Artigo Original *DOI:10.5902/2179460X14595*

Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 555–566
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

CIÊNCIA e NATURA 35 anos

A solução das quadráticas e cúbicas na História
The solution of quadratic and cubic in History

Fábio Nicácio Souza [1]

[1]Mestre em Matemática ,Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco, Brasil
msnicacio@hotmail.com

Resumo

Por muito tempo a busca para solucionar equações instigou brilhantes mentes da história humana. Mecanismos aritméticos, geométricos e algébricos foram desenvolvidos trazendo avanços ao conhecimento matemático. Muitos desses recursos foram "simplificados" e hoje são abordados nas salas de aula, prevalecendo, dentre eles, a manipulação algébrica.
Este artigo, obtido do capítulo 1 da dissertação de mestrado em Matemática no Programa PROFMAT pela UFRPE e intitulado Uma abordagem Geométrica para as equações cúbicas, apresenta a partir da história da álgebra, uma maneira geométrica, já não usual, para encontrar a solução de equações de segundo e terceiro graus.

Palavras-chave: *Álgebra, Equações quadráticas, Equações Cúbicas, geométricas.*

Abstract

For a long time the search to solve equations pushed the brilliant minds in the human History. Arithmetical, geometric and algebraic mechanisms ere developed bringing advance to the mathematics knowledge. A lot of these resources were "simplified" and nowadays they're handled in the classroom overruling among them the algebraic manipulation.
This article, gotten from chapter 1 of Math Master dissertation in the PROFMAT Program from UFRPE and named A Geometrical Approach to the cubic Equations shows as from the history of algebra a geometrical manner, not usual anymore, to find the solution to second and third degree equations.

Key words: *Algebra, Quadratic Equations, Cubic Equations, Geometric.*

submissão: 2014-06-29 Aceito: 2014-12-17

1 Introdução

A resolução das equações causa, muitas vezes, dificuldades para a maioria dos alunos que não conseguem se familiarizar com uma linguagem própria da álgebra. Alguns ainda argumentam sua preferência por outras linguagens em detrimento da linguagem matemática. Sem, no entanto, efetuar um aprofundamento pedagógico dessa dificuldade, o desconhecimento da evolução dos processos utilizados na resolução das equações também contribui para certa antipatia da maioria dos estudantes com a álgebra.

Assim como muito do conhecimento humano, a álgebra foi construída ao longo do tempo com a contribuição de povos distintos e distantes. O curioso, apesar da constatação de uma evidente dificuldade em sala de aula para se proporcionar ao estudante algum domínio sobre a álgebra, é que essa linguagem tão abstrata deu simplicidade à resolução das equações, especialmente, quadráticas e cúbicas.

No entanto, a linguagem algébrica, tal como a conhecemos hoje, não foi a única maneira utilizada para a solução de equações. Além dos diferentes estágios pela qual passou até a forma como a conhecemos, a geometria também foi um recurso bastante utilizado para resolver problemas que em nossos dias são transformados em equações.

A proposta desse artigo é, portanto, fazer um relato histórico da álgebra e evidenciar soluções geométricas das equações quadráticas e cúbicas.

2 A solução das quadráticas e cúbicas na História

Várias civilizações, de diferentes lugares e diferentes épocas, colaboraram com o desenvolvimento da álgebra. Esse desenvolvimento passou por três estágios quanto à linguagem adotada na resolução de problemas. Nesselmann, em 1842, as diferenciou da seguinte forma:

- Álgebra retórica;
- Álgebra sincopada;
- Álgebra simbólica.

A primeira delas trata-se de linguagem que se utiliza apenas de palavras sem abreviações ou símbolos específicos. Já usada pelos babilônios, permaneceu em vigor até o século XV na Europa Ocidental. Apesar desse longo período de utilização da álgebra retórica, a linguagem sincopada foi introduzida por Diofanto aos 250 anos da era cristã e considerada uma importante contribuição à matemática. Essa linguagem consiste na utilização de abreviações para algumas quantidades e operações que se repetem com frequência. Por exemplo, para se denotar “uma incógnita ao cubo” usam-se as duas primeiras letras da palavra grega kubos (ΚΥΒΟΣ) da seguinte forma: K^{Y}. Para “o quadrado de uma incógnita” são usadas as duas primeiras letras da palavra dunamis (ΔΥΝΑΜΙΣ) que significa “potência”: Δ^{Y}. Assim, $x^3 + 13x^2 + 5x$, por exemplo, se escreveria da seguinte maneira:

$$K^{Y}\ \alpha\Delta^{Y}\ \iota\gamma\varsigma\varepsilon$$

Literalmente a expressão acima significa “incógnita ao cubo 1, incógnita ao quadrado 13, incógnita 5”.
Já a álgebra simbólica surgiu na Europa no século XVI, mas só veio se estabelecer em meados do século XVII. Ela consiste na adoção de símbolos. O maior impulso à evolução dessa linguagem moderna é creditado aos franceses René Descartes e Pierre de Fermat.

