

Derivação do Modelo de Pluma Gaussiana empregando o Método de Transformadas Integrais

Charles R. P. Szinvelski, Lidiane Buligon, Gervásio A. Degrazia

*Universidade Federal de Santa Maria, PPGFis, Santa Maria, RS
e-mail: charless@mail.ufsm.br*

1. Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar a dedução da fórmula gaussiana para o prognóstico da dispersão tridimensional de escalares na atmosfera, sob hipóteses de homogeneidade e turbulência bem-desenvolvida. Devido a sua natureza analítica, este modelo tem um baixo custo computacional e apresenta resultados razoáveis quando confrontado a experimentos de dispersão. (Degrazia (1998)).

2. Dedução

A equação de difusão é obtida através da reunião da equação da Continuidade e a Lei de Fick (Machado(2004)), escritas por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{j} = -K_{\alpha} \nabla \rho \quad (1)-(2)$$

onde $\rho \equiv \rho(\vec{x}, t)$ e K_{α} é o coeficiente de difusão, sendo constante em cada direção. Assim a equação de difusão é expressa por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \quad (3)$$

A equação acima é conhecida como Modelo de Pluma Gaussiana.

A solução da equação acima pode ser obtida aplicando-se a Transformada de Fourier, com as condições de contorno dadas por:

Condição inicial:

$$\rho(x, y, z, t=0) = M \delta(x) \delta(y) [\delta(z-h) + \delta(z+h)] \quad (4)$$

Condição de contorno:

$$\rho(\pm\infty, 0) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \nabla \rho(\pm\infty, 0) \rightarrow 0 \quad (5)$$

Sendo que M é a massa do poluente emitido, δ é a função generalizada Delta de Dirac e h representa a altura do centro da pluma (Venkatram (1998)). Assume-se que o poluente é refletido no solo.

A Transf. de Fourier e sua inversa são dadas, respectivamente por:

$$F(\vec{\xi}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{x}, t) e^{-i\vec{\xi} \cdot \vec{x}} dx dy dz$$

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{\xi}, t) e^{i\vec{\xi} \cdot \vec{x}} d\xi_x d\xi_y d\xi_z \quad (6)-(7)$$

A derivada da equação (6) em relação ao tempo é:

$$\frac{dF(\vec{\xi}, t)}{dt} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} e^{-i\vec{\xi} \cdot \vec{x}} dx dy dz \quad (8)$$

Substituindo a equação (3) em (8), resulta

$$\frac{dF(\vec{\xi}, t)}{dt} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right] e^{-i\vec{\xi} \cdot \vec{x}} dx dy dz$$

Resolvem-se as integrais acima por integração por partes e utilizando-se a condição (5), obtém-se

$$\frac{dF(\vec{\xi}, t)}{dt} = \frac{-1}{(2\pi)^{3/2}} (K_x \xi_x^2 + K_y \xi_y^2 + K_z \xi_z^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{x}, t) e^{-i\vec{\xi} \cdot \vec{x}} dx dy dz$$

Pela equação (6) obtém-se a seguinte equação diferencial,

$$\frac{dF(\vec{\xi}, t)}{dt} = -(K_x \xi_x^2 + K_y \xi_y^2 + K_z \xi_z^2) F(\vec{\xi}, t) \quad (9)$$

Resolve-se (9) pelo método de separação das variáveis, resultando

$$F(\vec{\xi}, t) = F(\vec{\xi}, 0) e^{-(K_x \xi_x^2 + K_y \xi_y^2 + K_z \xi_z^2)t} \quad (10)$$

mas, $F(\bar{\xi}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\bar{x}, 0) e^{-i\bar{\xi} \cdot \bar{x}} dx dy dz$, e pela C.I. (4),

tem-se $F(\bar{\xi}, 0) = \frac{M}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{-i\xi_z h} + e^{i\xi_z h} \right]$, e substituindo-a em (10):

$$F(\bar{\xi}, t) = \frac{M}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{-i\xi_z h} + e^{i\xi_z h} \right] e^{[-(K_x \xi_x^2 + K_y \xi_y^2 + K_z \xi_z^2)]t}. \quad (11)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier, equação (7):

$$\rho(\bar{x}, t) = \frac{M}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-i\xi_z h} + e^{i\xi_z h} \right] e^{[-(K_x \xi_x^2 + K_y \xi_y^2 + K_z \xi_z^2)]t} e^{i\bar{\xi} \cdot \bar{x}} d\bar{\xi}$$

