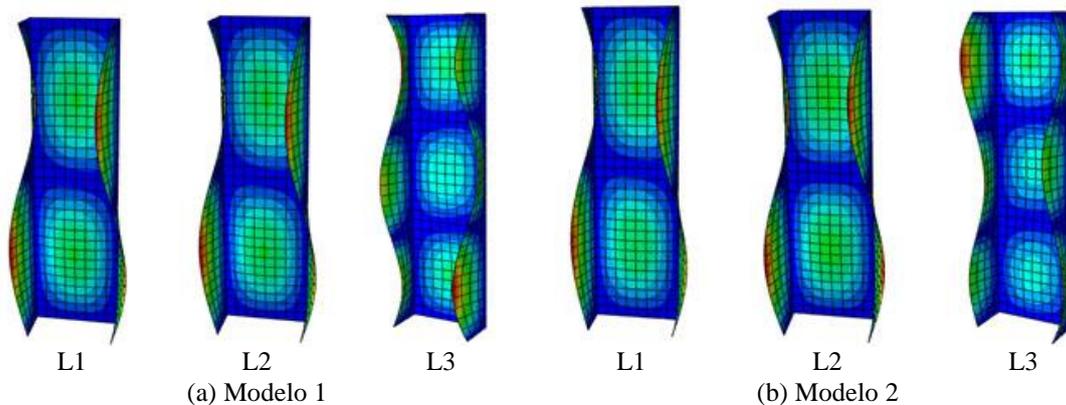


Figura 5 - Modos de flambagem das colunas analisadas.

Na análise não-linear das colunas a geometria imperfeita da estrutura pode ser modelada como o resultado de uma combinação linear dos seus modos de flambagem ( $\varphi_i$ ):

$$\mathbf{x}_{imp} = \mathbf{x}_{perf} + \sum_{i=1}^n \Delta_i \varphi_i \quad (22)$$

onde  $\mathbf{x}_{imp}$  e  $\mathbf{x}_{perf}$  são as coordenadas dos pontos que definem a geometria na configuração imperfeita e perfeita, respectivamente, e  $\Delta_i$  é a amplitude da imperfeição relacionada ao modo de flambagem  $\varphi_i$ , uma vez que estes são normalizados de forma que sua maior componente seja unitária.

No estudo realizado por Debski et al. (2013b) apenas a influência do primeiro modo de flambagem no comportamento pós-crítico foi considerado e introduziu-se imperfeições geométricas com amplitude igual a 10% da espessura da parede da coluna. Assim, no presente trabalho foi adotada inicialmente uma imperfeição geométrica com esta magnitude e, posteriormente, investigou-se o efeito das imperfeições iniciais variando-se a magnitude destas, mas mantendo a forma constante.