2.1. Resolução das Equações quadráticas no decorrer do tempo.

Registros mais antigos mostram que problemas envolvendo equações já eram objetos de estudos em tempos bastante remotos. Desde os babilônios, civilização fundada cerca de 2.300 a.C., que já se expressam problemas algébricos utilizando terminologia geométrica.

Exemplos:

1) “U*ma determinada área A, que é a soma de dois quadrados, tem o valor 1000. O lado de um dos quadrados é igual a 2/3 do lado do outro menos 10. Quanto mede os lados dos quadrados?*” (STRUIK, 1992, p. 58)

2) “*Qual o lado de um quadrado se a diferença entre área desse quadrado e seu lado é o número (sexagesimal) 14,30?*”
(HOWARD EVES, 2004, P.78)

Evidentemente, que as soluções para problemas desse tipo não usavam a linguagem adotada em nossos dias. A solução, por exemplo, para o segundo problema dado logo acima é:

Tome a metade da unidade. Multiplique essa metade por ela mesma. Some o resultado à diferença entre a área e o lado (14,30). O número obtido é o quadrado de 29;30 (base sexagesimal) que somado com a metade da unidade torna-se igual a medida do lado procurado do quadrado.
Trazendo para a linguagem moderna da matemática e utilizando o sistema decimal de numeração, esse problema consiste em resolver a equação quadrática

$$x^2 - px = q$$

pela fórmula

$$x = \sqrt{\left(p/2\right)^2 + q} + p/2.$$

Nesse caso, a solução é encontrada com $p = 1$ e $q = 870$.
Detalhando um pouco mais, observe que $870 = 14 \times 60^1 + 30 \times 60^0$. Então, convertendo 870 para a base sexagesimal obtemos 14,30, onde a vírgula é utilizada para separar as posições sexagesimais. Agora, vamos fazer passo-a-passo a resolução dada acima.

1º passo –
Tome a metade de 1:
Representamos a metade de um na base decimal por 0,5 e na base sexagesimal por 0;30 onde o ponto e vírgula é usado para separar a parte inteira da parte decimal.

2º passo –
Multiplique esse número (a metade de 1) por ele mesmo:
Ao multiplicarmos a metade de 1 por ele mesmo, encontramos a quarta parte da unidade. Na base decimal representamos por 0,25 e na base sexagesimal por 0;15.

3º passo –
Some o resultado obtido à diferença entre a área e o lado (870 na base decimal e 14,30 na base sexagesimal):
A soma na base decimal é: $870 + 0{,}25 = 870{,}25$.
Na base sexagesimal é: 14,30 + 0;15 = 14,30;15.

4º passo –
O número obtido é o quadrado de 29;30:
De fato. Na base decimal 870,25 é o quadrado de 29,5 ($29{,}5^2 = 870{,}25$) que na base sexagesimal é o mesmo que 29;30.

5º passo –
Some o último resultado à metade da unidade:
Somando esse último resultado com metade da unidade, obtemos o lado do quadrado. Na base decimal temos 29,5 + 0,5 = 30. Na base sexagesimal obtemos 29;30 + 0;30 = 30.

Na verdade, os babilônios tratavam com certa eficiência problemas de equações quadráticas que eram reduzidos a três casos gerais:

