

O PÊNDULO DEFASADO: UM EXEMPLO DE SISTEMA CAÓTICO PARA ESTUDANTES DO CICLO INICIAL DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

J. F. M. DE CARVALHO A. P. DA COSTA

S. FRAIHA J. M. L. DE FREITAS

SILVANA PEREZ* H. G. M. SOUZA

Faculdade de Física, Universidade Federal do Pará, 66075-110, Belém, Pará, Brazil

Resumo

Neste trabalho é apresentado um estudo realizado por estudantes ingressantes do curso de Física da Universidade Federal do Pará com o objetivo de se analisar os estados de estabilidade de um pêndulo cujo pivô está em movimento circular uniforme (MCU). O modelo teórico foi desenvolvido utilizando-se a descrição de Lagrange da Mecânica Clássica. Após a modelagem, compararam-se as previsões teóricas com um aparato experimental, a fim de se observar os casos de estabilidade. O projeto foi desenvolvido em uma disciplina piloto que se utilizou de uma metodologia ativa, baseada na indagação, em particular com o uso de problemas em aberto, para desenvolver nos estudantes habilidades e competências ligadas ao processo investigativo em ciências exatas, contribuindo também indiretamente para o entendimento da natureza das ciências.

Palavras-chave: atividades investigativas; ensino de Física; natureza da ciências; pêndulo defasado; sistemas caóticos; modelagem

*E-mail: silperez_1972@hotmail.com

Abstract

This work presents a study carried out by incoming students of the Physics course of the Federal University of Pará - Brazil, in order to analyze the stability states of a pendulum whose pivot is in uniform circular motion. The theoretical model was developed using Lagrange's description of Classical Mechanics. After the modeling, we compared the theoretical predictions with the outcomes of an experimental apparatus, in order to observe the stability cases. The project was developed in a pilot discipline that used an active methodology, based on inquiry, more specifically using open-ended problems to develop skills and competences related to the understanding of the Nature of Science in students as well as to those related to the investigative process in exact sciences.

Keywords: investigative activities; Physics Teaching; Nature of Science; lagged pendulum; chaotic systems; modeling

1 INTRODUÇÃO

Em uma sociedade em constante mudança, diretamente influenciada pelos avanços nas áreas de tecnologia e comunicação, faz-se necessário reestruturar os cursos de graduação, tanto no que tange a formação de professores da educação básica como na de pesquisadores, engenheiros etc (OLIVEIRA, 2017).

Avanços nas áreas de psicologia cognitiva, neurociências e educação, entre outras, se somam para entender como o aprendizado ocorre em cada indivíduo e como o desenvolvimento de competências e habilidades pode ser potencializado dentro da sala de aula (MIRANDA, 2016).

Neste contexto, Zômpero e colaboradores (ZÔMPERO; GONÇALVES; LABURÚ, 2017) pontuam que

as atividades investigativas favorecem o desenvolvimento de Habilidades Cognitivas para investigação científica e ativam Funções Executivas, à luz dos estudos da Neuropsicologia, visto que as atividades investigativas cumprem o papel de estimular o raciocínio dos estudantes.

Embora existam várias abordagens didáticas que se baseiam no uso de atividades investigativas, todas elas devem ter um problema como cerne da metodologia, que deve ser analisado pelos estudantes, com maior ou menor grau de liberdade criativa, para o qual os alunos devem emitir hipóteses, planejar atividades, coletar e interpretar dados, concluir e comunicar os resultados aos pares (ZÔMPERO; LABURÚ, 2011).

Neste trabalho é apresentado um estudo desenvolvido por estudantes de primeiro semestre do curso de graduação em Física (licenciatura e bacharelado), em um projeto piloto da Faculdade de Física da Universidade Federal do Pará (FRAIHA et al., 2018), durante o ano de 2017, no qual são usados problemas em aberto em uma abordagem investigativa, para revisar os conteúdos de Física vistos na educação básica pelos ingressantes na faculdade, visando não somente o domínio dos conceitos físicos, mas

também o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas com o entendimento das etapas de desenvolvimento de uma pesquisa científica e, de maneira mais geral, contribuindo para um melhor entendimento de aspectos essenciais da Natureza das Ciências.