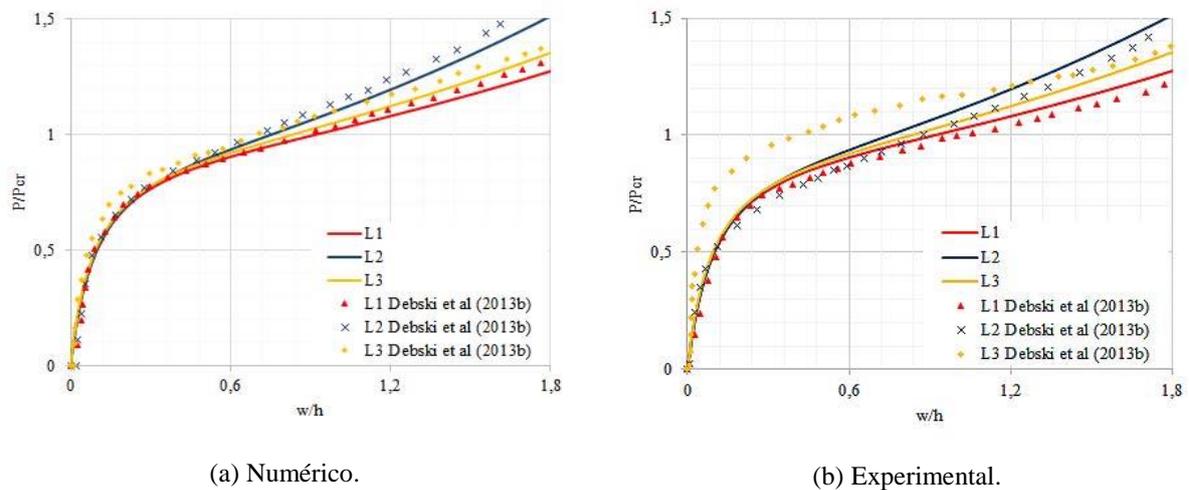


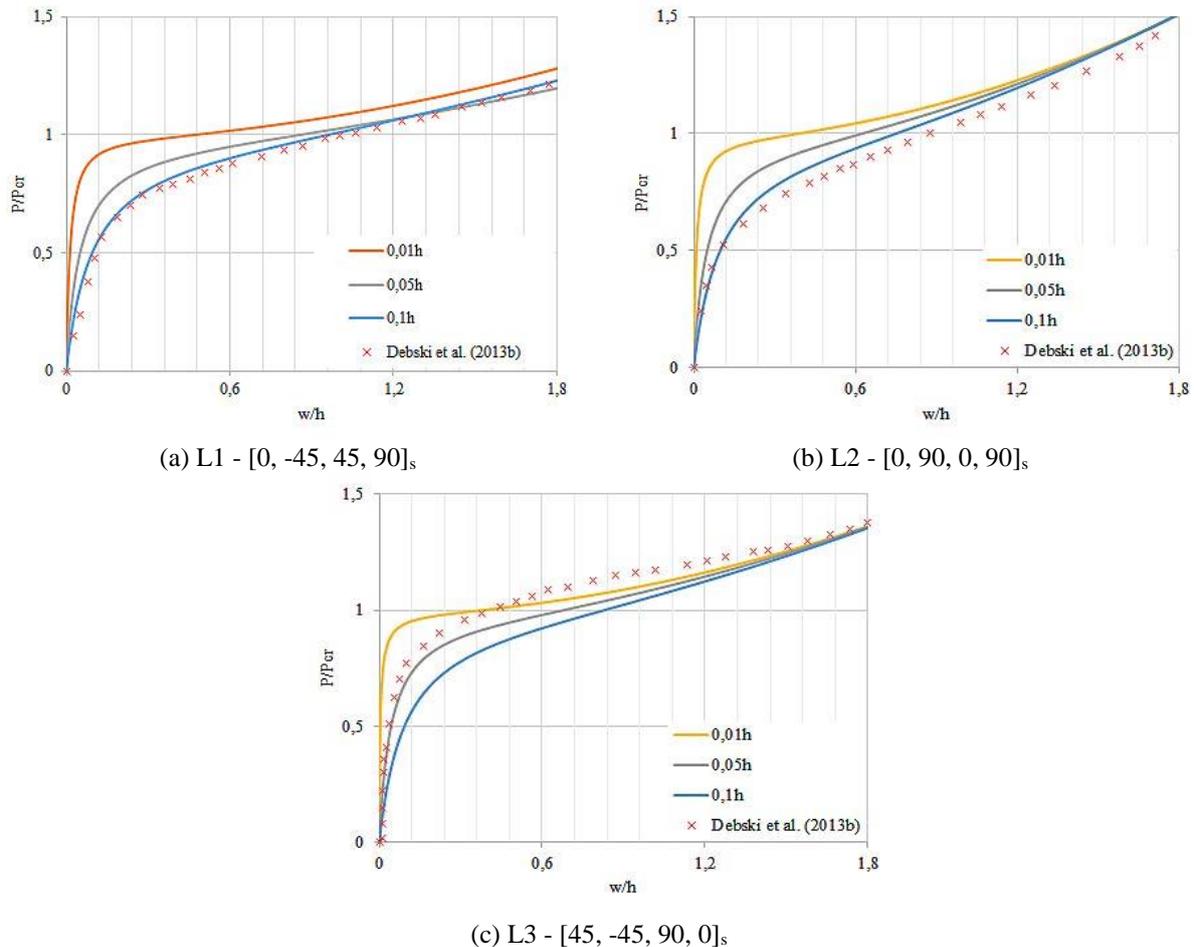
Figura 6 - Comparação caminhos de equilíbrio pós-críticos para as colunas analisadas.

A Figura 6 mostra as curvas parametrizadas ( $P/P_{cr} \times w/h$ ) obtidas numericamente para os três tipos de laminações em comparação com as curvas experimentais e numéricas tomadas como referência. É interessante notar que os resultados obtidos estão em boa concordância com Debski et al. (2013b). Percebe-se que o modelo proposto no presente trabalho é menos rígido que o dos autores supracitados. Uma possível justificativa para esta divergência seria que no trabalho tomado como referência utilizou-se elementos lineares de casca com quatro nós e integração reduzida (S4R), enquanto no presente trabalho foram utilizados elementos quadráticos (S8R).