- $x^2 + px = q$
- $x^2 - px = q$
- $x^2 + q = px$

Não obstante à importância das grandes contribuições dos babilônios à Matemática, o vigor da atividade intelectual dessa civilização (e de outras que compunham a civilização potâmica) foi perdendo força. Com esse declínio a efervescência cultural foi sendo paulatinamente transferida para outros centros.
Mas essa mudança não se deu de forma abrupta, como relatado em *História da Matemática* por Carl B. Boyer (1996, p. 30).
"Para indicar essa mudança nos centros de civilização, o intervalo entre aproximadamente 800 a.C. e 800 d.C. é às vezes chamado Idade Talássica (isto é, "idade do mar"). Não houve, é claro, uma quebra brusca marcando a transição da liderança intelectual dos vales dos rios Nilo, Tigre e Eufrates para a beira do Mediterrâneo, pois o tempo e a história fluem continuamente, e as causas em variação são associadas a causas antecedentes."
Ainda neste mesmo parágrafo, relata:
"Os estudiosos egípcios e babilônios continuaram a produzir textos em papiro e cuneiforme durante muitos séculos após 800 a.C.; mas, enquanto isso, uma nova civilização se preparava rapidamente para assumir a hegemonia cultural, não só na região mediterrânea mas, finalmente, também nos principais vales fluviais."
Então, nesse primeiro momento da transição, os gregos assumiram o papel de maior importância.
Dos babilônios os pitagóricos herdaram a "álgebra aritmética". Mas ela foi, em algum momento da história grega, substituída pela "álgebra geométrica". Os métodos das proporções e o da aplicação das áreas, provavelmente originário dos pitagóricos, eram os métodos utilizados na álgebra geométrica para a resolução de equações lineares e quadráticas.
Do método das proporções vem:
$a: x = x: b \quad \Rightarrow \quad x^2 = a.b$, onde a e b são as medidas de segmentos. Essa resolução é feita a partir da seguinte construção:
Tomamos os segmentos de medidas a e b vistos na figura 1.

Figura 1: Segmentos de medidas *a* e *b*.

Traçamos os segmentos de medias a e b numa mesma reta de forma que tenham um único ponto comum. Em seguida encontramos o ponto médio do segmento formado entre os extremos não comuns dos segmentos de medidas a e b e traçamos uma circunferência por essas extremidades e centro no ponto médio determinado. Construímos uma perpendicular pelo ponto comum dos segmentos até atingir a circunferência. Esse segmento tem medida x.

A demonstração é simples. Basta observar que o triângulo ABC, inscrito na semicircunferência (figura 2), é um triângulo retângulo em C e utilizar a seguinte relação métrica:

Dado um triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

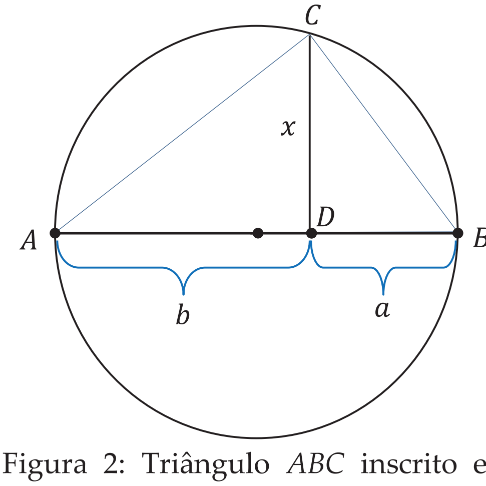

Figura 2: Triângulo *ABC* inscrito em semicircunferência

Ou seja, $x^2 = a \times b$.

Já o método da aplicação das áreas resolve equações quadráticas da forma $x^2 + ax + b^2 = 0$ ou $x^2 - ax + b^2 = 0$.

Esse método é encontrado no livro VI dos *Elementos* de Euclides, mais particularmente nas proposições 28 e 29. Para exemplificar, tomemos um caso particular das resoluções obtidas das construções mais gerais dos *Elementos*. Para tanto, façamos algumas considerações:

Seja um paralelogramo $ABCD$ e um ponto E entre A e B como mostra a figura 3. Por E traçamos uma paralela aos lados AD e BC de forma que intercepte CD em F. Dizemos que o paralelogramo $AEFD$ está *aplicado ao segmento* AB ficando aquém pelo paralelogramo $EBCF$.

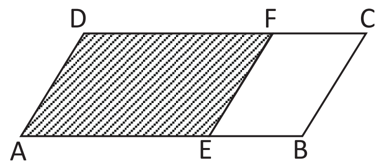

Figura 3: Paralelogramo *ABCD*.

Tomemos, então, o caso particular de construir um retângulo aplicado a um segmento $AB = a$ cuja área é igual à área de um quadrado de lado b com $a > 2b$. Veja figura 4.

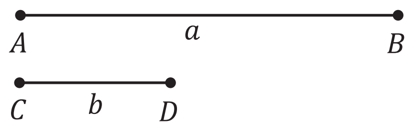

Figura 4: Segmentos de medidas a e b com $a > 2b$.

1º passo:

Determinamos o ponto médio C do segmento AB. Em seguida traçamos uma perpendicular à AB por C, e nela marcamos o ponto D de forma que $CD = b$. Observe figura 5.

