

## COMPARAÇÃO DO DESEMPENHO DE ESCOLARES DE 2º GRAU EM TRÊS PROVAS OPERATÓRIAS: PERMUTAÇÃO, QUANTIFICAÇÃO DE PROBABILIDADES E TORRE DE HANOI\*

Leny Rodrigues Martins Teixeira\*\*  
*Universidade Estadual Paulista*

**RESUMO** - O objetivo do presente trabalho foi o de comparar o desempenho dos sujeitos nas provas operatórias de Permutação, Quantificação de Probabilidades e Torre de Hanoi, aplicadas a 60 escolares de ambos os sexos, da 1ª, 2ª e 3ª séries (20 por série) de uma escola de 2º Grau, dentro de uma faixa etária de 15 a 20 anos. O desempenho dos sujeitos nas provas foi correlacionado à média das notas de matemática obtidas pelos colegiais durante o ano. Na comparação entre as três provas, os sujeitos tiveram melhor desempenho na Prova da Torre de Hanoi, embora os resultados tenham sido baixos, para o nível de operações formais, em todas as provas (em torno de 50%). Os sujeitos masculinos tiveram desempenho significativamente melhor apenas na Prova de Quantificação de Probabilidades. Não houve diferença significativa quanto à idade para nenhuma das provas. Somente nas Provas de Quantificação de Probabilidades e da Torre de Hanoi houve diferença significativa quanto à escolaridade, favorecendo as séries mais avançadas. Não houve correlação entre desempenho dos sujeitos e notas de matemática para nenhuma das provas.

### COMPARISON OF HIGH SCHOOL STUDENTS IN THREE OPERATIONAL TASKS: PERMUTATION, QUANTIFICATION OF PROBABILITIES AND HANOI TOWER

**ABSTRACT** - The aim of the present research was to compare the performance of subjects in the three operational tasks of Permutation, Quan-

---

\* Este artigo consiste em uma versão resumida de dissertação realizada sob a orientação do Doutor Lino de Macedo, para obtenção do título de Mestre em Psicologia pelo Instituto de Psicologia da USP, em 1982.

\*\* Departamento de Educação do Instituto de Planejamento e Estudos Ambientais - UNESP - Campus de Presidente Prudente, SP. Endereço: Rua Roberto Simonsen, 305, 19060, Presidente Prudente, SP, Caixa Postal 957.

tification of Probabilities and Hanoi Tower applied to 60 high school students (both male and female), from the first, second and third grades (20 in each group), ranging from 15 to 20 years of age. The performance of the subjects in the tasks was correlated to the mathematics average grades obtained by the students during the year. Comparing the three tasks, the subjects had a better performance in the Hanoi Tower Task even though the results were low regarding the level of formal operations in all three tasks (around 50%). The male subjects performed significantly better only in the Quantification of Probabilities Task. There was no significant age difference in any of the tasks. Only in the Quantification of Probabilities and Hanoi Tower Tasks, there was a significant difference regarding the schooling level, favoring the more advanced grades. There was no correlation between the performance of the subjects and Mathematics grades in any of the tasks.

Ao nível das operações formais, o pensamento ganha a sua plenitude no sentido de que não só pode libertar-se do real (dados empíricos), como o subordina ao mundo do possível. Refletir em termos de possibilidades permite que o pensamento se torne hipotético dedutivo e exige um novo instrumento, as proposições, com as quais o adolescente pode afirmar ou negar, ir além ou antecipar os dados concretos através das ligações lógicas entre as proposições, as quais podem ser combinadas de várias formas. Em síntese, no período das operações formais aparece a lógica proposicional, como predominante na estrutura de pensamento, e Piaget utilizou dois modelos lógicos para representá-la: o reticulado, que diz respeito à possibilidade combinatória que tem o pensamento de submeter todas as variáveis de um problema a todas as classificações e ordenações possíveis, e o grupo de quatro transformações - INRC (identidade, negação, recíproca e correlata) - que implica num sistema único das duas formas de reversibilidade: negação e reciprocidade (Inhelder & Piaget, 1972).

Entretanto, o processo endógeno de construção de estruturas não é necessariamente conhecido pelo próprio indivíduo no qual se processa, ou melhor, durante os primeiros anos do desenvolvimento a ação pode ser consciente apenas como resultado, mas não como processo. Durante o período sensorio-motor e o pré-operatório, por exemplo, a maior parte das ações são aquelas que tem seu êxito garantido, independentemente da compreensão, ou a sua compreensão ocorre apenas ao nível da ação material e não do pensamento, permanecendo, enquanto processo, inconscientes. A partir do período de operações concretas, inicia-se o nível da conceitualização sob a forma de representações através do qual é possível retirar os elementos da ação via tomada de consciência e, simultaneamente, conferir-lhes novas dimensões advindas da atual capacidade de conceituar, e que não estava presente na ação material. Por fim, correspondendo às operações formais, aparecem as ações que se dão ape-

nas no nível da reflexão como resultado da "abstração refletida", ou seja, quando o processo de abstração refletidora (como por exemplo: identificar variáveis ou dimensões envolvidas num raciocínio) se torna consciente (Piaget, 1977).

No presente trabalho serão comparadas três provas operatórias de nível formal, sendo que duas delas (Permutação e Quantificação de Probabilidades) se referem às pesquisas de Piaget sobre "noção de acaso" (Piaget & Inhelder, 1951) e a outra (Torre de Hanoi) se situa no contexto relativo aos trabalhos sobre "o fazer e o compreender" (Piaget, 1978).

A comparação entre as três provas será feita levando-se em consideração dois aspectos básicos independentes que estão subjacentes ao processo da construção das noções envolvidas, conforme as idéias da teoria piagetiana: o primeiro diz respeito ao fato de que as operações necessárias para o domínio das três provas estão sujeitas à existência da estrutura do pensamento lógico-formal; o segundo aponta para a idéia de que a compreensão também se dá, solidariamente nesse processo, sendo construída a partir dos diferentes níveis em que ocorre a tomada de consciência das coordenações envolvidas nas ações do sujeito, das quais ele pode inferir por abstração reflexiva, um conjunto de categorias gerais ou princípios. A posse desses elementos permitirá que a ação se reproduza em níveis diferentes, o que equivale a dizer que o refletir sobre as ações passa a influenciá-las.

Nesse sentido, todo conhecimento está subordinado ao processo de construção das estruturas operatórias. A noção de acaso, por exemplo, que está na base da quantificação de probabilidades, começa por ser irreversível e se submete ao nível das operações formais, ao cálculo de probabilidade. A noção de permutação, admitida apenas parcialmente, no início, só se completa quando as operações de segundo nível permitem compreender as multiplicações de mudança de ordem. Da mesma forma, a transitividade dos deslocamentos e a lei de recorrência, envolvidos na prova da Torre de Hanoi, só são possíveis de serem aplicadas completamente no nível das operações formais.

Desenvolver tais noções, que potencialmente estão asseguradas pelas possibilidades da estrutura biológica, requer uma ação ambiental que conduza o sujeito não apenas a adquirir um saber, ou a dominar um conteúdo, mas o estimule a novas construções, por meio de situações capazes de gerar contradições. Dessa forma, cria-se no sujeito a possibilidade de tomar consciência das mesmas e, na medida em que tenta resolvê-las, pode adquirir compreensões progressivamente melhores. A esse processo de, via perturbações ou desequilíbrios, alcançar pela ação um novo estado, ou equilíbrio melhor que o anterior, Piaget (1976) denominou de "equilíbrio majorante". No que diz respeito ao ambiente educacional, em particular, a prática educativa deve apelar para a atividade real e espontânea do sujeito, levando o aluno a experimentar, a viver situações nas quais as estruturas possam ser descobertas (Duckworth, 1964).