Nota-se também que a coluna com laminação *cross-ply* (L2) apresenta maior ganho de rigidez, em comparação com as *angle-ply* (L1 e L3). Uma possível explicação para a menor rigidez das colunas L2 e L3 se deve à presença dos termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  na matriz de rigidez à flexão  $\mathbf{D}$ .

Pode ser constatada também uma boa concordância entre o caminho pós-crítico traçado com base nos resultados obtidos em comparação aos determinados experimentalmente por Debski et al. (2013b) (Figura 6b). Apenas para a coluna L3 observa-se uma diferença maior,

tornando-se interessante realizar um estudo de sensibilidade às imperfeições, visto que a imperfeição das colunas reais é desconhecida.



**Figura 7 - Efeito das imperfeições iniciais no comportamento das colunas analisadas.**

A Figura 7 mostra os resultados obtidos no estudo da sensibilidade às imperfeições. Em todos os casos, as colunas apresentam um comportamento de bifurcação simétrica estável, com pequena sensibilidade às imperfeições. Este comportamento é típico de placas, uma vez que a flambagem destas colunas pode ser caracterizada como local.

É interessante notar que para as colunas *L1* e *L2*, a imperfeição geométrica introduzida de 10% da espessura da parede da coluna representa de forma satisfatória o comportamento das colunas reais ensaiadas. Contudo, pode-se verificar que para a coluna *L3* a amplitude que melhor representaria a coluna real seria igual 5% da espessura da parede da coluna. Verifica-se assim que a metodologia adotada para consideração das imperfeições geométricas foi adequada ao problema.

## 5.2 Influência da espessura

A seguir foram realizadas análises variando a espessura, ou seja, o número de camadas, das colunas *L1* e *L2* de forma a avaliar sua influência no comportamento e resistência destas colunas. A Tabela 4 apresenta os resultados para cargas críticas das colunas e, como pode ser visto, à medida que se aumentou a espessura, a carga crítica destas aumentou de forma significativa, o que por sua vez era esperado, pois a esbeltez das colunas foi reduzida consideravelmente.

Tabela 4 – Cargas Críticas para colunas com diferentes espessuras.

| Número de camadas | Laminação                                  | Espessura (mm) | Carga Crítica (N) |
|-------------------|--|----------------|-------------------|
| 8                 | [0/-45/45/90] <sub>s</sub>                 | 1,048          | 2972,5            |
| 16                | [(0/-45/45/90) <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> | 2,096          | 27828,0           |
| 24                | [(0/-45/45/90) <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> | 3,133          | 92641,0           |
| 32                | [(0/-45/45/90) <sub>4</sub> ] <sub>s</sub> | 4,192          | 210980,0          |
| 8                 | [0/90/0/90] <sub>s</sub>                   | 1,048          | 2274,5            |
| 16                | [(0/90/0/90) <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>   | 2,096          | 18703,0           |
| 24                | [(0/90/0/90) <sub>3</sub> ] <sub>s</sub>   | 3,133          | 61930,0           |
| 32                | [(0/90/0/90) <sub>4</sub> ] <sub>s</sub>   | 4,192          | 143892,0          |

Na Figura 8 estão ilustrados os modos de flambagem para as colunas avaliadas. É possível observar que para as colunas *L2* (*cross-ply*) ao se aumentar o número de lâminas para  $n = 16$  o modo de flambagem foi alterado, contudo, para as colunas *L1* (*angle-ply*), o modo manteve-se igual, sofrendo alterações somente quando se aumentou o número de lâminas para  $n = 24$ , o que por sua vez pode ser explicado devido ao efeito dos acoplamentos do esquema de laminação.