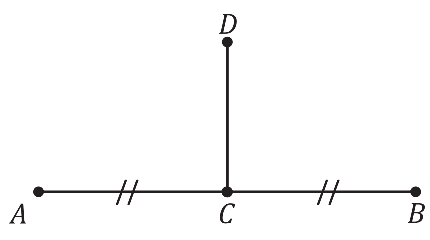

Figura 5: $AB \perp CD = b$.

2º Passo:
Com centro em D e raio $\frac{a}{2}$ traçamos um arco de circunferência que intercepte o segmento AB no ponto E. Veja figura 6. Com isso determinamos o segmento $EB = x$, a medida procurada.

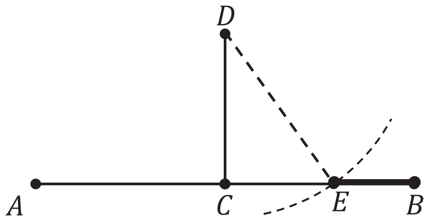

Figura 6: $EB = x$

3º Passo:
Sobre AB construímos o retângulo $AEGH$ e o quadrado $EBFG$. Dizemos que o retângulo $AEGH$ está aplicado ao segmento AB aquém pelo quadrado $EBFG$. Veja figura 7.

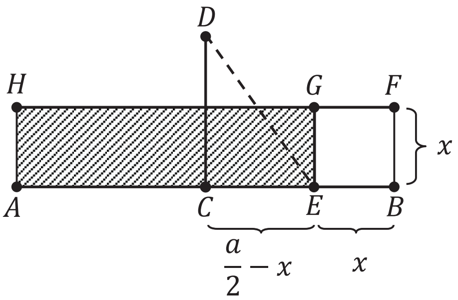

Figura 7: Retângulo $AEGH$ aplicado ao segmento AB aquém pelo quadrado $EBFG$.

Observe que $EB = EG = x$ e $AE = a - x$, portanto o retângulo $AEGH$ tem área $(a - x)x$. Veja que essa área é igual à área do quadrado de lado b, ou seja, $ax - x^2 = b^2$. De fato, do triângulo CDE, retângulo em C, temos:

$$(DE)^2 = (DC)^2 + (CE)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} - ax + x^2 \quad \Rightarrow$$

$$0 = b^2 - ax + x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{ax - x^2 = b^2}$$

A contribuição grega para a matemática também influenciou outras culturas. O árabe al-Khowarizmi, por exemplo, influenciado pela álgebra geométrica dos gregos, resolveu, metodicamente, equações do segundo grau. Alguns, inclusive, acham-no merecedor do título de "pai da álgebra" ao invés do grego Diofante. Em sua obra Al-Jabr, em clara organização sistemática, apresenta resolução de equações, especialmente do segundo grau com a complementação de quadrados. Veja como exemplo, a solução da equação $x^2 + 10x = 39$:

1º Passo:
Para resolver a equação $x^2 + 10x = 39$, adota-se um quadrado de lado x cercado por quatro retângulos de área $\frac{10x}{4}$ conforme a figura 8. A soma dessas áreas corresponde a seguinte representação algébrica: $x^2 + 4\frac{10}{4}x = x^2 + 10x$.

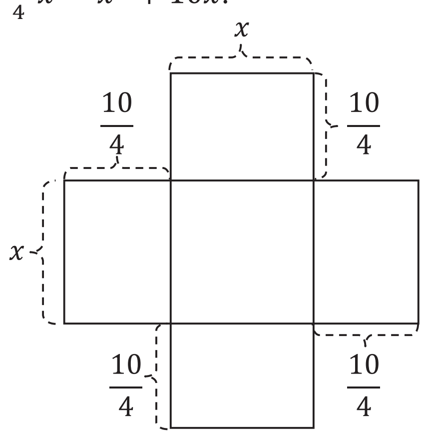

Figura 8: Representação geométrica para a expressão $x^2 + 10x$.

2º Passo:
Em seguida, como mostra a figura 9, adicionam-se quatro quadrados de lado $\frac{10}{4}$ completando o quadrado maior de lado $x + 5$.

$$l = x + 2\frac{10}{4} = x + 5$$

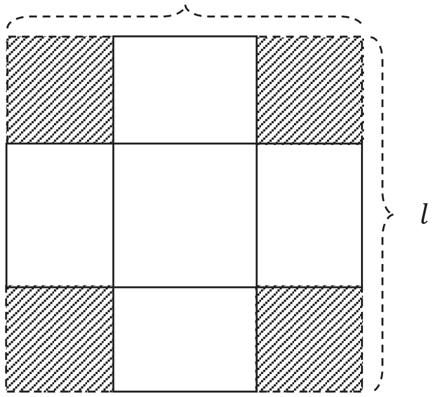

Figura 9: Quadrado de lado $x + 5$.

