Artigo Original *DOI:10.5902/2179-460X20248*

Ciência e Natura, Santa Maria v.38 Ed. Especial-
IX Workshop Brasileiro de Micrometeorologia, 2016, p. 326 – 329
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

CIÊNCIA e NATURA 35 anos

Desenvolvimento de um modelo matemático para descrever a dispersão de contaminantes em situações de meandro do vento horizontal

Development of a mathematical model to describe the contaminant dispersion in meandering conditions

Michel B. Stefanello[1], Gervásio A. Degrazia[2], Silvana Maldaner[3], Celene Buriol[4], Lilian P. Moor[1], Jonas C. Carvalho[5], Luca Mortarini[6], Umberto Rizza[7]

[1]Aluno(a) do PPGFis, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil
michelstefanello@gmail.com
[2]Professor do Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil
gervasiodegrazia@gmail.com
[3]Professora da Coordenadoria Acadêmica, Universidade Federal de Santa Maria-campus Cachoeira do Sul, Brasil
silvana.maldaner@gmail.com
[4]Professora do Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil
silvana.maldaner@gmail.com
[5]Professor da Faculdade de Meteorologia, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, Brasil
jonas.carvalho@ufpel.edu.br
[6]Pesquisador do Istituto di Scienzedell'Atmosfera e del Clima (CNR), Torino, Italy
l.mortarini@gmail.com
[7]Pesquisador do Istituto di Scienzedell'Atmosfera e del Clima, (CNR), Lecce, Italy
urizza@gmail.com

Resumo

Neste trabalho, deriva-se um modelo matemático para descrever a dispersão de contaminantes durante o fenômeno de meandro do vento horizontal, na camada limite planetária. O modelo emprega uma forma funcional heurística para a função de autocorrelação da velocidade do vento, que descreve os lóbulos negativos observados nos dados experimentais. O modelo é derivado a partir de uma nova solução para a equação de Langevin. As equações matemáticas, que representam as componentes longitudinais e laterais do vento descrevem o escoamento bidimensional provocado pelo meandro, podendo assim serem utilizadas para calcular a concentração de contaminantes que ocorrem em situações nas quais o meandro se manifesta de um modo dominante.

Palavras-chave: *Meandro, função de autocorrelação, equação de Langevin.*

Abstract

In this work it's derived a mathematical model to describe the meandering contaminants dispersion in the planetary boundary layer. The model employs a heuristic functional form for the velocity autocorrelation function which describes the negatives lobes observed in meandering data. Furthermore, the model is derived from the linearization of the Langevin equation. The mathematical equations, that represent the longitudinal and lateral wind components describe the bi-dimensional pattern of the meandering flow and can be utilized to calculate the contaminant concentrations occurring in situations in which the meandering phenomenon plays a decisive role.

Keywords: *Meandering, autocorrelation function, Langevin equation.*

1 Introdução

Para pequenas magnitudes da velocidade do vento $(\bar{u} \leq 1{,}5\, ms^{-1})$ observam-se oscilações de baixa frequência do vento horizontal. Estas oscilações geram funções de autocorrelações com lóbulos negativos (parâmetro de looping ($m \geq 1$) e tais características definem o fenômeno de meandro do vento horizontal (Mortarini et al., 2013; Mortarini e Anfossi, 2015). Portanto, modelar e calcular o campo de concentração de contaminante sujeito ao comportamento indeterminado da direção horizontal do vento é um problema bastante difícil, e que não pode ser resolvido por modelos tradicionais de dispersão. Tal complexidade, caracterizada pela ausência de previsibilidade direcional do vento, requer um estudo aprofundado do fenômeno de meandro. Recentemente, Moor et al. (2015) sugeriram uma nova forma funcional para reproduzir os lóbulos negativos observados em funções de autocorrelações experimentais, medidas diretamente de eventos de meandro do vento. Esta fórmula funcional foi construída pelo produto de uma função binomial, representando o efeito puramente turbulento da dispersão, pela função cosseno, cuja característica é modelar as oscilações horizontais do vento médio. A formulação matemática para esta expressão é representada na seguinte forma:

$$R\,(\tau) = \frac{\cos(q\tau)}{(1+p\tau)^2} \tag{1}$$

nesta expressão p e q são definidos pelas Eqs. (2) e (3), com T sendo uma escala de tempo característica da turbulência.