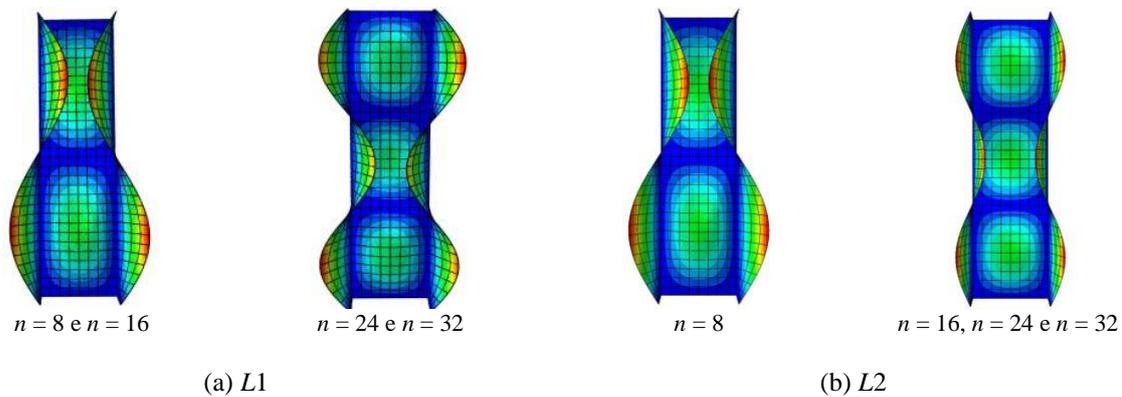


Figura 8 - Modos de flambagem das colunas com n lâminas.

Como visto anteriormente verificou-se que para a análise não-linear das colunas *L1* e *L2* a introdução de imperfeições geométricas com amplitude igual a 10 % da espessura da parede da coluna representam satisfatoriamente a coluna real ensaiada por Debski et al. (2013b). Assim, optou-se por adotar esta amplitude para as análises seguintes, mantendo-se a forma do primeiro modo de flambagem. Deste modo, a Figura 9 apresenta a influência da espessura no comportamento pós-flambagem das colunas.

Nota-se que nas colunas do tipo *L1*, por conta dos modos de flambagem iguais quando  $n = 16, 24$  e  $32$ , o comportamento pós-crítico destas colunas são semelhantes, contudo, observa-se um acréscimo na rigidez da estrutura a medida que se aumenta a espessura.

Visando verificar a influência da espessura na resistência das colunas, foram realizadas análises considerando a falha da primeira lâmina (FPF) para os critérios da Máxima Tensão, Tsai-Wu e Hashin. A Tabela 5 apresenta a comparação da carga referente a FPF em relação a carga crítica de flambagem ( $P_{cr}$ ) adotando os critérios de falha mencionados e na Figura 9 os pontos de falha nas curvas de equilíbrio.

Dos resultados obtidos é importante ressaltar que para um mesmo número de camadas não houve diferença significativa entre os resultados para os critérios de falha avaliados. Além disso, observa-se que para a coluna *L1*, ao dobrar o número de camadas para  $n = 16$ , por exemplo, a resistência pós-crítica diminuiu aproximadamente 40 %, enquanto que para a *L2* a

redução foi em torno de 30%. Logo, pode-se constatar que, como esperado, com o aumento da espessura da coluna, a consideração da falha do material ganha importância.

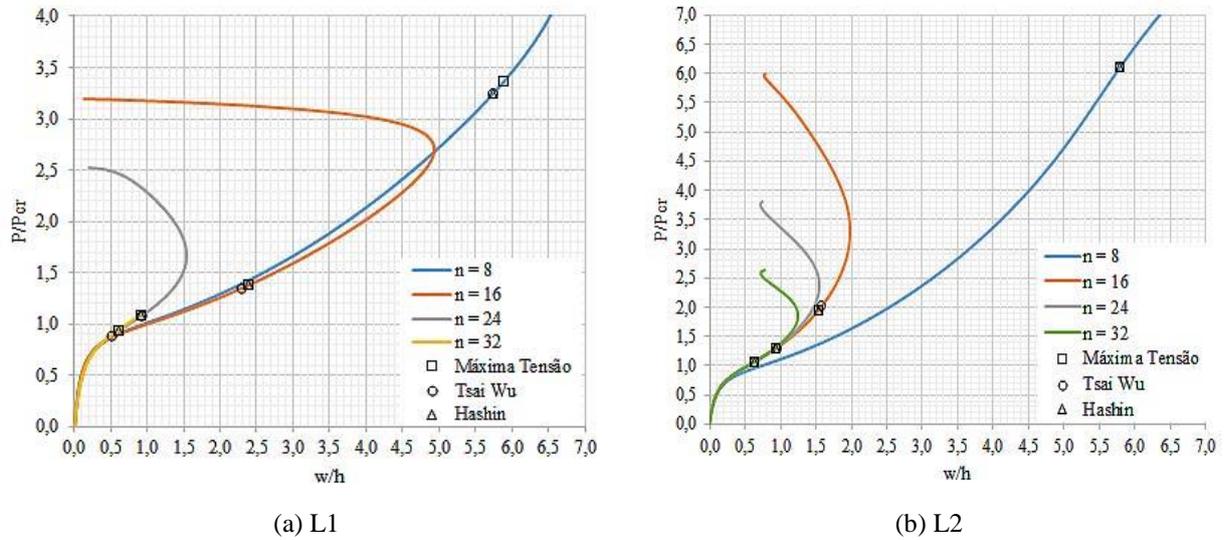


Figura 9 - Influência da espessura no comportamento pós-flambagem das colunas e identificação da carga referente a Falha da Primeira Lâmina.