O que temos então é:

$$x^2 + 10x = 39$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 + 10x + 4\left(\frac{10}{4}\right)^2 = 39 + 4\left(\frac{10}{4}\right)^2$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$
$$\Downarrow$$
$$(x + 5)^2 = 64$$
$$\Downarrow$$
$$x = \sqrt{64} - 5$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{x = 3}$$

As soluções aceitas eram as positivas.
Mais tarde, soluções para equações do segundo grau puderam ser obtidas a partir da generalização da ideia adotada acima. Ou seja, dada um a equação da forma $x^2 + px + q = 0$, com p e q reais quaisquer, ela pode ser escrita como $(x + p/2)^2 = q + p^2/4$, ou ainda, $x = -p/2 \pm \sqrt{q + p^2/4}$.

2.2. Resolução das Equações cúbicas no decorrer do tempo.

Da mesma forma que as quadráticas, os babilônios também esboçaram interesse pelas cúbicas. Eles usavam uma tábua com os valores de $n^3 + n^2$ para n variando de 1 a 30. Ela era aplicada para resolver equações da forma $x^3 + px^2 = q$. Por exemplo:

1) Resolver a equação $x^3 + 2x^2 - 3136 = 0$.
Consultando a sequência de números $n^3 + n^2$, observamos que para $n = 14$ temos $n^3 + n^2 = 2744 + 196 = 2940$. Fazendo uma pequena variação na expressão $n^3 + n^2$ obtemos $n^3 + 2n^2 = 2744 + 392 = 3136$.

Talvez os babilônios não fizessem qualquer variação em $n^3 + n^2$ e possivelmente adotassem outro procedimento, como segue:
Tomando $x = 2n$, temos:
$x^3 + 2x^2 = 3136 \Rightarrow 8n^3 + 8n^2 = 3136 \Rightarrow n^3 + n^2 = 392$. Consultando a tabela com os valores de $n^3 + n^2$ obtemos $n = 7$. Dai que $x = 14$.
De qualquer maneira a tábua contendo a expressão $n^3 + n^2$ era útil para resolver alguns tipos especiais de equações cúbicas.
Dos gregos vem o problema da duplicação do cubo, ou seja, determinar a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado. Quem deu o primeiro

passo na resolução desse problema foi Hipócrates (400 a.C.) reduzindo-o à construção de duas médias proporcionais entre segmentos de medidas s e $2s$:

$$s: x = x: y = y: 2s$$

Eliminando y, obtém-se:

$$x^3 = 2s^3$$

Mas quem deu uma das soluções mais interessantes foi Arquitas, geómetra do séc. IV a.C., encontrando a intersecção entre uma cone circular reto, um toro de diâmetro interior zero e um cilindro reto.

Apesar dessas contribuições, foi Omar Khayyam (1050 - 1122), um árabe tido como cientista por uns e poeta por outros, o primeiro a trabalhar com todas as equações cúbicas que tivessem apenas raízes positivas. Ele acreditava que não era possível encontrar soluções aritméticas para as equações cúbicas gerais. Seu método de resolução das equações de terceiro grau consistia em construir cônicas que se intersectassem. Esses pontos comuns eram as raízes positivas das equações. Em *História da Matemática* de Carl B. Boyer (1996, p. 164) encontramos:

"Como seus predecessores árabes, Omar Khayyam dava para as equações do 2º grau tanto soluções aritméticas quanto soluções geométricas: para as equações cúbicas gerais, ele acreditava (erradamente, como se demonstrou mais tarde no século dezesseis) que soluções aritméticas eram impossíveis; por isso deu apenas soluções geométricas. A ideia de usar cônicas que se cortam para resolver cúbicas tinha sido usada antes por Menaecmus, Arquimedes e Alhazen, mas Omar Khayyam deu o passo importante de generalizar o método para cobrir todas as equações de terceiro grau (que tinham raízes positivas). Quando numa obra anterior encontrou uma equação cúbica ele observou especificamente: 'Isso não pode ser resolvido por geometria plana – isto é, usando apenas régua e compasso – pois contém um cubo. Para a solução precisamos de secções cônicas' ".