$$p = \frac{1}{(m^2+1)T} \tag{2}$$

$$q = \frac{m}{(m^2+1)T} \tag{3}$$

É importante ressaltar que o estudo de Moor et al. (2015), empregando dados de meandro medidos na Amazônia, demonstrou claramente que a nova função de autocorrelação (Eq. 1), reproduz adequadamente as funções observadas de autocorrelação do meandro do vento. Carvalho e Vilhena (2005) e Carvalho et al. (2013), empregando a expressão funcional proposta por Frenkiel (1953) resolveram a equação de Langevin para formular um modelo de dispersão estocástico para calcular a dispersão reforçada provocada pelo meandro do vento horizontal. No presente trabalho, seguindo a metodologia proposta Carvalho e Vilhena 2005, resolve-se a equação de Langevin usando a (Eq. 4) para se derivar as expressões matemáticas para as componentes horizontais u e v em situações caracterizadas pelo fenômeno de meandro do vento.

2 Desenvolvimento do modelo

Para modelar a dispersão de escalares passivos na camada limite planetária turbulenta, a equação de Langevin é normalmente resolvida seguindo as regras do cálculo de Itô.

O presente desenvolvimento, que será aplicado ao caso do meandro do vento horizontal consiste na linearização da equação diferencial estocástica de Langevin. Esta equação escrita na seguinte forma:

$$\frac{dU}{dt} + f(t)U = g(t) \tag{4}$$

apresenta como modo de solução da equação (4) a seguinte expressão:

$$U(t) = \frac{1}{e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}}\left[U(0) + \int_0^t g(s)\, e^{\int_0^s f(\tau)d\tau} ds\right] \tag{5}$$

assumindo-se U, U_0 e $f(\tau)$ como soluções complexas dadas por:

$$\begin{aligned} U &= u + iv \\ U_0 &= u_0 + iv_0 \end{aligned} \tag{6}$$

no qual u e v são respectivamente as partes reais e imaginarias de U, u_0 e v_0 são as partes reais e imaginárias de U_0 e $f(\tau)$ é dada pela seguinte relação:

$$f(\tau) = \frac{q sen(q\tau)}{\cos(q\tau)} + \frac{2p}{(1+p\tau)} + iq \tag{7}$$

cujas quantidades p e q são, respectivamente, as partes reais e imaginárias de $f(\tau)$. Neste ponto é importante ressaltar que a Eq. (7), é uma equação construída a partir de argumentos heurísticos empregando-se dados observacionais. Pode-se reescrever a exponencial na Eq. (5) da seguinte forma:

$$e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} = \frac{(1+pt)^2}{\cos(qt)} e^{iqt} \tag{8}$$

substituindo-se (8) e (6) na equação (5), resulta:

$$\begin{aligned} U(t) = {} & \frac{\cos(qt)}{(1+pt)^2} e^{-iqt}(u_0 + iv_0) + \\ & \frac{\cos(qt)}{(1+pt)^2} e^{-iqt} \int_0^t g(s) \frac{(1+ps)^2}{\cos(qs)} e^{iqs} ds \end{aligned} \tag{9}$$

a Eq. (9) pode ser escrita na seguinte representação:

$$\begin{aligned} U(t) = {} & \frac{\cos(qt)}{(1+pt)^2} e^{-iqt}(u_0 + iv_0) + \\ & \int_0^t g(s) \frac{(1+ps)^2}{\cos qs} \frac{\cos(qt)}{(1+pt)^2} e^{-iqt} e^{iqs} ds \end{aligned} \tag{10}$$