Para o estudo aqui apresentado, é considerada a atividade inicialmente desenvolvida durante um semestre de curso, por uma das equipes da turma (os coautores desse trabalho Carvalho, Costa, Freitas e Souza). Assim, aos estudantes da equipe foi apresentado o problema do pêndulo defasado, extraído do *International Young Physicist Tournament (IYPT) do ano de 2016*¹

"Um pêndulo consiste de uma linha resistente e um peso. Quando a base do pêndulo começa a se mover ao longo de uma circunferência horizontal, o peso começa a traçar uma circunferência que pode ter um raio menor, sob certas circunstâncias. Investigue o movimento e as trajetórias estáveis do peso."

O problema do pêndulo com pivô em Movimento Circular e Uniforme (MCU) está incluído na área de dinâmica não linear e caos e assim sendo, algumas abordagens para tal já foram feitas, em geral com foco no estado de defasagem (BELYAKOV, 2011; MENG YANG; HONGXU; HONGMING, 2016).

Além dos estudos sobre o pêndulo com pivô em MCU referenciados acima, há artigos que tratam de pêndulos com pivô oscilante apenas em uma direção (GONZALEZ, 2018; LIANG; FEENY, 2006; BUTIKOV, 2018). Para tais análises são obtidas as coordenadas generalizadas, com a finalidade de abordar o sistema pela dinâmica de Lagrange (HART, 2018). Seguindo esse caminho, após pesquisa na literatura sobre o assunto, os alunos optaram por estudar operacionalmente o formalismo lagrangeano para a modelagem teórica do experimento.

O artigo é organizado como segue. Na Sec. 2 são discutidos alguns pontos relevantes sobre a abordagem didática utilizada no desenvolvimento do trabalho com os estudantes. Os autores consideram importante essa apresentação, que pode auxiliar um docente de graduação que queira utilizar tal técnica em suas disciplinas. A seguir, na Sec. 3, é feita uma breve introdução histórica acerca do surgimento do interesse pelos diferentes tipos de pêndulos e o estudo de sistemas caóticos. A modelagem matemática do experimento via formalismo lagrangeano é apresentada na Sec. 4, para, a seguir, na sec. 5, serem descritas as ideias e tentativas e suas respectivas dificuldades na construção do aparato experimental. Por fim, são apresentadas as conclusões tiradas a partir da comparação entre o modelo teórico e o pêndulo com pivô em MCU real, na Sec. 6, sendo deixadas para a Sec. 7 as considerações finais.

2 ATIVIDADES INVESTIGATIVAS NA GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Conforme foi pontuado na introdução desse manuscrito, o principal aspecto das abordagens didáticas que trabalham com atividades investigativas é a existência de um problema em aberto a ser desenvolvido pelo estudante ativamente, no qual o professor assume um papel de mediador da atividade, ao invés de assumir o papel usualmente a ele atribuído de detentor único do conhecimento, que é transmitido a um estudante passivo em uma sala de aula tradicional.

¹<http://www.iypt.com.br> Acesso em 20 de abril de 2018.

Tal mudança de paradigma no que tange a postura do docente requer uma reflexão profunda de um profissional, que na maioria dos cursos de graduação (licenciatura ou bacharelado) não é um pesquisador em educação, e sim na sua área de conhecimento específico (GATTI; NUNES, 2009; MOREIRA, 2015).

Sendo assim, nessa seção são apresentados alguns pontos pertinentes a essa reflexão, com a expectativa de que eles contribuam para um maior uso dessa abordagem didática em sala de aula. Mais especificamente, são discutidos dois pontos: a escolha do problema e a avaliação do aprendizado do estudante.

2.1 A escolha do problema e o grau de liberdade dado ao estudante

Ao escolher o problema o docente deve ter em mente quais conceitos gostaria de ver abordados, em consonância com a ementa da disciplina. Assim, uma disciplina como a escolhida nesse trabalho, apresenta uma grande liberdade na escolha dos temas, por exemplo permitindo que cada equipe trabalhe um problema exclusivo, com conceitos específicos e que não necessariamente serão abordados pelo resto da turma. As referências (FRAIHA et al., 2018; CASTRO et al., 2018) apresentam trabalhos nessa linha, desenvolvidos na Faculdade de Física da UFPA.