Para exemplificar vejamos o problema encontrado em *Introdução à História da Matemática* de Howard Eves (2007, p. 278) que, em suma, generaliza através de métodos geométricos a solução das cúbicas na forma $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$.

Problema:

Dados a, b e c como comprimentos de segmentos de reta (figura 10), determine o comprimento x de um segmento para o qual a seguinte relação $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ esteja satisfeita.

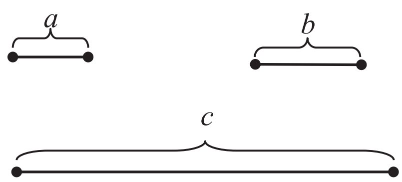

Figura 10: Segmentos de medidas *a*, *b* e *c*.

1º Passo:

Inicialmente vamos construir um segmento AB cujo comprimento é $\frac{a^3}{b^2}$. Para tanto precisamos determinar um segmento z de modo que a seja a média geométrica de b e z, ou seja, $z = \frac{a^2}{b}$.

- Constrói-se o triângulo retângulo de catetos $MN = b$ e $NP = a$;
- Traça-se a mediatriz da hipotenusa de forma que intercepte um dos catetos em Q;
- Do triângulo isósceles MQP ($MQ \equiv QP$) traça-se uma semicircunferência interceptando em R o prolongamento do cateto contendo Q. O segmento NR é igual a z como se vê logo abaixo:

Observe na figura 11 que o triângulo retângulo MPR está inscrito na semicircunferência de raio MQ. Então, $NP^2 = MN \times NR$. Daí que:

$a^2 = b \times z \quad \Rightarrow \quad z = \frac{a^2}{b}$.

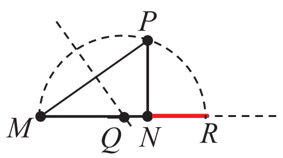

Figura 11: Triângulo MPR inscrito na semicircunferência de raio MQ.

Agora podemos determinar o segmento $AB = m$ tal que $b \times m = a \times z$.

- Numa mesma semirreta traçamos os segmentos consecutivos $MN = b$ e $NP = a$;
- Numa outra semirreta com origem em M, traçamos o segmento $MS = z$;
- Por P passamos uma paralela ao segmento NS interceptando a semirreta MS em T. O segmento ST é igual a m.

Observe na figura 12 que: $\frac{MN}{MS} = \frac{NP}{ST}$.

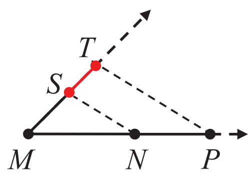

Figura 12: $ST = m$.

Pelo *Teorema de Tales*:

$$\frac{b}{z} = \frac{a}{m} \quad \Rightarrow \quad b \times m = a \times z$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{a^3}{b^2}$$

2º Passo:
Construir uma semicircunferência de diâmetro $m + c$ e traçar um segmento perpendicular a esse diâmetro pelo ponto comum dos segmentos de comprimento de m e c interceptando a semicircunferência em D. Em BD marque $BE = b$ e trace uma paralela à reta AC interceptando BD no ponto E. Veja figura 13. Denominemos de F um ponto qualquer dessa paralela, desde que diferente do ponto E, e chamemos a paralela de EF.

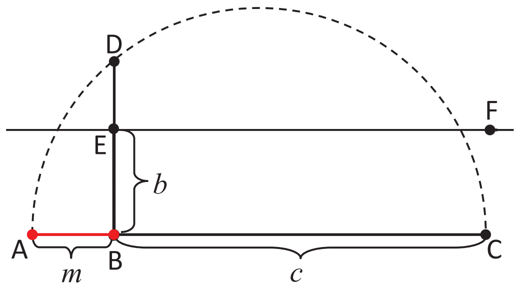

Figura 13: $EF \,//\, AC$.

3º Passo:
Determinar em BC o ponto G tal que $(BG)(ED) = (BE)(AB)$

- Inicialmente construímos o segmento $BA = m$;
- Na semirreta BA marcamos o ponto K de forma que $BK = ED$;
- Por um ponto E, fora de BK, construímos a semirreta $BE = b$;
- Pelo ponto A traçamos uma paralela à EK encontrando BE em G.

Observe na figura 14 que:

$$\frac{BG}{BA} = \frac{BE}{BK} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{BG}{AB} = \frac{BE}{ED}$$

Dai que:

$(BG)(ED) = (BE)(AB)$

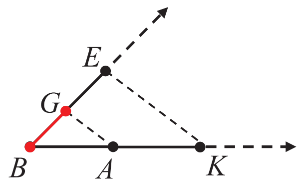

Figura 14: Construção do segmento BG.