finalmente, aplicando a fórmula de Euler em (10), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} U(t) = {} & \frac{\cos(qt)}{(1+pt)^2} \left[\cos(qt) - isen(qt)\right] \\ & (u_0 + iv_0) + \int_0^t g(t) \frac{(1+ps)^2}{\cos qs} \frac{\cos(qt)}{(1+pt)^2} \\ & \left[\cos q(t-s) - isenq(t-s)\right] ds \end{aligned} \tag{11}$$

neste ponto, a Eq. (11) pode ser separada em uma parte real e imaginária e comparada com a Eq. (6), resultando:

$$\begin{aligned} u(t) = {} & \frac{\cos(qt)}{(1+pt)^2} \left[\cos(qt)u_0 + sen(qt)v_0\right] + \\ & \int_0^t g(s) \frac{\cos(qt)}{(1+pt)^2} \frac{(1+ps)^2}{\cos(qs)} \cos q(t-s) ds \end{aligned} \tag{12}$$

e

$$\begin{aligned} v(t) = {} & \frac{\cos(qt)}{(1+pt)^2} \left[\cos(qt)v_0 - sen(qt)u_0\right] - \\ & \int_0^t g(s) \frac{\cos(qt)}{(1+pt)^2} \frac{(1+ps)^2}{\cos(qs)} senq(t-s) ds \end{aligned} \tag{13}$$

Note que nas Eqs. (12) e (13), a Eq. (1) está presente. Esta fórmula tem sido proposta por Moor et al. (2015) para representar funções de autocorrelação observadas do meandro.

Considerando-se que a dispersão reforçada de contaminantes, pelo efeito de meandro, ocorre provocada pelas flutuações de baixa frequência do vento horizontal, as quais estabelecem a conexão entre as componentes longitudinal e lateral deste escoamento bidimensional, fica evidente, que a incorporação das Eqs. (12) e (13) em um modelo de dispersão pode reproduzir este transporte amplificado de escalares, que ocorre em situações de meandro do vento.

3 Conclusões

No presente estudo, propõe-se um modelo matemático para descrever a dispersão reforçada de contaminantes provocada pelo meandro do vento horizontal. O modelo é derivado a partir da linearização da equação de Langevin e emprega uma forma funcional heurística, que representa as funções de autocorrelação e seus lóbulos negativos. As expressões resultantes para as componentes longitudinal e lateral do vento descrevem o aspecto bidimensional do escoamento meandro e podem ser utilizadas para calcular a concentração de contaminantes em eventos de baixa velocidade do vento.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Referências

Carvalho, J. C. ; Vilhena, M. T. ; Degrazia, G. A. ; Sallet, M. A General Lagrangian Approach to Simulate Pollutant Dispersion in Atmosphere for Low-wind Condition. American Journal of Environmental Engineering, v. 3, p. 8-12, 2013.

Carvalho, J.C. and Vilhena, M. T. M. B. Pollutant dispersion simulation for low wind speed condition by the ILS method", Atmospheric Environment, vol.39, pp.6282-6288, 2005.

Frenkiel, F. N. Turbulent diffusion: mean concentration distribution in a flow field of homogeneous turbulence. Advances in Applied Mechanics, 3, 1953. 61–107.

Moor, L., Degrazia, G., Stefanello, M., Mortarini, L., Acevedo, O., Maldaner, S., Szinvelski, C., Roberti, D., Buligon, L., Anfossi, D. (2015). Proposal of a new autocorrelation function in low wind speed conditions. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 438, 286–292.

Mortarini, L., Anfossi, D. (2015). Proposal of an empirical velocity spectrum formula in low-wind speed conditions. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 141(686), 85–97.

Mortarini, L., Ferrero, E., Falabino, S., Trini Castelli, S., Richiardone, R., Anfossi, D. (2013). Low-frequency processes and turbulence structure in a perturbed boundary layer. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 139(673), 1059–1072