## Quantificação das Probabilidades

As origens da noção de probabilidade podem ser encontradas nas idéias de acaso. Piaget e Inhelder (1951) examinam a construção das noções do acaso sob dois aspectos: 1º) o acaso dentro da realidade física (por exemplo: mistura irreversível); 2º) o fenômeno de tirar a sorte e a quantificação das probabilidades. O acaso é definido conforme Cournot como a "interferência de duas espécies causais independentes" (em Piaget e Inhelder, 1951, p. 15), ou seja, um produto da mistura de tais séries. A mistura é, portanto, um fenômeno irreversível, pois ao misturarmos certo número de objetos, a probabilidade de recompor a situação inicial é cada vez menor.

A compreensão desse aspecto físico da noção de acaso que é a mistura, se dá por etapas para a criança, conforme mostrado por Piaget e Inhelder (1951), a partir de um experimento no qual pediam à criança para prever o que aconteceria a dois conjuntos de esferas (8 brancas e 8 vermelhas alinhadas dentro de um caixa retangular, com uma pequena divisória entre os conjuntos) se fossem imprimidos à caixa que os continha, movimentos de gangorra.

No nível operatório, as crianças previam um retorno das esferas ao lugar primitivo ou apenas a troca de lugar em bloco. Segundo Piaget e Inhelder (1951), nesse nível não há compreensão do acaso, porque é preciso que o pensamento se torne reversível para que ela possa identificar a ausência de reversibilidade típica desses fenômenos. Ao nível operatório concreto, as crianças admitem que o retorno ao estado inicial é impossível, dada a possibilidade crescente de mistura entre elas. O pensamento operatório descobre assim o acaso, ou seja, que há eventos que estão sob o controle do indeterminado e outros do operatoriamente determinado. Entretanto, somente ao nível das operações formais o jovem será capaz de predizer que o retorno é possível, embora a probabilidade seja rara, como também de dosar as possibilidades e efetuar um inventário ou levantamento exaustivo das possibilidades.

Assim, as operações que se iniciam por oposição ao acaso, acabam por dominá-lo, através da dedução operatória, quando estruturam as dispersões casuais em um sistema de probabilidades. Isso se torna possível devido ao aparecimento das operações formais que são responsáveis de um lado pela construção dos sistemas combinatórios (método que permite efetuar o conjunto de operações possíveis sobre um pequeno conjunto de elementos) e de outro pela utilização do cálculo de proporções que permitirão ao sujeito identificar, nas operações combinatórias, relações de proporção. Em síntese, a probabilidade depende da capacidade de realizar operações combinatórias (combinações, permutações e arranjos) e relações entre casos individuais e o conjunto de uma dada distribuição, as quais por sua vez requerem operações lógicas e aritméticas responsáveis por uma quantificação operatória.

Para verificar como os sujeitos estabelecem as relações numéricas que vão determinar as probabilidades da extração, Piaget e Inhelder (1951) usaram dois tipos de situações: escolha entre duas coleções e numa só coleção.

Na primeira situação mostravam-se duas coleções de fichas brancas com ou sem cruz no verso, e o sujeito deveria indicar em qual delas haveria maior probabilidade de achar uma cruz na primeira tentativa. As coleções eram inicialmente mos-

trads aos sujeitos, as fichas eram viradas e cada conjunto era isoladamente embaralhado. Por exemplo:

$$\frac{1}{4} \text{ e } \frac{2}{4} (*)$$

ou seja, coleções iguais com número de cruzes desiguais. A composição das coleções apresentava vários problemas, que contemplavam diferentes probabilidades, quer pela variação do número de elementos, quer pelo número de cruzes, seguidos sempre da questão sobre em qual delas era maior a probabilidade de achar um caso favorável (uma cruz).

Os mesmos problemas eram propostos também na outra situação de escolha, mas tratando-se de uma coleção composta, ou seja, uma coleção de três fichas tendo uma com cruz colocada num saco. Perguntava-se então ao sujeito, qual delas teria maior probabilidade de ser tirada na primeira vez.

A análise das respostas dos autores apontam três estádios de desenvolvimento da quantificação de probabilidades:

*Estádio I* - (4-7 anos) marcado pela ausência da noção de encaixe reversível, que se dá em dois níveis: *Nível I.A*: ausência de comparações quantitativas entre dois conjuntos devido à incapacidade de operar a disjunção entre casos favoráveis, o que leva à escolha arbitrária. Ex.: Sil (4,6) na situação 1/3 e 1/4 afirma que as chances são iguais "porque há uma aqui e uma lá" (p. 193). *Nível I.B*: iniciam-se as comparações, mas como não há ainda a lógica de classes, os sujeitos se baseiam na configuração perceptiva das coleções e não na disjunção sistemática. Ex.: Bov (6,7) acha que em 1/4 e 2/4 as probabilidades são iguais.

*Estádio II* - (7-11 anos) a criança leva em conta apenas uma relação: ou dos casos favoráveis ou dos possíveis, sem relacioná-los: *Nível II.A*: fracassa nas questões de proporção, pois utiliza a multiplicação lógica de relações mas não usa as frações. Ex.: Bay (9,3) escolhe entre 1/2 e 2/4, este último "porque há mais cruzes". "É mais fácil". *Nível II.B*: resolução envolvendo proporcionalidade, quando se trata apenas de pequenas coleções. Ex.: Bis (12,2) opta facilmente pela igualdade na comparação entre 1/2 e 2/4 mas recai na intuição ao comparar 2/5 e 6/13.

*Estádio III* - (acima de 11 anos) domínio sistemático das relações entre casos favoráveis e possíveis permitindo a compreensão das probabilidades (mesmo quando as proporções ou desproporções são invisíveis). Os problemas se resolvem de início por correspondência e posteriormente pelo cálculo de frações. Ex.: Lut (12,5) ao comparar 1/3 e 8/17 afirma: "É mais fácil em 8/17; se fosse igual seria 8/24".

Em síntese, as noções de probabilidade são construídas ao nível de operações formais, haja visto que somente a estrutura do pensamento hipotético dedutivo diferencia e relaciona o possível e o provável (operações de disjunção), sem o que não há quantificação das probabilidades, sobretudo quando aplicada aos grandes números, os quais necessitam do uso de proporções.

---

\* O numerador indica o número de cruzes e c denominador o número de fichas da coleção.

## Permutação

Para Piaget e Inhelder (1951) as operações combinatórias estão na base, quer da noção de mistura, quer das noções de probabilidade. No primeiro caso é através das permutações e combinações que o sujeito pode compreender que a mistura corresponde a uma "sucessão de operações de permutação" (p. 227). No caso da mistura, as permutações não são sistemáticas e significam apenas uma parte das que podem ser realizadas. De outra forma, as noções de probabilidade se constroem na medida em que as permutações se tornam mais sistemáticas e que o sujeito pode estabelecer relações entre certas permutações parciais e todas as permutações possíveis.

As operações de permutação também são construídas gradativamente, e para verificar como isso ocorre, Piaget e Inhelder (1951) propuseram a sujeitos de diferentes idades o seguinte problema: apresentava-se dois tentos, fazendo-se analogia com duas pessoas passeando uma ao lado da outra, as quais poderiam se dispor de duas formas (AB e BA); pedia-se, em seguida, ao sujeito que realizasse com outras cores, as permutações de duas, três e quatro cores.