Já uma disciplina com uma ementa mais fechada, como por exemplo, Física Básica I, requer um controle maior sobre os conceitos específicos a serem abordados, e portanto, acaba por restringir bastante a escolha dos problemas e o tempo para o seu desenvolvimento. Um exemplo de curso que utilizou atividades investigativas nessa disciplina é relatado por Parreira (PARREIRA, 2018). Outro exemplo, desenvolvido na disciplina Física Básica III, do curso de Física da UFPA pode ser encontrado na referência (REIS; RODRIGUES; NETO, 2019).

2.2 A avaliação da aprendizagem

Uma mudança de paradigma por parte do professor permeia também uma mudança na avaliação do aprendizado do estudante. Uma disciplina na qual o ritmo de apresentação dos conceitos é ditado quase que exclusivamente pelo professor vai ao encontro de uma avaliação quantitativa de conceitos específicos, que na maioria das vezes são mensurados por meio de provas que cobram resoluções de questões fechadas.

Em contrapartida, o uso de uma aprendizagem ativa busca respeitar o ritmo do estudante no domínio dos conceitos. Nesse sentido, é conveniente que uma avaliação contínua ao longo do semestre seja desenvolvida, e que aspectos ligados ao desenvolvimento de competências e habilidades sejam considerados.

Braga (BRAGA, 2016) pontua que é comum que o estudante sinta-se desconfortável com um processo de avaliação continuada, em certo sentido por estar acostumado a avaliações quantitativas de rendimento usualmente utilizadas em disciplinas de Ciências Exatas. O docente que opte por esse formato de avaliação deve estar preparado para esse comportamento por parte dos alunos.

3 BREVE HISTÓRIA DOS SISTEMAS CAÓTICOS

Diz a lenda que quando Galileu Galilei estava assistindo uma missa na catedral de Pisa, se interessou pelo movimento dos candelabros e o fato de aqueles que possuíam uma amplitude de oscilação maior

possuírem, aparentemente, o mesmo período que os de amplitude menor. Acredita-se que essas observações o levaram a concluir que para pequenas oscilações, pêndulos de tamanhos diferentes eram isócronos. Além disso, ele também percebeu que quando o peso era solto, este retornava a aproximadamente a mesma altura (ROONEY, 2013). Christiaan Huygens, ainda no século XVII, buscou, durante praticamente toda a sua vida, técnicas para melhorar os cronômetros marítimos, em particular estudando o comportamentos de pêndulos isócronos (BURROWES; FARINA, 2005).

Com o passar do tempo, diferentes tipos de pêndulo tornaram-se objetos de estudo, sendo que atualmente algumas de suas configurações são utilizadas, no ramo da dinâmica não linear, para o estudo de sistemas caóticos.

No começo do século XIX, o matemático francês Pierre Simon de Laplace defendeu a visão determinista do universo, ou seja, aquela que afirma que o conhecimento da posição e da velocidade de todas as partículas nos levaria a conhecer todo o futuro do Universo. Entretanto, com o passar dos anos, pesquisadores de diferentes áreas perceberam que conhecer as leis da natureza não era suficiente para tal. Grande parte da natureza parece ser caótica, ou, na linguagem mais técnica, o que hoje chamamos de caos determinista. No movimento desses sistemas, a evolução depende do momento anterior, porém medições feitas no estado de um sistema em um dado tempo podem não permitir que sejam feitas previsões sobre sua situação futura, mesmo quando as equações governantes são conhecidas exatamente (THORNTON; MARION, 2003).

Fenômenos caóticos foram descobertos em diversas áreas de pesquisa (o movimento dos planetas, a previsão do tempo, dinâmica de populações de insetos etc.). Henri Poincaré recebe, por muitas vezes, o crédito por ter reconhecido a configuração caótica ao estudar a mecânica celeste. Ele chegou à conclusão de que sistemas aparentemente simples podem ser extremamente complicados de se entender. Esse entendimento é possível hoje com o avanço da tecnologia e o auxílio dos computadores modernos (THORNTON; MARION, 2003).