Tabela 5 – Comparação do P<sub>FPF</sub> em relação a P<sub>cr</sub> para diferentes critérios de falha.

| Número de camadas | Laminação                                  | P <sub>FPF</sub> /P <sub>cr</sub> |         |        |
|-------------------|--|-----------------------------------|---------|--------|
|                   |  | Máxima Tensão                     | Tsai Wu | Hashin |
| 8                 | [0/-45/45/90] <sub>s</sub>                 | 3,36                              | 3,24    | 3,24   |
| 16                | [(0/-45/45/90) <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> | 1,38                              | 1,35    | 1,38   |
| 24                | [(0/-45/45/90) <sub>3</sub> ] <sub>s</sub> | 1,08                              | 1,05    | 1,08   |
| 32                | [(0/-45/45/90) <sub>4</sub> ] <sub>s</sub> | 0,94                              | 0,89    | 0,94   |
| 8                 | [0/90/0/90] <sub>s</sub>                   | 6,12                              | 6,11    | 6,11   |
| 16                | [(0/90/0/90) <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>   | 1,95                              | 2,02    | 1,95   |
| 24                | [(0/90/0/90) <sub>3</sub> ] <sub>s</sub>   | 1,30                              | 1,31    | 1,30   |
| 32                | [(0/90/0/90) <sub>4</sub> ] <sub>s</sub>   | 1,07                              | 1,07    | 1,07   |

Como mostrado na Tabela 5, a falha do material passou a ser preponderante sobre a instabilidade da estrutura devido a flambagem somente para a coluna L1 com  $n = 32$ , mostrando a influência do esquema de laminação no que diz respeito ao comportamento das colunas analisadas.

Com base nas análises realizadas pode-se verificar ainda que as falhas para todas as colunas analisadas normalmente ocorrem nas camadas mais externas, onde se encontram fibras na direção da aplicação da carga. Por conseguinte, em todas as análises, percebe-se que o colapso da primeira lâmina ocorreu na alma da coluna, como ilustrado na Figura 10 e na Figura 11, que apresentam respectivamente, os modos de falha do material para as colunas L1 e L2 com diferentes espessuras. É interessante notar também que, como o critério de Hashin é dependente do modo de falha, foi possível verificar que a falha da primeira lâmina em todas as colunas avaliadas ocorreu devido à tração na matriz.