O objetivo desse problema era o de verificar como se processa a formação das operações de permutação. Não se esperava que os sujeitos descobrissem a fórmula matemática ( $n!$  ou  $n$  fatorial =  $n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-(n-1)$ ) para resolver o problema, mas pedia-se ao sujeito para encontrar um sistema que garantisse prever todas as permutações para os números de fichas propostos. Os estádios encontrados foram:

*Estádio I* - (até 7-8 anos) ausência de sistema, não compreensão dos princípios da permutação manifesta em dois níveis: *Nível IA*: dificuldades em realizar, mesmo por tentativa, todas as permutações. Ex.: Chin (5,6) para três cores encontra apenas duas permutações. *Nível IB*: os sujeitos descobrem algumas regularidades, mas que permanecem assistemáticas. Ex: Ber (5,6) para três cores, embora use certa regularidade ao dizer as cores que vai mudar, conta no final apenas quatro mudanças.

*Estádio II* - (7-8 a 11-12 anos) descoberta empírica de sistemas parciais, que também ocorre em dois níveis: *Nível II.A*: descoberta da regularidade para três cores, sem generalização para quatro. Ex.: Bac (9,10) encontra as seis permutações, primeiro empiricamente e depois ordena fazendo começar duas vezes para cada cor (AA, BB, CC). Porém não generaliza o sistema para quatro cores. *Nível II.B*: princípio de generalização para quatro elementos. Ex.: Alm (12,5) acha empiricamente 19 permutações para quatro elementos, tenta em seguida ordenar as cores, refaz tudo, começando seis vezes com cada cor; todavia não ordena as segundas cores.

*Estádio III* - (11 a 15 anos) descoberta do sistema: *Nível III.A*: generalização de sistemas parciais descobertos no estádio anterior, Ex.: Hut (13,6) prevê inicialmente 12 para 4 cores, depois retifica: "não, é preciso seguir uma ordem, isso fará seis vezes para cada cor; então são 24 vezes ao todo" (p. 264). *Nível III.B*: (14-15 anos) descoberta da lei das permutações. Ex.: Bres (14 anos) prevê rapidamente 24 para 4 cores. Para cinco responde 120 porque "se há três cores, então  $1 \times 2 \times 3$ . Se há qua-

tro, então  $1 \times 2 \times 3 \times 4$ . Se há cinco então  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ . E pode-se continuar sempre assim" (p. 266).

A permutação, como se pode ver, baseia-se num jogo de multiplicações sucessivas  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots$  e poderia parecer que devesse ser construída ao nível de operações concretas, já que são operações com base na correspondência. Entretanto, Piaget e Inhelder (1951) afirmam que a permutação depende da estrutura lógico-formal porque na realidade trata-se de uma multiplicação de mudanças de ordem, operação que leva a outras operações, portanto, de segunda ordem.

## **A Torre de Hanoi**

Ao estudar o problema das relações entre ação e compreensão, Piaget (1977, 1978) diferencia dois tipos de ação. As chamadas ações de êxito precoce são aquelas cujos resultados não dependem da compreensão e estão relacionadas sobretudo às ações típicas do período sensório-motor e do pré-operatório. No caso do engatilhar, por exemplo, o êxito se deve a regulações automatizadas que garantem o resultado da ação, embora os meios empregados possam permanecer inconscientes até a idade adulta. O indivíduo se voltará para os mecanismos (meios empregados) somente se algum obstáculo o impedir de realizar satisfatoriamente a ação, levando-o a corrigir o que estava errado ou a confirmar os meios utilizados na ação que obteve êxito. É neste sentido que Piaget (1977) afirma que a tomada de consciência ocorre da periferia (objetivos e resultados) para o centro (meios empregados, motivos de sua escolha ou de sua modificação durante a experiência).

Outro tipo de ações foi denominado por Piaget (1978) como ações de êxito sucessivo, porque são aquelas que apresentam dificuldades para o sujeito, as quais são resolvidas paulatinamente, pois não podem ser resolvidas por meios habituais. O êxito dessas ações depende da compreensão dos meios empregados, de escolha deliberada entre as alternativas de solução. Dentre as várias ações analisadas na obra *Fazer e Compreender* (Piaget, 1978) pode-se citar como exemplo o da construção de uma ponte, onde só se obtém êxito quando o sujeito compreende exatamente a natureza dos materiais empregados e a relação entre pesos e contrapesos, e chega a uma conceituação sistemática.

O exame de várias situações deste tipo levou Piaget a diferenciar entre o fazer e o compreender. "Fazer é compreender na ação" e "compreender é conseguir dominar em pensamento as mesmas situações até poder resolver os problemas por elas levantados" (Piaget, 1977). O fazer se preocupa apenas com os objetivos e resultados (periferia) enquanto a compreensão volta-se para o "como e porque" (aspectos centrais) da ação. Como sintetiza Macedo (1979) "fazer significa compreender na ação enquanto compreender, fazer no pensamento".

Correspondendo a ações do segundo nível acima descrito, a prova da Torre de Hanoi (Piaget, 1977) pode ser caracterizada por ações de êxito sucessivo, já que implica em mecanismos operatórios elementares. Neste caso o sujeito só obterá êxito na ação se compreender as regras envolvidas, ou seja, adotando um plano sistemático. Se não houver compreensão, o sujeito apresentará uma conduta assistemática,

não conseguindo montar a torre ou, baseado no ensaio e erro, fará um número excessivo de deslocamentos desnecessários.

A prova consiste em deslocar um conjunto de discos de uma coluna para outra tendo uma terceira como intermediária. Para tal utilizou-se um dispositivo, constituído de uma prancha de madeira contendo três colunas (A, B, C) equidistantes uma da outra, onde se pedia ao sujeito que inserisse um a um, cinco discos de madeira com diâmetros diferentes, de tal forma que formassem uma torre. O encaixe dos discos deveria ser em ordem decrescente, no sentido ascendente. Os discos foram enumerados do menor para o maior de I a V. Os transportes dos mesmos deveriam obedecer a algumas regras: transportar apenas um disco por vez, colocar o maior sempre embaixo do menor, tentar transportar a torre de uma coluna para outra usando o menor número possível de deslocamentos. Inicialmente, pedia-se ao sujeito que transportasse dois discos, em seguida três, aumentando-se o número de discos na medida em que o sujeito realizasse com êxito os transportes anteriores, alternando-se as colunas de chegada e de partida. Após os deslocamentos, argüia-se os sujeitos para verificar a consciência da transitividade e a lei de recorrência que requer esse tipo de problema, os quais podem conduzir à elaboração da fórmula  $2^n - 1$ , onde  $n$  é o número de discos. Para julgar a tomada de consciência em cada nível, solicitava-se também que o sujeito ditasse ao experimentador, ou a um segundo sujeito, os passos a seguir para deslocar a torre. Analisando as respostas a este tipo de problema, Piaget classificou-as em três estádios, com as seguintes características:

*Estádio I* - (4 a 7 anos). Há êxito com dois discos, mas sem consciência das ligações lógicas. Os sujeitos fracassam no transporte de três discos devido à ausência de qualquer plano ou de compreensão antecipada. A dificuldade básica dos sujeitos desse nível está em combinar a inversão da ordem com uma espécie de transitividade, ou seja, é preciso pegar em primeiro lugar o disco I (menor), sendo que ele terá que ser o último a ser colocado. Para tanto, é preciso usar uma coluna intermediária entre A e C para que o disco I fique por cima do II (maior).