4 O MODELO TEÓRICO

O modelo considerado consistiu de um peso de massa m amarrado a um pivô de raio R por uma barra de comprimento L . O pivô se encontra no plano $z = 0$ em movimento circular uniforme com velocidade angular ω constante, enquanto o peso possui um ângulo com o eixo z variável. A figura 1 ilustra o sistema. O pivô possui uma extremidade na origem e a outra se encontra no ponto P . O peso se encontra no ponto Q . O ângulo entre o eixo paralelo ao eixo z que contém a extremidade do pivô e o fio pode variar com o tempo. Quando $t = 0$, a estrutura se encontra no plano Oxz .

Nas análises foi considerado o sistema internacional de unidades e os ângulos são descritos em graus. A aceleração gravitacional na Terra foi considerada como sendo $g = 9,81m/s^2$. Para deduzir as equações de movimento da massa m , foram assumidas as seguintes hipóteses:

- H1 O peso é considerado como uma massa puntiforme;
- H2 A massa do pivô é desprezível;
- H3 A massa e as deformações da barra são desprezíveis;

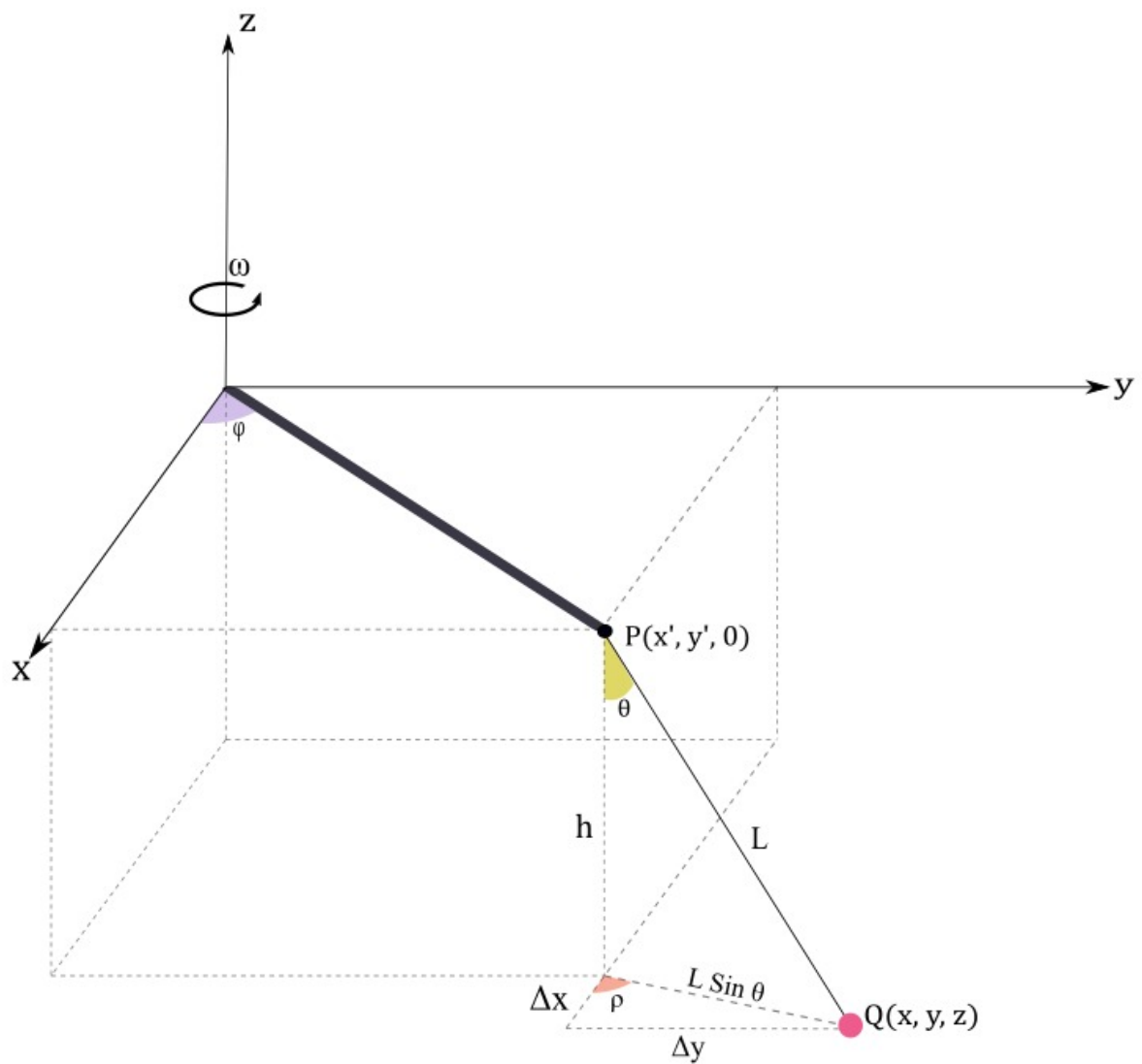


Figura 1: Modelo teórico utilizado

H4 Os efeitos de forças não conservativas são desconsiderados.

As equações foram obtidas com base no formalismo lagrangeano para a Mecânica Clássica (LEMONS, 2007), utilizando-se da equação de Lagrange, dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1)$$

onde L é denominada a função de Lagrange:

$$L = T - V. \quad (2)$$

com T sendo a energia cinética, V a energia potencial e q_i as coordenadas generalizadas, variáveis utilizadas para descrever o sistema; além disso, $i = 1, 2 \dots n$. O mínimo de variáveis necessárias para a descrição do sistema é igual ao seu número de graus de liberdade. No caso do pêndulo em questão, são dois os graus de liberdade, que consideramos como sendo o ângulo θ que a barra faz com a vertical, e a velocidade angular Ω do peso e, portanto, adotou-se $q_1 = \theta$ e $q_2 = \Omega$.

O fato de desprezarmos a massa de qualquer corpo com exceção da massa m (H1, H2 e H3) faz com que a lagrangiana seja da forma:

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - mgz = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (3)$$

A coordenada z é obtida da Figura 1 como sendo:

$$z = -h = -l \cos \theta. \quad (4)$$

Para a coordenada x escrevemos:

$$x = x' + \Delta x, \quad (5)$$

onde:

$$x' = R \cos \varphi \quad (6)$$

e

$$\Delta x = L \sin \theta \cos \rho. \quad (7)$$

Assim, obtemos para a componente x :

$$x = R \cos(\omega t) + L \sin \theta \cos \rho, \quad (8)$$

onde consideramos $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. De forma semelhante, é possível obter a parametrização de y :

$$y = R \sin(\omega t) + L \sin \theta \sin \rho. \quad (9)$$

Com as parametrizações acima, após algumas manipulações algébricas, pode-se escrever a lagrangeana do sistema como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{L}{m} &= \frac{1}{2} R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} L^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\rho}^2) + gl \cos \theta \\ &+ R\omega [\sin \theta \cos(\omega t - \rho) \dot{\rho} - \cos \theta \sin(\omega t - \rho) \dot{\theta}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Aplicando a equação de Lagrange em (10) e efetuando as simplificações pertinentes, são obtidas duas equações:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \dot{\rho}^2 - \frac{R\omega^2}{L} \cos \theta \cos(\omega t - \rho) = 0 \quad (11)$$

e

$$\ddot{\rho} + 2 \cot \theta \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\rho} - \frac{R\omega^2}{L} \operatorname{cosec} \theta \sin(\omega t - \rho) = 0, \quad (12)$$

que são as equações de movimento do pêndulo defasado.

Os casos de estabilidade são aqueles em que $\theta = 0$. Fazendo esse ângulo constante nas equações de movimento, obtém-se:

$$\frac{g}{L} \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \dot{\rho}^2 - \frac{R\omega^2}{L} \cos \theta \cos(\omega t - \rho) = 0 \quad (13)$$

e

$$\ddot{\rho} - \frac{R\omega^2}{L} \operatorname{cosec} \theta \sin(\omega t - \rho) = 0. \quad (14)$$

Além disso, faz-se $\dot{\rho} = \omega$, obtendo-se assim a condição de equilíbrio:

$$\frac{g}{L} \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \omega^2 - \frac{R\omega^2}{L} \cos \theta = 0, \quad (15)$$

que leva ao seguinte resultado:

$$\omega^2 = \frac{2g \sin \theta}{2R \cos \theta + LR \sin(2\theta)}. \quad (16)$$

Da condição de equilíbrio acima, pode-se concluir que existem duas possíveis configurações de equilíbrio para o sistema, uma em que $\theta > 0$ e outra em que $\theta < 0$.