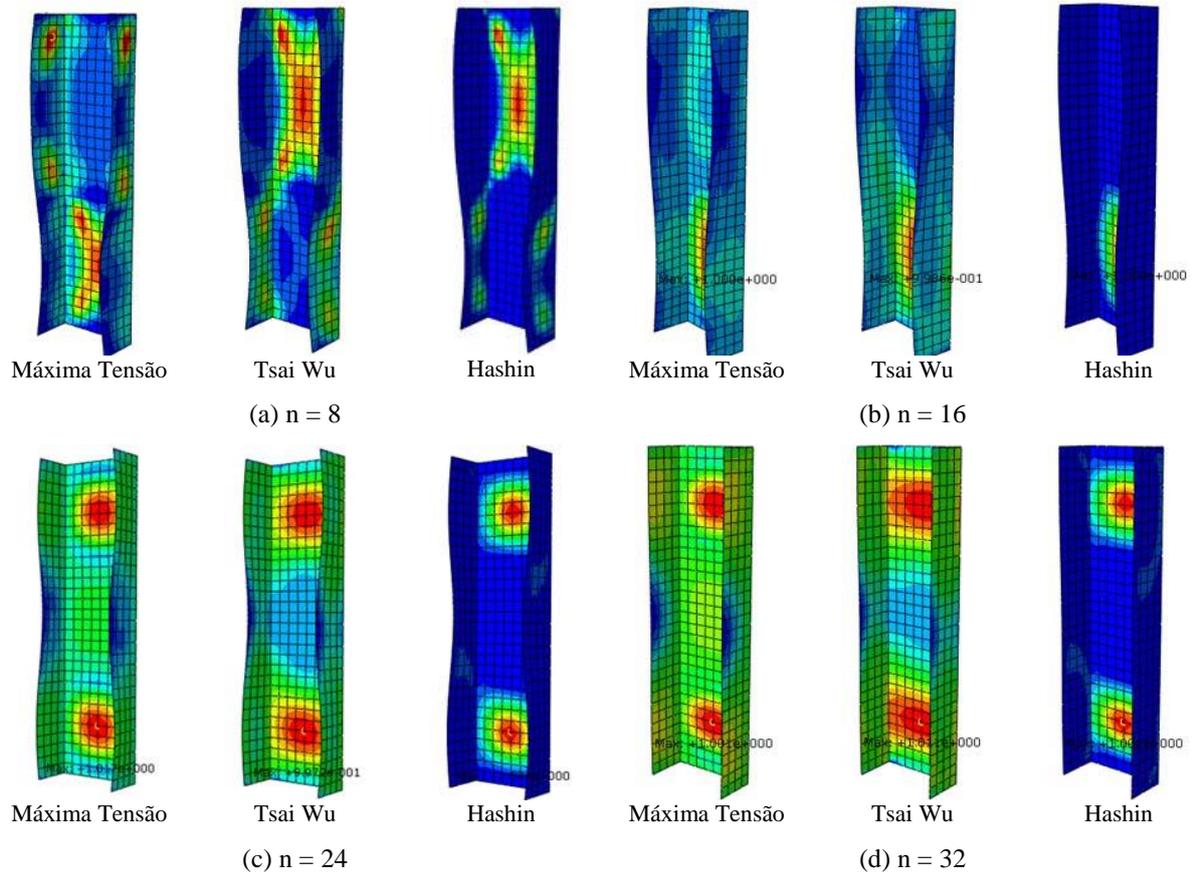


Figura 10 - Modo de falha do material para diferentes critérios de falha – L1.