*Estádio II* - (7 a 12 anos). Êxito imediato com dois discos. Com três discos há ainda tentativas hesitantes, fracassos e correções, mas os sucessos tornam-se estáveis. Os progressos deste nível devem-se ao fato de que os sujeitos agem com previsão dos resultados e subordinando os meios aos objetivos. Quando manipulam os discos, estabelecem antecipações e retroações de tal forma que os deslocamentos sucessivos se coordenam entre si. Entretanto, as antecipações se baseiam nas próprias ações, sem ainda se apoiarem em deduções operatórias.

*Estádio III* - (a partir dos 12 anos). Êxito rápido e estável em relação a três discos. As antecipações tornam-se cada vez mais inferenciais para números superiores de discos, com utilização sistemática da experiência anterior. Os sujeitos explicitam os princípios ou sistema utilizado, o qual consiste numa combinação de recorrência e da transitividade justificadas e não apenas práticas. Por exemplo, Rab (11,7) afirma que é preciso "começar sempre retirando o menor, depois o médio, em seguida o pequeno sobre o médio, para então tirar o grande, monta-se uma pequena pirâmide ali e então a passagem fica livre e eu recomeço depois; é a mesma história em seguida" (Piaget, 1977, p. 178). Parece, portanto, que tais conclusões marcam o início da de-



dução operatória, típica do raciocínio lógico, pois estas aparecem em consequência das tomadas de consciência de ações ou coordenações, das quais o sujeito tira, por abstração reflexiva, modelo ou princípio que generaliza para outras situações.

O objetivo geral desta pesquisa foi o de comparar noções operatórias próprias à estrutura do pensamento lógico-formal, particularmente quanto à combinatória (tal como avaliada pelas Provas de Permutação e Quantificação de Probabilidades) e os níveis de conceitualização dos sujeitos na resolução da prova da Torre de Hanoi. Esse trabalho, entre outras, tem como justificativa sondar melhor os processos de raciocínio do adolescente, em particular suas dificuldades, a partir de um estudo comparativo cujos objetivos específicos são: comparar (inter e intra-prova) o desempenho operatório de escolares de 2º grau, nas três provas, descrever o desempenho operatório dos sujeitos em cada uma das provas em função do sexo, idade e escolaridade e verificar como o desempenho operatório dos sujeitos em cada uma das provas se relaciona com o seu rendimento escolar, em matemática, medido em função das notas atribuídas pelo professor da disciplina.

## MÉTODO

### Sujeitos

Os sujeitos do estudo eram alunos do curso diurno da 1ª, 2ª e 3ª séries do 2ª grau de uma escola pública\* de clientela numerosa, muito heterogênea e bastante diversificada do ponto de vista sócio-econômico. Dos 841 alunos, escolheu-se aleatoriamente 60 sujeitos, 20 para cada série, com exclusão apenas dos repetentes na série. Quanto ao sexo a distribuição foi de 16 (26,7%) sujeitos do sexo masculino e 44 (73%) do sexo feminino. A idade dos sujeitos variou de 15 a 20 anos (idade mediana 16 anos e 9 meses), sendo 13 alunos de 15 anos, 12 de 16 anos, 15 de 17 anos, 14 de 18 anos, 4 de 19 anos e 2 de 20 anos.

### Material

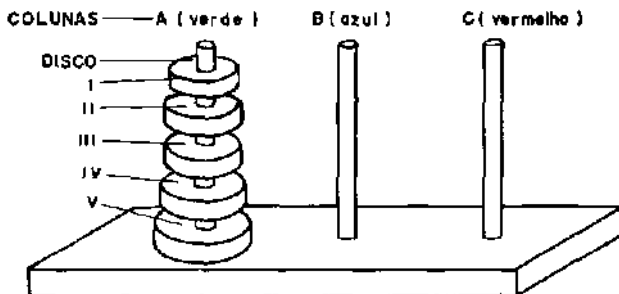
Na Prova de Permutação foi usado um conjunto de 160 fichas plásticas (2,5 cm de diâmetro), sendo 40 de cada uma das cores: vermelho, azul, verde e preto. Para a Prova de Quantificação de Probabilidades, usou-se fichas do mesmo tipo, sendo 12 fichas brancas e 8 brancas marcadas com uma cruz em uma das faces. Na Prova da Torre de Hanoi empregou-se um material que se apresenta como um quebra-cabeça" com as seguintes características: três colunas de madeira (0,7 cm de diâmetro e 5,5 cm de altura) de cores diferentes (verde, azul e vermelho) fixadas de forma equidistante numa prancha retangular (26 cm de comprimento, 8,5 cm de largura e 1 cm

---

\* Escola de 1ª e 2ª graus "Fernando Costa" - Presidente Prudente, SP.

\*\* O material usado na pesquisa foi confeccionado artesanalmente, mas já existe uma produção industrial da Xalingo A. S. Indústria e Comércio (RS) com o nome de "Passa-Passa". Este material é de plástico e apresenta 9 discos.

de espessura). Cinco discos, numerados de I a V por ordem de tamanho também de madeira (0,5 cm de espessura) com diâmetros variáveis de: 3, 4, 4,8, 5,9 e 6,8 cm, com um orifício central que permite a inserção dos mesmos nas colunas A, B ou C, conforme mostra a Figura 1.



**Figura 1:** Representação do material da Prova da Torre de Hanoi.

## Procedimento

O esquema de trabalho consistiu na aplicação das provas de desempenho operatório relativas à noção de permutação e quantificação de probabilidades utilizando a padronização elaborada por F. Longeot (1974) e da prova da Torre de Hanoi, conforme descrita por Piaget (1977). O conjunto das provas foi aplicado a cada sujeito pela pesquisadora, em uma única sessão, na própria escola. Adotou-se o procedimento de alternar as provas para se evitar possíveis efeitos de seqüência.

*Prova de Permutação.* Inicialmente demonstrava-se ao sujeito no que consistia a prova colocando-se duas fichas de cor vermelha e amarela sobre a mesa, lembrando ao sujeito as possíveis posições das fichas. A partir daí apresentava-se ao sujeito fichas de 3 e 4 cores, solicitando-se três tipos de respostas: previsão, justificativa e construção das permutações. Para 5 e 6 cores pedia-se apenas o prognóstico justificado. A avaliação foi feita segundo as normas propostas por Longeot (1974), que levam em conta as respostas corretas ao nível do prognóstico e da execução. O total de pontos previstos pela escala poderia variar de 0 (nenhum acerto) até 6 pontos.

*Prova de Quantificação de Probabilidades.* O sujeito deveria escolher entre dois montes de fichas brancas marcadas com cruz, ou sem cruz, aquele em que houvesse maior chance de encontrar uma ficha com cruz na primeira tentativa. Os problemas apresentados tinham as seguintes composições:

1/4 e 2/4; 3/5 e 3/7; 1/3 e 1/2; 2/4 e 3/7 para o estágio de operações concretas ( $O_c$ );

1/2 e 2/4 para o estágio intermediário ou pré-formal (I);

2/6 e 1/3; 3/9 e 2/6 para o estágio de operações formais nível A ( $F_A$ );

2/6 e 3/8 para o estágio de operações formais nível B ( $F_B$ ).