Na seção a seguir apresentaremos situações experimentais nas quais foi possível reproduzir trajetórias aproximadamente estáveis para o peso.

5 O APARATO EXPERIMENTAL

Inicialmente, foi tomada como base uma simulação na qual era possível variar todos os parâmetros envolvidos no sistema, mas que se limitava ao estado em que a massa do pêndulo tem uma trajetória com raio maior que o do pivô (MAHIEU, 2018). Uma vez que o problema apresentado pede a análise de trajetórias mais gerais para o sistema, optou-se por fazer um experimento para melhor comparação entre modelo teórico e o pêndulo real.

Na busca na literatura por um aparato experimental, os métodos encontrados envolviam, muitas vezes, uma engenharia complexa para a realização de tal (DUNCAN, 2000). Uma vez que o objetivo principal do estudo foi a análise do comportamento físico, a equipe buscou a simplificação do aparato de forma a ser possível a sua reprodução em um laboratório de física universitário.

Vários protótipos foram idealizados, porém, como a estabilidade do motor e do pivô são essenciais para que a modelagem teórica se aproxime o máximo do experimento, houve uma grande dificuldade na



Figura 2: (a) Sistema de polias feito em impressora 3D (b) Rolamento

construção de um aparato que vibrasse o mínimo possível nas direções e sentidos não considerados no modelo teórico.

Dois projetos experimentais que minimizavam essas vibrações foram desenvolvidos. Apresentaremos a seguir os dois.

5.1 Aparato A

O primeiro projeto experimental buscou acoplar um motor de passo NEMA 17 a um sistema de engrenagens conforme a Figura 2(a), compostas de PLA, produzidas em impressora 3D Prusa. A maior engrenagem, que contém o braço, é acoplada ao rolamento Figura 2(b), este parafusado sob a mesa, e a menor é fixada ao eixo do motor.

Entretanto, devido a limitações do rolamento, o aparato A se tornou impraticável. Algumas modificações foram propostas e testadas, mas não foi possível resolver esse problema.

5.2 Aparato B

Após várias modificações frustradas de uso do aparato acima, buscou-se um aparato experimental completamente diferente, baseado em uma das soluções apresentadas no IYPT. O aparato foi construído com peças de um kit LEGO MINDSTORMS, conforme Figura 3.

Em paralelo, uma outra equipe desenvolveu um protótipo que utilizou um motor de ventilador acoplado diretamente em um pivô, que também apresentou resultados promissores.



Figura 3: Montagem utilizando o kit LEGO

6 COMPARAÇÃO ENTRE MODELO TEÓRICO E EXPERIMENTO

Para a comparação entre o modelo teórico e o experimental utilizou-se o kit LEGO. Aqui analisaremos duas configurações obtidas, comparando os valores de órbitas aproximadamente estáveis obtidas experimentalmente com o esperado teoricamente.

Para a comparação resolvemos numericamente as equações diferenciais (11) e (12), que regem o movimento do pêndulo, para valores específicos de ω , R e L , e comparamos com o comportamento obtido experimentalmente. Para essa análise foi utilizado o *software Mathematica*.

Os valores de R e L foram fixados respectivamente em 0,1 e 0,3 metros, e foram feitas as análises numéricas para $\omega = 10$ e $\omega = 35$ radianos. Na Figura 4 apresentamos os comportamentos obtidos para o intervalo de tempo de dez segundos para os dois primeiros valores.

Observamos, em ambas situações, comportamentos similares, havendo no plano xy um raio maior e um menor, dentro dos quais o movimento acontece, e no eixo z podendo ser observado também um comportamento periódico.