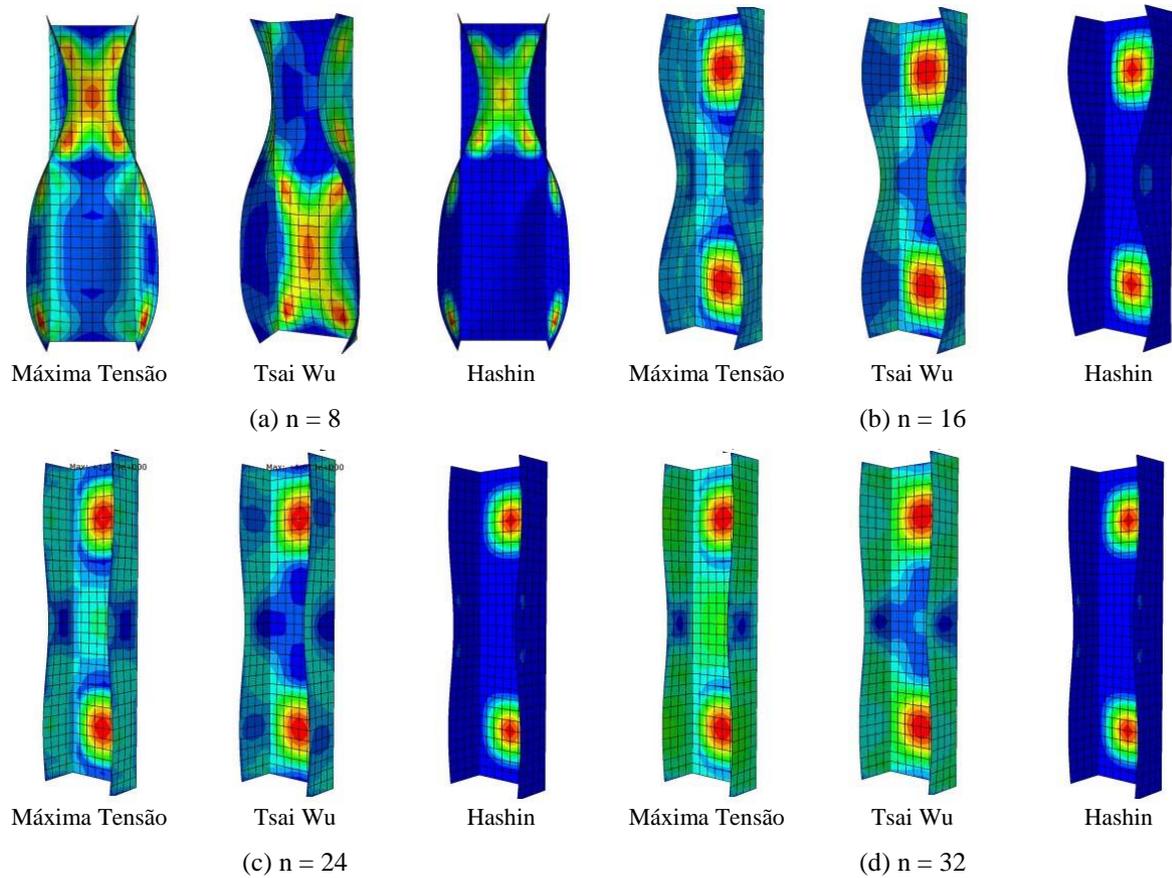


Figura 11 - Modo de falha do material para diferentes critérios de falha – L2.

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram apresentados modelos numéricos visando avaliar o comportamento de colunas laminadas de perfil aberto. Inicialmente os modelos propostos foram validados com base em resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura, obtendo-se excelente concordância no que se refere a determinação da carga crítica e ao comportamento pós-crítico.

Foi possível constatar a influência do esquema de laminação na resistência a flambagem das colunas, tendo em vista a obtenção de um aumento em torno de 90% na carga crítica da coluna ao se adotar um esquema de laminação diferente. Por outro lado, para todas as colunas analisadas, observou-se um comportamento pós-crítico estável, o que demonstra pouca influência do esquema de laminação nesse aspecto, pelo menos em colunas dominadas pela flambagem local.

Além disso, foram realizadas análises variando a espessura das colunas com laminações *cross-ply* e *angle-ply*, visando avaliar sua influência na capacidade de carga destas. Com base nisso, pôde-se concluir que o aumento da espessura teve influência significativa não só no valor da carga crítica, mas também no modo de flambagem das colunas laminadas. Adicionalmente, verificou-se também que o aumento da espessura influenciou significativamente o modo de falha, dado que com o aumento desta, a resistência material tende a ser preponderante sobre a resistência à flambagem.

## AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem ao suporte financeiro da FUNCAP e do CNPq.

## REFERÊNCIAS

- Banat, D.; Mania, R. J., 2016. Comparison of failure criteria application for FML column buckling strength analysis. *Composite Structures*, vol. 140, pp. 806-815.
- Bank, L. C., 2006, *Composite for construction: Structural design with FRP materials*. John Wiley & Sons, INC.
- Barbero, E. J., 2011. *Introduction to composite materials design*. 2. ed. Boca Raton: CRC Press.
- Barbero, E. J., 2008. *Finite Element Analysis of Composite Materials*. Boca Raton: CRC Press.
- Barbero, E. J; Dede, E. K.; Jones, S., 2000. Experimental verification of buckling-mode interaction intermediate-length composite columns. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 3919-3934.
- Barbero, E. J; Devivo, L., 1999. Beam-Column design equations for wide-flange pultruded structural shapes. *Journal of Composite for Construction*, vol. 3, pp. 185-191.
- Barbero, E. J; Tomblin, J., 1994. A phenomenological design equation for FRP columns with interaction between local and global buckling. *Thin-Walled Structures*, vol. 18, pp. 117-131.
- Cardoso, D. C. T., 2014. *Compressive strength of pultruded glass-fiber reinforced polymer (GFRP) columns*. Tese, Universidade Federal do Rio de Janeiro/Rio de Janeiro.
- Chajes, A., 1974. *Principles of Structural Stability*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey.