A avaliação da prova conforme prevista por Longeot (1974) se baseou na previsão e justificativa das respostas do sujeito aos problemas propostos. O sujeito poderia obter até 2 pontos por estágio, perfazendo um total de 8 pontos.

*Prova da Torre de Hanoi.* Na descrição dessa prova, feita por Piaget e Catlin, (Piaget, 1977, cap. XIV), pode-se apreender os procedimentos adotados. Iniciava-se a prova mostrando-se ao sujeito o material com os discos empilhados em forma de torre, os quais deveriam ser transpostos de uma coluna para outra, obedecendo às seguintes regras:

1<sup>a</sup>) transportar os discos um de cada vez, sem reter o disco na mão ao transportar o outro;

2<sup>a</sup>) manter sempre os discos menores sobre os maiores;

3<sup>a</sup>) usar o menor número de deslocamentos possível.

O sujeito era solicitado a realizar os transportes duas vezes com 2, 3 e 5 discos, alternando-se as colunas de partida e chegada. Numa última situação o sujeito deveria "ditar" para a pesquisadora os deslocamentos necessários para formar a torre, optando-se por aquele último número de discos no qual o sujeito obteve êxito completo nos transportes. Após os dois transportes realizados com cada número de discos previstos, a pesquisadora argüia o sujeito com o objetivo de verificar o seu nível de conceituação, a partir das questões:

I - Qual dos discos foi mais deslocado?

II - É a mesma coisa para todas as colunas?

III - Há movimentos semelhantes entre os discos I, II, etc...?

IV - Importa por qual coluna começar?

V - Você fez algum plano? Qual?

Essas questões tinham como objetivo levar o sujeito a explicitar o processo de apreensão dos mecanismos básicos necessários para resolução da prova, quais sejam:

- o número de deslocamentos é inversamente proporcional ao tamanho dos discos;
- o número par de discos (2, 4,...) exige que se comece pela coluna intermediária, e o número ímpar (1, 3, 5...) pela coluna final;
- o sistema de deslocamentos é recorrente: desloca-se n-1 discos para uma coluna intermediária, deixando a coluna final livre; transporta-se o disco de número maior para esta coluna e reinicia-se o processo de passagem dos outros discos sobre o disco maior;
- o número mínimo de deslocamento é igual a  $2^n - 1$ , onde n é o número de discos.

A avaliação das respostas dos sujeitos para esta prova foi feita tendo em vista dois critérios: êxito com os deslocamentos dos discos e nível de compreensão obtido nas 5 questões, com valor de até 2 pontos para cada uma delas.

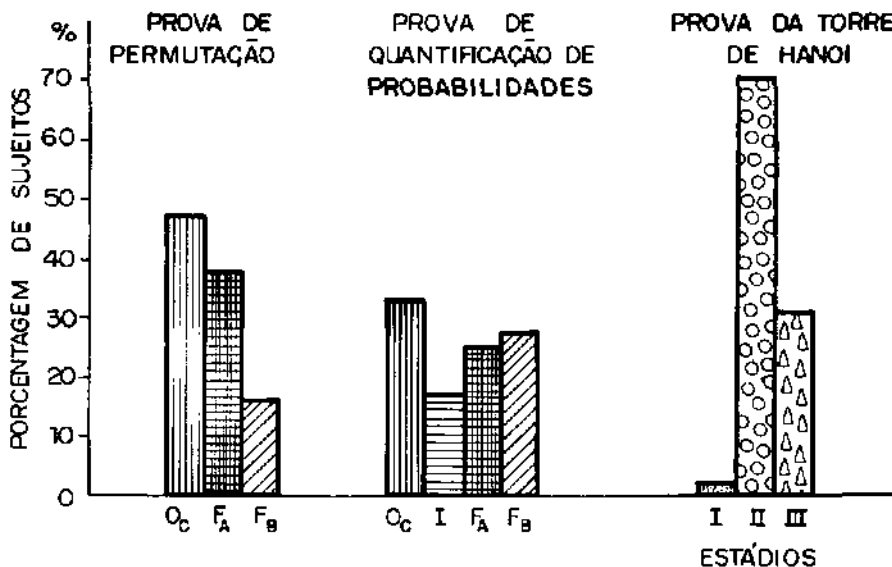
Aliou-se, neste caso, a classificação feita por Piaget (1977) em 3 estádios e os critérios elaborados pela autora a partir das questões elaboradas, resultando no seguinte esquema de avaliação: *Estádio I*: êxito com 2 discos e escores de 0 a 2 para a compreensão; *Estádio II*: êxito com 3 discos e escores de 3 a 4 para compreensão;

*Estádio III*: êxito com mais de 3 discos, com escores de 5 a 6 relativos à avaliação de nível de compreensão, correspondendo respectivamente aos estádios Pré-Operatório, Operações Concretas e Operações Formais.

## RESULTADOS

Os resultados gerais das três provas estão descritos conforme os escores obtidos pelos sujeitos, o que permitiu classificá-los em diferentes estádios. Nas provas de Permutação e Quantificação de Probabilidades, os estádios previstos pela Escala Langeot (1974) são de Operações Concretas ( $O_c$ ), Operações Formais Nível A ( $F_A$ ), Operações Formais Nível B ( $F_B$ ), sendo que para a Prova de Quantificação de Probabilidades a escala prevê também um estádio Intermediário (I) situado entre os de Operações Concretas e Formais. Na Prova da Torre de Hanoi, os sujeitos foram classificados nos estádios I, II e III, conforme proposto por Piaget (1977). A Figura 2 mostra a distribuição geral da população, conforme os estádios em cada uma das provas aplicadas.

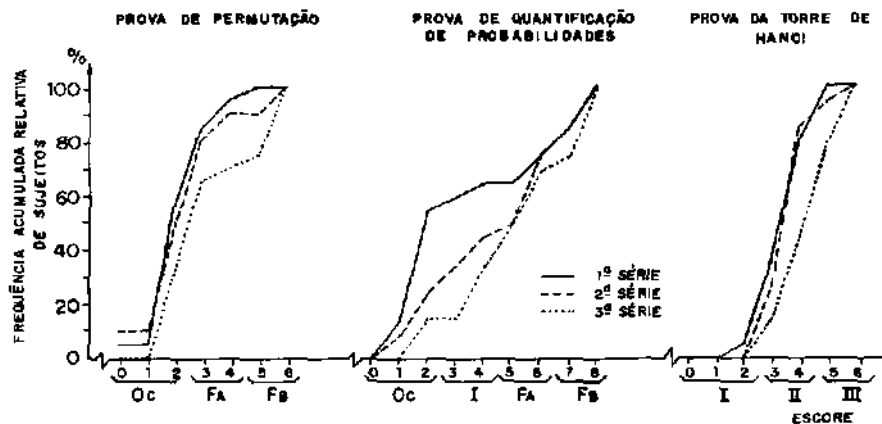
Na Figura 2, como se pode observar pelos percentuais, a prova de Permutação foi a que apresentou resultados mais baixos (15%) para o estádio Formal B, o que nos permitiria afirmar que foi a prova mais difícil para os sujeitos. A comparação entre as 3 provas foi feita utilizando-se o teste de Friedman (Siegel, 1981), teste não paramétrico para verificar se K amostras foram extraídas da mesma população, que mostrou ha-



**Figura 2:** Distribuição da população conforme os estádios em cada uma das três provas.

ver diferença entre os escores dos sujeitos das três provas utilizadas. O teste de sinais (Siegel, 1981), também não paramétrico, permitiu verificar que não houve diferença significativa ( $\alpha = 0,05$ ) entre os escores dos sujeitos nas provas de Permutação e Quantificação de Probabilidades, enquanto que os escores dos sujeitos na Prova da Torre de Hanoi foram melhores quando comparados aos das outras duas provas. Concluiu-se, portanto, que a Prova da Torre de Hanoi foi mais fácil para os sujeitos.