Experimentalmente foi possível, para o motor disponível, reproduzir a velocidade de 35 radianos/s. Qualitativamente, observaram-se padrões semelhantes aos previstos teoricamente, ou seja, no plano xy um movimento limitado entre dois raios, e no eixo z a massa m efetuava pequenos "saltos".

Vale salientar que esses saltos não são previstos no modelo teórico, no qual considerou-se que o pêndulo era constituído de uma barra rígida e não de um fio, como foi possível fazer experimentalmente.

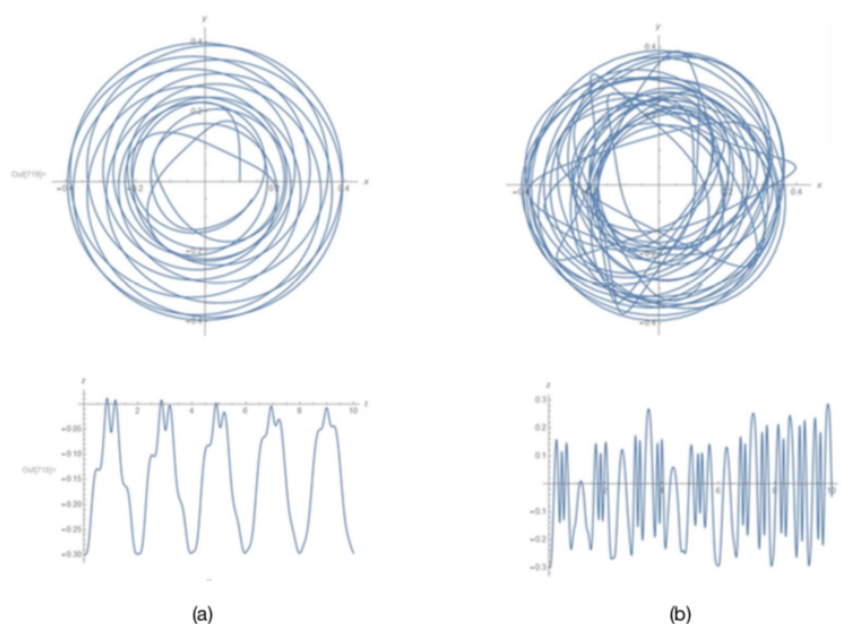


Figura 4: Gráficos do plano xy (acima) e de z por z por t (abaixo). (a) $\omega = 10$ radianos/s e (b) $\omega = 35$ radianos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos um projeto que envolveu modelagem teórica e desenvolvimento de um aparato experimental, para estudar um sistema mecânico com características caóticas, realizado por estudantes de primeiro semestre do curso de graduação em Física da UFPA.

Vale a pena destacar a capacidade dos estudantes de estudarem sozinhos operacionalmente o formalismo lagrangeano na busca do modelo teórico. A apresentação final da equipe para avaliação na disciplina mostrou que houve domínio dos conceitos básicos envolvidos, domínio esse muito acima do exigido para um estudante de primeiro semestre. De certa forma, conforme pontuado por Fraiha e colaboradores (FRAIHA et al., 2018), o uso de aprendizagem ativa respeita o ritmo de cada estudante e possibilita o surgimento de situações de aprendizagem como essa.

A dificuldade de montagem experimental com material de baixo custo fez com que a equipe buscasse o kit LEGO EDUCATION. Entendemos que um kit desses para os estudantes foge ao objetivo de ser considerado baixo custo. Mesmo assim, para a instituição educacional, ele é viável, no contexto de um laboratório experimental de Física, e serve para vários experimentos.

Em relação ao desenvolvimento de habilidades e competências, vale a pena ressaltar que os estudantes tiveram a oportunidade de vivenciar, na prática, as várias etapas de uma pesquisa científica, como o desenvolvimento de hipóteses, que puderam ser testadas nos diversos aparatos experimentais, e a construção de um modelo teórico. Além disso, as várias tentativas frustradas de construção do aparato experimental geraram várias reflexões entre os participantes, com mediação dos professores orientadores, que contribuíram para o entendimento dos aspectos essenciais da natureza da ciências. Entendemos este

como sendo um dos grandes legados do relato apresentado, que se implementado em outras disciplinas dos cursos de licenciatura, pode contribuir para uma melhor formação tanto de professores da educação básica, quanto do ensino superior.