Resolvendo as integrais acima, obtém-se

$$\rho(\bar{x}, t) = \frac{M}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{K_x t}} e^{\left(\frac{-x^2}{4K_x t}\right)} \frac{1}{\sqrt{K_y t}} e^{\left(\frac{-y^2}{4K_y t}\right)} \frac{1}{\sqrt{K_z t}} \left[e^{\left(\frac{-(z-h)^2}{4K_z t}\right)} + e^{\left(\frac{-(z+h)^2}{4K_z t}\right)} \right]$$

Para grandes tempos de difusão pode-se utilizar que $2K_\alpha t = \sigma_\alpha^2$ com $\alpha = x, y$ e z , assim

$$\rho(x, y, z) = \frac{M}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sigma_x} e^{\left(\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}\right)} \frac{1}{\sigma_y} e^{\left(\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right)} \frac{1}{\sigma_z} \left[e^{\left(\frac{-(z-h)^2}{2\sigma_z^2}\right)} + e^{\left(\frac{-(z+h)^2}{2\sigma_z^2}\right)} \right]. \quad (12)$$

Para representar uma fonte pontual contínua, assumem-se condições estacionárias e as coordenadas são transformadas de tal modo que o vento médio coincida com a direção longitudinal x . Substitui-se a razão entre a massa e o parâmetro de dispersão na direção- x , $M/\sqrt{2\pi}\sigma_z$ (g/m) pela razão entre a taxa de emissão e a velocidade média do vento na direção- x , Q/\bar{u} (g/m), assim

$$\rho(x, y, z) = \frac{Q}{(2\pi)\bar{u}} \frac{1}{\sigma_y} e^{\left(\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right)} \frac{1}{\sigma_z} \left[e^{\left(\frac{-(z-h)^2}{2\sigma_z^2}\right)} + e^{\left(\frac{-(z+h)^2}{2\sigma_z^2}\right)} \right], \quad (13)$$

$$\text{tomando } \rho_y(x, z) = \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\sigma_z\bar{u}} \left[e^{\left(\frac{-(z-h)^2}{2\sigma_z^2}\right)} + e^{\left(\frac{-(z+h)^2}{2\sigma_z^2}\right)} \right], \quad (14)$$

a qual representa a concentração integrada lateralmente. Logo

$$\rho(x, y, z) = \frac{\rho_y(x, z)}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{\left(\frac{-y^2}{2\sigma_y^2}\right)}. \quad (15)$$

3. Conclusão

Se comparado com Modelos de Deslocamento Aleatório e LES, sua simplicidade, juntamente com os bons resultados gerados, o tornam uma prática ferramenta de teste para a validação de novas hipóteses e parametrizações aplicados em problemas de dispersão.

4. Agradecimento

Trabalho parcialmente financiado pela CAPES.

5. Referência bibliográfica

DEGRAZIA, G. A. Modelling dispersion from elevated sources in a planetary layer dominated by moderate convection. *Il Nuovo Cimento*, V. 21, p. 345-353, 1998.

MACHADO, K. D. *Equações diferenciais aplicadas à física*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 600 p, 2004.

VENKATRAM, A. Dispersion in the stable boundary layer. In: *Venkatram, A., Wyngaard, J. C. Eds. Lectures on Air Pollution Modeling*. American Meteorological Society, Boston, p.390, 1988.