A frequência acumulada dos escores foi calculada com o objetivo de estabelecer comparações entre o desempenho dos sujeitos em relação às variáveis estudadas (sexo, idade, escolaridade), e os gráficos utilizados permitem visualizar em quais dos estádios ocorre maior concentração de sujeitos. A Figura 3\* mostra a frequência acumulada de escores para sujeitos do sexo masculino e feminino nas três provas. Pode-se verificar que no estádio de Operações Concretas, aferido pela Prova de Permutação, há 52% de sujeitos femininos e 31% de sujeitos masculinos, no estádio Formal A, 36% de sujeitos femininos e 44% de masculinos, no estádio Formal B, 11% de sujeitos do sexo feminino e 25% do masculino. Cerca de metade dos sujeitos femininos estão no estádio de Operações Concretas e a outra metade nos períodos Formal A e Formal B, enquanto os sujeitos masculinos tem maior concentração nos últimos estádios (69%). Também na prova de Quantificação, o desempenho dos sujeitos do sexo masculino apresenta percentuais comparativamente mais altos (12% para Operações Concretas e 69% para Operações Formais A) enquanto o sexo feminino tem 39% de sujeitos no 1º estádio e apenas 14% no último. Na prova da Torre de Hanoi, a distribuição de sujeitos do sexo masculino e feminino é bastante semelhante, ou



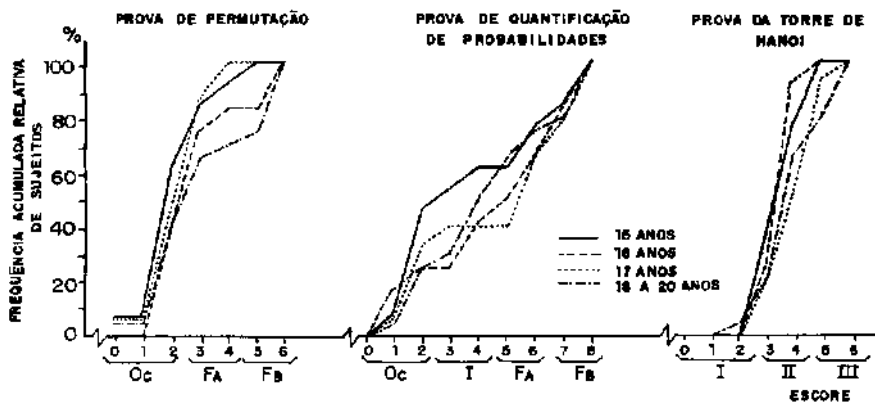
**Figura 3:** Distribuição acumulada relativa dos sujeitos masculinos e femininos em função dos escores e respectivos estádios obtidos em cada uma das três provas.

\* A leitura do gráfico pode ser feita verificando-se a área abaixo de cada linha do gráfico; quanto menor a área, melhor será o desempenho.

seja, 0%, 69% e 31% nos respectivos estádios para o sexo masculino e 2%, 68% e 30% para os do sexo feminino.

A comparação entre os escores de ambos os sexos foi feita através do teste U de Mann-Whitney (Siegel, 1956), que apontou diferença significativa ( $\alpha = 0,05$ ) entre os dois sexos apenas na prova de Quantificação de Probabilidades. O sentido dessa diferença foi dado através do cálculo da mediana (escore 5) que apontou 75% dos sujeitos masculinos com escore acima da mediana e do sexo feminino apenas 44%, indicando o melhor desempenho dos sujeitos masculinos na prova de Quantificação de Probabilidades.

Os resultados quanto à idade, mostrados na Figura 4, apontam que na prova de Permutação 60% dos sujeitos de 15 anos estão concentrados no estádio de Operações Concretas, enquanto esta proporção é menor para os de 16, 17 e 18 a 20 anos com 42%, 47% e 40% respectivamente. No estádio Formal A há maior concentração de sujeitos de 17 anos (53%), sendo que essa porcentagem é de 31% para os de 15 anos, 42% para os de 16 e 30% para os de 18 a 20 anos. No Formal B, são os de 18 a 20 anos que apresentam maior percentual (30%), sendo 8%, 17% e 0% para os de 15, 16 e 17 anos, respectivamente. Na prova de Quantificação de Probabilidades, a distribuição dos sujeitos aponta uma certa vantagem para os de 16 e 17 anos, pois o percentual acumulado para estas idades até o estádio Intermediário é de 42% e 40%, enquanto os de 18 a 20 anos estão com 50% e os de 15 anos, com 62%. No estádio Formal A, os percentuais são 18%, 25%, 27% e 3% para as respectivas idades de 15, 16, 17 e 18 a 20 anos e no estádio Formal B, na mesma seqüência 23%, 33%, 33% e 20%. Pode-se observar que os sujeitos de 16 e 17 anos apresentam uma maior concentração nos últimos estádios (Formal A e Formal B). Na prova da Torre de Hanoi, há apenas 5% de sujeitos de 18 a 20 anos no estádio I; no estádio II a frequência relativa às idades de 15, 16, 17 e 18 a 20 anos é, respectivamente, 77%, 92%, 53% e 60%; no estádio III as correspondências com as idades são, respectivamente, 23%,



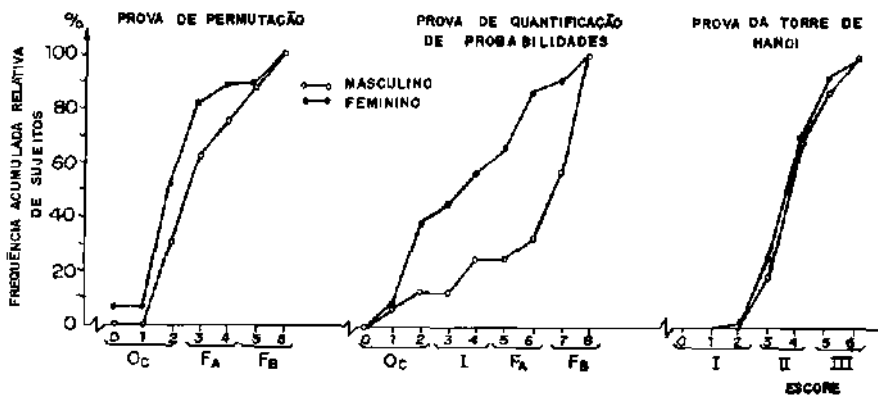
**Figura 4:** Distribuição acumulada relativa dos sujeitos de 15, 16, 17 e 18 a 20 anos em função dos escores obtidos e respectivos estádios em cada uma das três provas.

8%, 47% e 35%, o que significa uma certa vantagem para os sujeitos de 17 e 18 a 20 anos, pois apresentam maior concentração no estágio III.

Para comparar os escores dos sujeitos de 15,16,17 e 18 a 20 anos utilizou-se o teste de Kruskal-Wallis (Siegel, 1981) que demonstrou não haver, no nível de 0,05 de significância, diferença entre os escores dos sujeitos das diferentes idades, em qualquer das três provas.