- Cook, R.; Malkus, D.; Plesha, M.; Witt, R. J., 2002. *Concepts and applications of finite element analysis*. 4. ed. John Wiley & Sons.
- Crisfield, M. A. 1991. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, vol. 1, John Wiley and Sons.
- Daniel, I. M.; Ishai, O., 2006. *Engineering mechanics of composite materials*. 2. Ed. New York: Oxford University Press.
- Dávila, C. G.; Camanho, P. P.; Rose, C. A., 2005. Failure criteria for FRP laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 39, pp. 323-345.
- Debski, H.; Kubiak, T.; Teter, A., 2013a. Buckling and postbuckling behavior of thin-walled composite channel section column. *Composite Structures*. vol. 100, pp. 195-204.
- Debski, H.; Kubiak, T.; Teter, A., 2013b. Experimental investigation of channel-section composite profiles behavior with various sequences of plies subjected to static compression. *Thin-Walled Structures*, vol. 71, pp. 147-154.
- Degenhardt, R., Kling, A., Rohwer, K., Orifici, A. C., Thomson, R. S., 2008. Design and analysis of stiffened composite panels including post-buckling and collapse, *Computers & Structures*, vol. 86, pp. 919-929.
- Donadon, M. V., Iannucci, L., Falzon, B. G., Hodgkinson, J. M., Almeida, S. F. M., 2008. A progressive failure model for composite laminates subject to low velocity impact damage. *Computers & Structures*, vol. 86, pp. 1232-1252.
- Hashin, Z.; Rotem, A., 1973. A Fatigue failure criterion for fiber reinforced materials. *Journal of Composite Materials*, vol. 7, pp. 448-464.
- Hashin, Z., 1980. Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 47, pp. 329-334.
- Hashin, Z., 1981, Fatigue failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, pp. 846-852.
- Jones, R. M., 1999. *Mechanics of composite materials*. 2. Ed. Philadelphia: Taylor & Francis.
- Knight, N. F., 2006. User-defined material model for progressive failure analysis. *Relatório Técnico*. National Aeronautics and Space Administration - NASA, CR-2006-214526.
- Lanzi, L., 2004. A numerical and experimental investigation on composite stiffened panels into post-buckling, *Thin-Walled Structures*, vol. 42, pp. 1645-1664.
- Lopez, R.H., Luersen, M.A., Cursi, E.S., 2009. Optimization of laminated composites considering different failure criteria, *Composites: Part B*, vol. 40, pp. 731-740.
- Kollar, L. P., 2003. Local buckling of fiber reinforced plastic composite structural members with open and closed cross sections. *Journal of Structural Engineering*, vol. 129(11), pp. 1503-1513.
- Mottram, J. T., 2004. Determination of critical load for flange buckling in concentrically loaded pultruded columns. *Composites Part B*, vol. 35, pp. 35-47.
- Nagahama, K. J., 2003 *Análise de estabilidade local em perfis de seção aberta em aço e em resina reforçada com fibra de vidro*. Tese, Universidade Federal do Rio de Janeiro/Rio de Janeiro.

- Nali, P.; Carrera, E., 2012. A numerical assessment on two-dimensional failure criteria for composite layered structures. *Composites: Part B*, vol. 43, pp. 280-289.
- Pecce, M.; Cosenza, E., 2000. Local buckling curves for the design of FRP profiles. *Thin-Walled Structures*, vol. 37, pp. 207-222.
- Pierin, I., 2005. *Estudo de estabilidade de perfis pultrudados de materiais PRFV*. Dissertação, Universidade Federal de Santa Catarina/Florianópolis.
- Pietropaoli, E., 2012. Progressive failure analysis of composite structures using a constitutive material model (USERMAT) developed and implemented in ANSYS ©. *Appl Compos Mater*, vol. 19, pp. 657-668.
- Qiao, P.; Davalos, J. F.; Wang, J., 2001. Local buckling of composite FRP shapes by discrete plate analysis. *Journal of Structural Engineering*, vol. 127 (3), pp. 245-255.
- Qiao, P.; Shan, L., 2005. Explicit local buckling analysis and design of fiber-reinforced plastic composite structural shapes. *Composite Structures*, vol. 70, pp. 468-483.
- Reddy, J. N., 2004. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. 2. Ed. New York. CRC Press.
- Sleight, D. W., 1999. Progressive failure analysis methodology for laminated composite structures. *Relatório Técnico*. National Aeronautics and Space Administration - NASA, TP-1999-209107.
- Simulia. *ABAQUS/Standard user's manual*, Version 6.12, Providence, RI, USA, 2012.
- Tita, V.; Carvalho, J.; Santos, N. C., 2002. Estudo do comportamento mecânico de materiais compósitos utilizando o Método de Elementos Finitos. In: II CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, João Pessoa.
- Tomblin, J.; Barbero, E. J., 1994. Local buckling experiments on FRP columns. *Thin-Walled Structures*, vol. 18, pp. 97-116.
- Tsai, S. W., Wu, E. M., 1971. A general theory of strength for anisotropic materials, *Journal of Composite Materials*, vol. 5, pp. 58-80.