

O estudo do limite de uma função – O que disseram os alunos?

DOI 10.26512/lc.v24i0.21852

Maria Bethânia Sardeiro dos Santos¹
Saddo Ag Almouloud²

Resumo

Este artigo apresenta parte dos resultados obtidos em uma pesquisa de doutorado que teve como objetivo trazer novas reflexões relacionadas ao conceito de limite de uma função. Há um número grande de trabalhos de investigação com diferentes abordagens e metodologias que procuraram descobrir os motivos para o fracasso generalizado dos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Mas, há ainda poucos trabalhos que versam sobre o olhar do aluno universitário acerca dessa dificuldade. Apresentaremos nesse texto, especificamente, os dados dos alunos referentes ao conceito de limite com a esperança de que esses dados possam sensibilizar os professores que ensinam essa disciplina.

Palavras-chaves: Limite. Percepção do professor universitário. Dificuldade. Aprendizagem.

- 1 Licenciada em Matemática pelo IME-UFG, mestre em Educação pela FE-UFG, doutora em Educação Matemática pela PUC-SP. Coordenadora de estágio da Licenciatura em Matemática, Coordenadora Adjunta do CIAR. Desenvolve projetos relacionados ao ensino e a aprendizagem de matemática no Ensino Superior relacionados à UFGInclui. Seus maiores interesses relacionam-se com a Linguagem e a Matemática, Formação de professores e os problemas de aprendizagem da matemática no Ensino Superior – *e-mail*: bethania@ufg.br
- 2 Concluiu o doutorado em Mathematiques et Applications em Univesite de Rennes I – França. Assistente doutor – PUC/SP, assistente doutor da Fundação Santo André. Consultor *ad hoc* da Fundação de Amparo a Pesquisa do estado de São Paulo da Capes, bolsista pesquisador do CNPq. É coordenador do Programa de Estudos Pós-graduados da PUC/SP desde 2013. Atua na área de Educação com ênfase em educação matemática – *e-mail*: addoag@pucsp.br

Abstract

This article presents part of the results obtained in a doctoral research that had as objective to bring new reflections related to the concept of limit of a function. There are a large number of research works with different approaches and methodologies that seek to discover the reasons for the widespread failure of students in the discipline of Differential and Integral Calculus. But there are still few who work on the college student's look at this difficulty. We will present in this text, specifically, the data of the students regarding the concept of limit with the hope that they can sensitize the teachers who teach this discipline.

Key-words: Limit. Perception of the university professor. Difficulty. Learning.

Resumen

Este artículo presenta parte de los resultados obtenidos en una investigación de doctorado que tuvo como objetivo traer nuevas reflexiones relacionadas al concepto de límite de una función. Hay un número grande de trabajos de investigación con diferentes enfoques y metodologías que buscaron descubrir los motivos para el fracaso generalizado de los alumnos en la disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Pero todavía hay pocos que trabajan sobre la mirada del alumno universitario sobre esta dificultad. Presentaremos en este texto, específicamente, los datos de los alumnos referentes al concepto de límite con la esperanza de que los mismos puedan sensibilizar a los profesores que enseñan esa disciplina.

Palabras claves: Límite. Percepción del profesor universitario. Dificultad. El aprendizaje.

Résumé

Cet article présente une partie des résultats obtenus dans une recherche doctorale ayant pour objectif d'apporter de nouvelles réflexions liées au concept de limite d'une fonction. Il existe un grand nombre de travaux de recherche avec différentes approches et méthodologies qui cherchent à découvrir les raisons de l'échec généralisé des étudiants dans la discipline du calcul différentiel et intégral. Cependant il y en a encore peu qui travaillent sur le regard de l'étudiant sur cette difficulté. Nous présenterons dans ce texte, en particulier, les données des étudiants concernant le concept limite avec l'espoir qu'ils puissent sensibiliser les enseignants qui enseignent cette discipline.

Mots-clés: Limite. Perception du professeur d'université. Difficulté Apprendre

O questionário

No trabalho de elaboração do questionário, procuramos ser abrangentes com relação aos conteúdos relacionados ao conceito de limite. Dividido em três partes, nosso objetivo foi o de trabalhar com diferentes registros ao longo deste estudo. Aqui, apresentaremos duas dessas partes.