8 AGRADECIMENTOS

A equipe do projeto agradece ao professor Carlos Antônio Neves, pelas contribuições na construção do aparato experimental, e pela disponibilidade de uso da impressora 3D.

Referências

BELYAKOV, A. O. *Phys. Lett.*, n. 25, p. 2524, 2011.

BRAGA, M. A. Natureza da ciência na realidade concreta da sala de aula: duas tendências. In: GELOVEZE, L. G. R. et al. (Ed.). *Diálogo entre as múltiplas perspectivas na pesquisa em ensino de Física*. SP, Brasil: Livraria da Física, 2016.

BURROWES, M.; FARINA, C. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v. 27, n. 2, p. 175, 2005.

BUTIKOV, E. I. *Subharmonic resonances of the parametrically driven pendulum*. 2018. In <http://butikov.faculty.ifmo.ru/Subresonances.pdf>. Acesso em 20 de abril de 2018.

CASTRO, F. N. et al. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v. 40, n. 1, p. e1503, 2018.

DUNCAN, T. *Advanced Physics*. NY, EUA: John Murray, 2000.

FRAIHA, S. et al. Atividades investigativas e o desenvolvimento de habilidades e competências: um relato de experiência do curso de física da universidade federal do pará. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v. 40, p. e4403, 2018.

GATTI, B. A.; NUNES, M. M. R. Formação de professores para o ensino fundamental: estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas. In: *Coleção Textos FCC*. SP, Brasil: Fundação Carlos Chagas (Ed. FCC/DPE), 2009.

GONZALEZ, G. *A pendulum with moving support point*. 2018. In <http://www.phys.lsu.edu/faculty/gonzalez/Teaching/Phys7221/PendulumWithMovingSupport.pdf>; Acesso em 20 de abril de 2018.

HART, M. *The driven pendulum*. 2018. In <http://www.maths.surrey.ac.uk/explore/michaelspages/documentation/Driven>. Acesso em 20 de abril de 2018.

LEMONS, N. *Mecânica Analítica*. SP, Brasil: Livraria da Física, 2007.

LIANG, Y.; FEENY, B. F. *Nonlinear dynamics*. v. 46, n. 1, p. 17, 2006.

MAHIEU, E. *Pendulum with Rotating Pivot*. 2018. In <http://demonstrations.wolfram.com/PendulumWithRotatingPivot/>. Acesso em 20 de abril de 2018.

MENGYANG, L.; HONGXU, C.; HONGMING, Z. *Investigation of the Kinematic Characteristics of Lagging Pendulum*. 2016. Artigo submetido para 2016 Dongrun-Yau Science Award.

MIRANDA, E. T. *Uma proposta para lecionar Física Quântica no ensino médio por meio de unidades de ensino potencialmente significativas*. Dissertação (Dissertação de mestrado, Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física), 2016.

MOREIRA, M. A. Textos de apoio ao professor de física. *IF - UFRGS*, v. 26, p. 6, 2015.

OLIVEIRA, E. G. D. *O uso das redes sociais no ensino de Física: relato de experiência com o uso do INSTAGRAM*. Dissertação (Dissertação de mestrado, Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física), 2017.

PARREIRA, J. E. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v. 40, n. 1, p. e1401, 2018.

REIS, J. R. T.; RODRIGUES, A. G.; NETO, N. M. B. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v. 41, n. 1, p. e20180081, 2019.

ROONEY, A. *A História da Física*. SP, Brasil: M. Books do Brasil Ltda, 2013.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. M. *Classical dynamics of particles and systems*. NY, EUA: Cengage Learning II, 2003.

ZÔMPEIRO, A. F.; GONÇALVES, C. E. S.; LABURÚ, C. E. *Cienc. Educ.*, v. 23, n. 2, p. 419, 2017.

ZÔMPEIRO, A. F.; LABURÚ, C. E. *Ensaio: pesquisa em educação em ciências*, v. 13, n. 3, p. 67, 2011.