Quanto à escolaridade observou-se, de acordo com a Figura 5, que na prova de Permutação os sujeitos de 3ª série estão mais concentrados no estágio Formal B (30%), enquanto os de 1ª e 2ª séries tem apenas 5% e 10% respectivamente. No estágio Formal A, os percentuais são bastante semelhantes para as três séries: 40% para a 1ª e 2ª e 45% para a 3ª. Os escolares de 1ª e 2ª séries estão mais concentrados no estágio de Operações Concretas (55% e 50%) do que os de 3ª série, com 35%. Para a prova de Quantificação de Probabilidades, verifica-se que os sujeitos de 1ª série têm uma concentração bem maior nos dois primeiros estádios (65%), o que os coloca em desvantagem frente à 2ª série, com 45% e sobretudo à 3ª série com 35%. Nos estádios Formal A e Formal B, em consequência, os percentuais são de 35% para a 1ª série, 55% para a 2ª e 65% para a 3ª série. Note-se que os sujeitos de 1ª e 3ª séries estão inversamente distribuídos, com vantagens para os últimos. Na prova da Torre de Hanoi, a distribuição da frequência revela que no estágio I só há 5% de sujeitos de 1ª série. No estágio II temos 75%, 85% e 45% para a 1ª, 2ª e 3ª séries e no estágio III 20%, 15% e 55% respectivamente às três séries, o que indica maior concentração de sujeitos de 3ª série no último estágio. Nas três provas, portanto, houve uma concentração maior de sujeitos de 3ª série no último estágio.

O teste de Kruskal-Wallis (Siegel, 1981) apontou diferença significativa ( $\alpha = 0,05$ ) no desempenho dos sujeitos de diferentes escolaridades nas provas de Quantificação de Probabilidade e no da Torre de Hanoi. Na prova de Quantificação de Pro-



**Figura 5:** Distribuição acumulada relativa dos sujeitos de 1ª, 2ª e 3ª séries do 2º grau, em função dos escores obtidos e respectivos estádios em cada uma das três provas.

babilidades, ocorreu diferença ( $\alpha = 0,05$ ) apenas entre a 1ª e a 3ª séries (Teste U de Mann Whitney; Siegel, 1981) sendo que o valor da mediana (escore 5) acusou melhor desempenho dos sujeitos da 3ª série em relação aos da 1ª série. Utilizando-se os mesmos testes estatísticos, verificou-se que para a Prova da Torre de Hanoi obteve-se melhor desempenho dos sujeitos da 3ª série em relação aos da 1ª e 2ª séries.

A relação entre notas de matemática e escores dos sujeitos nas 3 provas, foi testada através do Coeficiente de Correlação por Postos de Spearman (Siegel, 1981), com nível de significância de 0,05, o que indicou não haver relação entre notas de matemática e escores dos sujeitos da amostra em nenhuma das três provas estudadas.

## DISCUSSÃO

O objetivo deste trabalho, de comparar três provas operatórias, encontra sua justificativa no fato de haver processos comuns entre elas. Em primeiro lugar são provas que dependem da estrutura do pensamento lógico-formal, haja visto que todas implicam em operações de segunda potência. Mais especificamente, as provas de Permutação e Hanoi tem em comum, em primeiro lugar, o fato de que a compreensão do problema se baseia na utilização de dois processos: num primeiro nível a recorrência, e num segundo nível, a indução. Em segundo lugar, ambas constituem forma particular de arranjo, ou seja, é preciso respeitar a ordem de colocação nas colunas (Torre de Hanoi), tanto quanto a ordem de disposição das fichas (Prova de Permutação). Por outro lado, a Prova de Quantificação de Probabilidades e a da Torre de Hanoi implicam operações de disjunção. A compreensão da probabilidade implica na separação, ao nível do pensamento, do possível e do provável e, com base num raciocínio proporcional, o sujeito pode privilegiar uma das possibilidades. O mesmo raciocínio, de forma bem mais simplificada, utiliza-se na Prova da Torre de Hanoi, pois ao transportar os discos de uma coluna a outra, é preciso começar pela coluna intermediária (número par de discos) e pela coluna final (número ímpar de discos) sem o que não se realiza o transporte de toda a torre com um número mínimo de deslocamento. Quanto à Prova de Permutação e Quantificação de Probabilidades, o que há de comum é que ambas supõem uma combinatória, ou seja, em ambas é preciso elaborar a combinação e a ordenação de todos os casos possíveis.

A análise geral dos resultados para as três provas apontou percentuais bastante baixos para os níveis Formal A e B. Os percentuais de sujeitos nesses níveis são, respectivamente, 68%, 47% e 32% para as provas de Hanoi, Permutação e Quantificação de Probabilidades, quanto ao estágio de Operações Concretas. No estágio de Operações Formais na Prova da Torre de Hanoi, houve uma concentração de 30% de sujeitos. Na Prova de Permutação os percentuais somam 53% (38% para o Formal-A e 15% para o Formal-B) e para a Prova de Quantificação de Probabilidades houve um total de 52%, sendo assim distribuídos: 25% para o Formal-A e 27% para o Formal-B. Esta pesquisa confirma dados de outros autores como Neimark (1975), Tomlinson-Keasey (1972) e Lovell (citado em Schwebel, 1975) sobre um atraso



geral na aquisição das operações formais. Outra hipótese sobre o percentual baixo no nível operatório formal pode estar ligada a uma dificuldade observada nas respostas dos sujeitos em tornar explícito ou representar claramente os processos utilizados quando da realização das provas. Os sujeitos demonstraram grande dificuldade em refletir sobre a própria ação, ou seja, em refletir e verbalizar os processos empregados na execução das respostas às provas operatórias utilizadas.

Os resultados dos escores dos sujeitos, comparados pelo teste de Friedman (Siegel, 1981), demonstraram que a Prova da Torre de Hanoi foi a mais fácil das três provas. Pode-se verificar, conforme os elementos presentes no *A tomada de Consciência* (Piaget, 1977) que esta prova coloca-se como intermediária entre as ações de êxito precoce e de êxito sucessivo, tendo em vista que é possível executar os transportes dos discos sem ter descoberto o sistema completamente. Outro fator que explicaria o melhor desempenho dos sujeitos nesta prova é que ela se dá num contexto onde as regras propostas tornam o problema mais definido do que nas outras provas.

A comparação entre as Provas de Permutação e Quantificação de Probabilidades mostrou não haver diferença entre as duas provas, o que significa que ambas apresentaram o mesmo nível de dificuldade para os sujeitos testados. Tal resultado comprova a proposta de Piaget & Inhelder (1951) da interdependência das noções de acaso e das operações combinatórias. Nestas duas provas o êxito está subordinado à compreensão, ou seja, a lei das permutações só é descoberta a partir de um sistema móvel de referências e o cálculo das probabilidades implica operações combinatórias de relações multiplicativas (proporções).

Em relação à variável sexo, os resultados mostraram não haver diferença de desempenho entre o sexo masculino e feminino nas provas de Permutação e da Torre de Hanoi. Houve, no entanto, diferença significativa entre o desempenho dos sujeitos dos dois sexos na Prova de Quantificação de Probabilidades, em favor dos sujeitos do sexo masculino. Hipoteticamente poder-se-ia dizer que o melhor desempenho dos sujeitos masculinos pode significar uma maior experiência em lidar com problemas probabilísticos.