Gostaríamos de ter aplicado o questionário a todas as turmas do curso de Licenciatura em Matemática que já haviam cursado a disciplina Cálculo Diferencial e Integral na UFG, mas como dependíamos da disponibilidade dos professores, conseguimos aplicar o instrumento de pesquisa em três turmas. A primeira turma foi a da disciplina Introdução à Teoria dos Números. Os alunos que cursam essa disciplina encontram-se no terceiro período do curso de Matemática ou segundo ano. A segunda turma era composta de alunos de diferentes períodos, pois a disciplina fazia parte do núcleo livre Tópicos da Educação Matemática. O terceiro e último grupo de alunos que respondeu ao questionário assim o fizeram durante a aula de Tópicos - Tecnologia. As duas primeiras turmas do período noturno e a última turma do período vespertino.

Caracterização das turmas

Identificamos as turmas com as letras A, B e C e cada resposta dos alunos será identificada com a letra da turma e um número. Os elementos que solicitamos foram: idade, sexo e ano de conclusão do curso de Cálculo Diferencial e Integral. De todos

os informantes, apenas dois, no momento da aplicação do questionário, afirmaram ainda estar cursando a disciplina de Cálculo e uma aluna já estava cursando mestrado. Em uma das turmas, um aluno com deficiência visual respondeu, com a ajuda da pesquisadora, a primeira parte da pesquisa. Mas como não haveria a possibilidade de ele responder às questões que envolviam gráficos, fizemos a opção de eliminar essas respostas da amostra.

A turma A era composta por 25 alunos, 19 alunos do sexo masculino e 6 do sexo feminino. A média de idade obtida foi de 22 anos. A turma B composta por 29 alunos, 17 alunos do sexo masculino e 12 do sexo feminino. A média de idade obtida foi de 25 anos. A turma C composta por 8 alunos, 5 alunos do sexo masculino e 3 do sexo feminino. A média de idade obtida foi de 25 anos. O aluno mais novo tinha a idade de 19 anos e o mais velho a idade de 36 anos. Outros três alunos ficaram fora dessa amostra porque já haviam respondido o questionário em outra disciplina.

Qual foi a nossa primeira impressão com relação aos questionários dos alunos?

Quando olhamos os questionários dos alunos pela primeira vez (as três turmas totalizaram 62 questionários respondidos), chamou-nos a atenção às rasuras e as reescritas. Alguns deles (11 alunos da turma A, 16 da turma B e 4 da turma C) deixaram marcas que evidenciaram o trabalho de rever/reescrever. Do total de questionários analisados, quase a metade deles (32 questionários) apresentou essas marcas.

Havia também as respostas em branco que serão apresentadas ao final das análises. Vygotsky (1998a) defende que quando sabemos algo sempre encontramos uma palavra para expressar esse saber. A ausência dessas palavras poderia se configurar em não saber ou saber incompleto. A ausência poderia se configurar também em falta, algo que não encontrou um sentido para o aluno e que, talvez por isso, tenha se perdido. Uma resposta não dada pode ser interpretada como o silêncio sobre aquele assunto.

A primeira parte do questionário se constituiu de sete questões abertas. Todas as perguntas tiveram o intuito de verificar o que o aluno recordaria do estudo de limite de uma função, bem como analisar como ele descreveria alguns elementos mais simbólicos.

A segunda parte foi constituída de duas questões nas quais o aluno teria que analisar gráficos para escolher a melhor resposta. Pretendíamos verificar o que se modificaria na resposta desse aluno com a utilização de outro registro.

A terceira e última parte tratou, especificamente, da definição formal de limite. Nessa

questão, procuramos averiguar se o aluno teria algum conhecimento da definição de Weierstrass, como a interpretaria. Solicitamos que ele comparasse duas definições e nos apontasse a diferença entre elas. Nosso intuito era o de verificar o domínio da leitura do simbólico/formal dos alunos. Essa terceira parte não fará parte desse trabalho por exigir uma análise mais detalhada – e isso, por si só, geraria um texto mais longo.

Questionário para os alunos – as questões abertas – parte I

A primeira questão apresentada foi: “como você explicaria o limite de uma função?” O nosso objetivo era averiguar quais elementos o aluno utilizaria para falar do limite: se o faria de maneira independente ou se o relacionaria a outro conceito, como o de derivada ou continuidade. Na perspectiva de Vygostky (1998a), entender um conceito está além de simplesmente defini-lo. Quanto mais informações e relações o aluno estabelece, mais compreensão ele tem do conceito. Outro objetivo era verificar se eles utilizariam termos como “tende a” e se mencionariam a existência do limite num determinado ponto.