Então, com um compasso marcamos o segmento BG em BC (Figura 15).

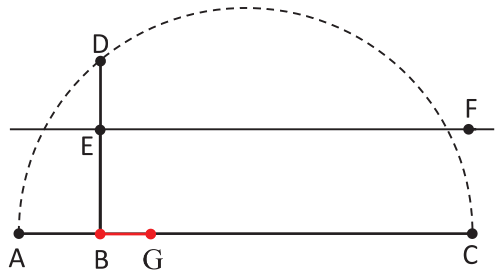

Figura 15: Transferindo BG para AC.

4º Passo:
Na figura 16 construímos o retângulo $BGHD$ e determinamos o ponto N da intersecção entre os segmentos GH e EF. Pelo ponto H traçamos uma hipérbole equilátera com assíntotas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ interceptando a semicircunferência em J.

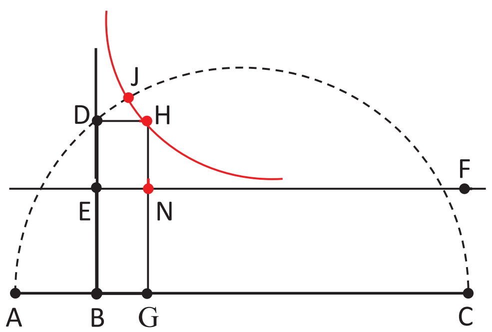

Figura 16: Determinação do ponto J.

5º Passo:
Pelo ponto J traçamos uma paralela ao segmento BD interceptando as paralelas EF no ponto K e AC no ponto L. O segmento $BL = x$.

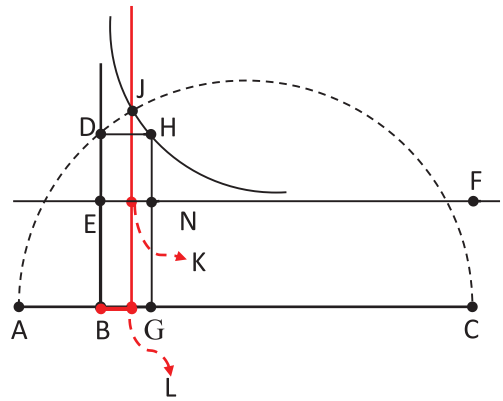

Figura 17: Determinação do segmento $BL = x$.

Vamos demonstrar que, de fato, $BL = x$.

Demonstração:

Primeiro determinamos os retângulos $ENHD$ e $EKJQ$. Como os pontos J e H pertencem à hipérbole equilátera, o produto de suas distâncias às assíntotas é uma constante. Isso quer dizer que $(EK) \times (KJ) = (EN) \times (NH)$. Ocorre que $EN = BG$ e $NH = ED$, então temos a seguinte igualdade: $(EK) \times (KJ) = (BG) \times (ED)$. Como, por construção, $(BG) \times (ED) = (BE) \times (AB)$, podemos concluir dessas duas últimas igualdades que:

$$\boxed{(EK) \times (KJ) = (BE) \times (AB)} \qquad (\text{I})$$

Veja a figura 18 logo abaixo.

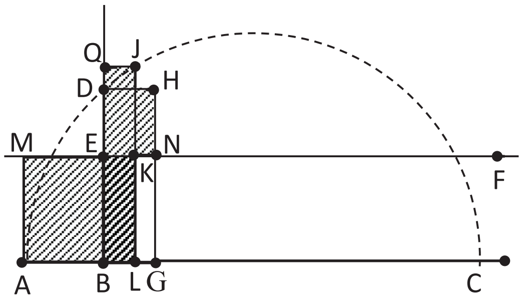

Figura 18: Demonstração geométrica de $BL = x$

Observe ainda que o retângulo $BLKE$ é uma área comum aos retângulos $ALKM$ e $BLJQ$. Mas, pela igualdade (I), $ABEM$ e $EKJQ$ são retângulos de mesma área. Então determinamos que:

$(AL) \times (BE) = (BL) \times (LJ)$, ou ainda,

$$\boxed{\frac{(BE)}{(BL)} = \frac{(LJ)}{(AL)}} \qquad \text{(II)}$$

Do triângulo retângulo AJC (inscrito numa semicircunferência) temos:

$$\boxed{(LJ)^2 = (AL) \times (LC)} \qquad \text{(III)}$$

Elevando a igualdade (II) ao quadrado e nela substituindo a igualdade (III), obtemos:

$$\frac{(BE)^2}{(BL)^2} = \frac{(LJ)^2}{(AL)^2} = \frac{(AL) \times (LC)}{(AL)^2} = \frac{(LC)}{(AL)}$$