Quanto à idade, verificou-se não haver diferença entre as idades dos sujeitos estudados em nenhuma das provas utilizadas. Dados empíricos sobre idade mostram que, num mesmo contexto social, este é um fator ligado ao desenvolvimento das operações formais antes dos 15 anos, tal como mostram os estudos de Barrat (1975), Douglas e Wong (1977) e outros. Entretanto, em idades posteriores não há evidência de aumento significativo de desempenho para os sujeitos, como é mostrado também neste estudo. Esse dado corrobora a hipótese do próprio Piaget (1972) de que a construção das operações formais, a partir de determinada fase, está sujeita não mais simplesmente à idade, mas a outros fatores, como interesses profissionais. Outros autores sugerem outros fatores como experiência (Tomlinson-Keasey, 1972), cultura (Douglas e Wong, 1977) e escolaridade (Goodnow e Bethon, 1966).

O desempenho dos sujeitos quanto à escolaridade não apresentou diferença significativa apenas para a Prova de Permutação. Na Prova da Torre de Hanoi e na de Quantificação de Probabilidades os resultados revelaram melhor desempenho em

sujeitos de escolaridade mais alta em relação aos de escolaridade mais baixa. Esse resultado era esperado por duas ordens de razões. A primeira é relativa à própria proposta piagetiana, segundo a qual o raciocínio operatório formal que trabalha não mais com objetos, mas com proposições e o seu desenvolvimento, cuja expressão só se dá no plano representativo, está ligado ao contexto social e educacional. Por outro lado, Piaget (1972) também admite que as tarefas por ele utilizadas são sobretudo de natureza física e lógico-matemática, estando portanto mais relacionadas a uma população, escolarizada. A segunda razão está ligada ao fato de que as tarefas piagetianas, quando testadas empiricamente, têm evidenciado que os efeitos da escolaridade são mais importantes para o período de operações formais do que para todos os outros (Goodnow e Bethon, 1966; Neimark, 1975).

Apesar da expectativa da influência da escolaridade no desempenho dos sujeitos ter sido confirmada, é preciso observar que os resultados apontam percentuais muito baixos para as três provas, sobretudo para os sujeitos de 2ª e 3ª séries. Considerando-se não só a idade, mas o fato de que noções de análise combinatória e de proporção já haviam sido ensinadas na escola, era de se esperar que os resultados apontassem maior número de sujeitos para os estádios formal A e formal B. Esses resultados permitem questionar a forma como tais noções são ensinadas, pois embora esta não fosse objeto da pesquisa, as respostas dos sujeitos às provas operatórias forneceram elementos que denunciaram a ineficácia de um ensino verbalizador que, por se realizar sem conexão com a atividade do sujeito, torna-se inócuo. Na Prova de Permutação pudemos identificar três grupos de respostas que elucidam esse problema: sujeitos que usaram a fórmula ( $n!$ ) dando a resposta correta, mas que não conseguiram realizar ao nível concreto todas as permutações, não sabendo também justificar o uso da fórmula, por exemplo para 4 escores ( $P_4 = 4.3.2.1$ ); sujeitos que, com ou sem ensino prévio do assunto, descobriram a lei de permutação através do raciocínio por recorrência; sujeitos que, tendo ou não aprendido previamente sobre permutação, não conseguiram descobrir o processo envolvido na permutação.

Na Prova de Quantificação de Probabilidades também ficou evidenciado que os sujeitos não foram capazes de responder aos problemas propostos, utilizando-se do cálculo proporcional expresso através de frações. Isso é significativo na medida em que se sabe que o conceito de frações é desenvolvido desde a 4ª série do 1º grau.

Outro dado obtido que corrobora a idéia da inadequação dos processos de ensino foi o da não-correlação entre notas de matemática e os escores dos sujeitos nas três provas aplicadas apesar do inegável envolvimento de conceitos matemáticos nas mesmas. A ênfase dada ao domínio da técnica sem respaldo no processo da construção, leva a uma assimilação reprodutora, que não é só limitada, como até pode inibir o processo da descoberta. Por outro lado, o abandono precoce das atividades manipulativas em função da verbalização, como apontam Odegaard (1976) e Miller (1978) pode também ser um fator que dificulta o processo da compreensão.

Estes dados permitem discutir a questão do tipo de ensino transmitido nas escolas e quanto ele caminha paralelo, e não convergente, à construção das estruturas do pensamento.

De maneira geral, a comparação das provas demonstrou que as noções envolvidas nas provas, bem como a compreensão das mesmas estão sujeitas à constru-

ção das estruturas operatórias. Ficou evidente também que há grande dificuldade, por parte dos alunos, em refletir sobre a própria ação e verbalizar os processos empregados na resolução dos problemas propostos, fato que também deveria ser objeto de

## REFERÊNCIAS

- Barrat, B. B. (1975). Training and transfer in combinatorial problem solving: the development of formal reasoning during early adolescence. *Developmental Psychology*, 11 (6), 700-704.
- Douglas, J. D. & Wong, A. C. (1977). Formal operations: Age and sex differences in Chinese and american children. *Child Development*, 48 (2), 689-692.
- Duckworth, E. (1964). *Piaget Rediscovered*. A report of the conference on cognitive studies and curriculum development. New Rochelle, N.Y.: Cornell Richard E. Ripple and Verne.
- Goodnow, J. J. & Bethon, G. (1966). Piaget's tasks: the effects of schooling and intelligence. *Child Development*, 37, 573-582.
- Inhelder, B. & Piaget, J. (1972). *De la lógica del pino a la lógica del adolescente*. Trad. Maria Tereza Cevasco. Buenos Aires: Paidós.
- Longeot, F. (1974). *L'Échelle de développement de la pensée logique*. Manuel d'Instructions. Issy - les - Moulineaux: Editions Scientifique et Psychotechniques.
- Macedo, L. (1979). Relações entre a ação e sua compreensão. *Anais da IX Reunião Anual de Psicologia*. Ricardo Goroyeb (Org.), pp. 1-7.
- Miller, J. P. (1978). Piaget, Kohlberg and Erikson developmental implications for secondary education. *Adolescence*, XIII (50), 237-250.
- Neimark, E. O. (1975). Intellectual Development during Adolescence. *Review of Child Development Research*, (vol. 4). F. D. Horowitz (Org.). Chicago: Univ. of Chicago Press, cap. 10, pp. 541-594.
- Odegaard, G. E. (1976). An investigation of Piaget's groupings: seriation and projective space. *Dissertation Abstracts International*, 36 (12), 7959-a.
- Piaget, J. (1976). *A equilibração ds estruturas cognitivas: Problema central do desenvolvimento*. Rio de Janeiro: Zahar.
- Piaget, J. (1978). *Fazer e compreender*. Trad. C. L. de P. Leite. São Paulo: Melhoramentos/EDUSP.
- Piaget, J. (1972). Intellectual evolution from adolescence to adulthood. *Human Development*, 15, 1-12.
- Piaget, J. (1977). *A tomada de consciência*. Trad. E. B. de Souza. São Paulo: Melhoramentos/EDUSP.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La genese de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1973). *A psicologia da criança*. Trad. Octávio M. Cajado. São Paulo: Difusão Européia do Livro (Coleção "Saber Atual").

- Schwebel, M. (1975). Formal operations in first-year college students. *The Journal of Psychology, 91*, 133-141.
- Siegel, S. (1981). *Estatística não-paramétrica para as ciências do comportamento*. Trad. Alfredo Alves de Farias. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil.
- Tomlinson-Keasey, C. (1972). Formal operations in females from eleven to fifty-four years of age. *Developmental Psychology, 6*, 364.