Ou seja,

$$\boxed{(BE)^2 \times (AL) = (BL)^2 \times (LC)} \qquad \text{(IV)}$$

Mas,

- $BE = b;$
- $BL = x$
- $AL = AB + BL = m + x = \frac{a^3}{b^2} + x;$
- $LC = BC - BL = c - x$

Então, substituindo em (IV):

$$b^2 \cdot \left(\frac{a^3}{b^2} + x\right) = x^2 \cdot (c - x)$$

$$\Downarrow$$

$$a^3 + b^2x = cx^2 - x^3$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x^3 + b^2x + a^3 = cx^2}$$

Apesar do brilhantismo necessário para desenvolver uma solução tão bela, apenas séculos depois, em 1545, é que, através da publicação de *Ars Magna* de Girolamo Cardano (1501 - 1576), a resolução das cúbicas torna-se um conhecimento comum. Porém, não foi este autor o descobridor da solução algébrica das cúbicas. Scipione del Ferro (1465 - 1526) foi o primeiro a obter uma solução não-geométrica para as equações da forma $x^3 + px = q$. Não chegou a publicar sua descoberta, mas antes de falecer revelou sua brilhante solução a um de seus discípulos, Antônio Maria Fior. Este, ciente da importância do que tinha em mãos, tentou tirar proveito para se autopromover em uma competição travada com um dos maiores matemáticos italianos da época, Niccolo Fontana (1500 - 1557), conhecido como Tartaglia, que conseguiu obter uma solução mais geral sem que seu oponente tivesse conhecimento. O resultado desse embate foi o triunfo de Tartaglia ao resolver todas as questões propostas por Fior enquanto este não resolveu nenhuma das que foram propostas pelo vencedor. A questão é que

Cardano sob juramento de não publicar a solução algébrica encontrada por Tartaglia conseguiu convencê-lo a revelar sua descoberta e, pouco tempo depois, quebrar o juramento e publicá-la em *Ars Magna*. E assim, a solução algébrica que Tartaglia desenvolveu ficou conhecida como fórmula de Cardano.

Conclusão

Embora as equações sejam muitas vezes apresentadas em sala de aula desconectadas de problemas reais, teve como motivação para seu surgimento o desejo humano de superar dificuldades impostas pelo cotidiano. Aliás, esse desejo de superação é motivação para o surgimento da própria Matemática. No caso de muitos dos problemas do cotidiano, estudos mostram uma riqueza de linguagem algébrica e geométrica que foi aplicada ao longo do tempo para a resolução das equações deles decorrentes, especialmente das equações de grau dois e de grau três.

Agradecimentos

À UFRPE que disponibilizou recursos para que diversos professores tivessem no estado de Pernambuco a oportunidade de se qualificar e obter o grau de mestre em Matemática através do PROFMAT.
À CAPES que permitiu através de financiamento de bolsas que pudéssemos adquirir livros e custear todas as despesas necessárias durante o curso.
À SBM e ao IMPA que idealizaram e, junto com as universidades parceiras, implementaram o PROFMAT - mestrado profissionalizante em rede nacional – dando substancial contribuição à educação matemática no Brasil.
E, principalmente, a Deus, aquele em quem deposito minha fé e que tudo ordenou para a realização dessa conquista.

Referências

MILIES, C P. *A Solução de Tartaglia para a Equação do Terceiro Grau*. Revista do Professor de Matemática, nº 25, 1º semestre de 1994. São Paulo – 1994.

BIRKHOFF, G.; MACLANE, S. *Álgebra Moderna Básica*. Tradução Carlos Alberto Aragão de Carvalho. 4ª edição. Rio de Janeiro. Editora Guanabara Dois S.A – 1980.

BOYER, C.B. *História da Matemática*. Tradução Elza F. Gomide. 2º Edição. São Paulo. Editora Edgard Blücher – 1996.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução Higyno H. Domingues. São Paulo – 2007.

GARBI, G.G. *O Romance das Equações Algébricas*. São Paulo. MAKRON *Books* do Brasil Editora Ltda – 1997.

LIMA, E. et al. *Matemática do Ensino Médio*, volume 3, 6ª edição. Rio de Janeiro. SBM – 2006.