Nos estudos de pesquisas a respeito do limite, encontramos relatos que os alunos faziam a associação do limite com o “tender a”. Queríamos verificar se isso se manteria ou não – com esses alunos – ou se eles trariam outros elementos relacionados ao conceito de limite de uma função. Há vários detalhes relacionados ao conceito de limite de uma função, um deles é que a definição de limite de uma função é local, e não vimos estudos que procurassem verificar se o aluno teria essa percepção ou não.

Análise dos resultados da questão 1

Os resultados encontrados por nós, para essa questão, são semelhantes aos encontrados por Tall (1978), Cornu (1983), Jordaan (2005), Abreu (2011), Amorim (2011) e Guerra (2012). Nesses trabalhos, os alunos indicaram que o limite era um número que a função não atingiria. Os alunos também viram o limite como fronteira e como algo que descreve o valor da função quando o valor de x se move em direção a certo ponto. Esse resultado coincidiu parcialmente com os nossos. Nesses trabalhos, os alunos viram o limite como inatingível e também como a imagem da função no ponto considerado (JORDAAN, 2005), (ABREU, 2011), (GUERRA, 2012). Dos dados por nós analisados, apenas três alunos viram o limite como a imagem da função no ponto. Foi possível encontrar outros elementos nas respostas dadas pelos alunos.

Nas nossas primeiras leituras das respostas, as palavras que mais se repetiram foram: valor (valores, número) e aproximação (tende a, tende para). Alguns alunos chegaram a repetir a mesma palavra três vezes ao elaborarem suas explicações. Na contagem das palavras, consideramos apenas uma vez por aluno e, nesse primeiro momento, não estávamos avaliando se a resposta estava totalmente correta ou não.

Tabela 1: Palavras relacionadas ao limite utilizadas pelos alunos

Palavras	Valor	Aproximação
Turma A	13 alunos	11 alunos
Turma B	10 alunos	17 alunos
Turma C	6 alunos	6 alunos

Fonte: Santos (2013, p. 327).

A quantidade de alunos que não respondeu essa questão foi baixa. Tanto na turma A quanto na turma B, quatro alunos não responderam. Na turma C, todos responderam. Categorizamos as respostas dos alunos pela similaridade, frequência de palavras ou frases com um sentido completo, resposta totalmente certas, parcialmente certas, totalmente erradas e, por fim, as respostas que não se enquadraram em nenhuma dessas categorias.

Encontramos 8 alunos que escreveram algo, mas que não foram suficientemente claros acerca do que queriam dizer (A4, A9, A11, A16, B2, B11, C8, C7). Alguns alunos (3) escreveram de maneira desconexa ou demonstraram confusão entre os conceitos. Foi o caso dos alunos B8, B23 e B24.

(A4) Para mim, uma possível explicação seria: que é onde todos os valores aplicados na função irá resultar.

(B2) limite seria uma forma de se aproximar a uma resposta de uma determinada função.

(C7) Quando o valor x se aproxima a tal número a , o limite é o valor quando tende a um valor x .

Um grupo significativo de alunos (18) deu uma explicação para o limite de uma função que ficou próxima à ideia intuitiva desse conceito (A1, A17, A20, A25, B4, B5, B9, B10, B12, B15, B18, B21, B22, B28, C1, C2, C5, C6), tal como nos resultados de Abreu (2011) e Amorim (2011).

(A20) O valor para o qual “tende” uma função quando sua variável se aproxima de determinado valor.

(B15) Limite de uma função é o valor que $f(x)$ aproxima quando x tende a um número a .

(C1) O limite seria o valor de y , a medida que x se aproxima de um ponto determinado. Sabendo que é um limite, que a função aproxima de um valor, não tem um valor determinado.

21 alunos escreveram que o limite é um valor. Alguns desses alunos fizeram confusão com relação a x e $f(x)$ (A1, A6, A7, A10, A15, A20, A21, A25, B3, B5, B9, B12, B15, B21, B28, C1, C2, C4, C5, C6, C7).

(B3) Limite de uma função é o valor para o qual os valores de x tendem.

(C2) Limite seria que a medida que você vai aproximando a função de um valor fixo, mais próximo a função está chegando próximo de um outro no. fixo qualquer.

(C4) É o maior ou menor valor que uma função assume a medida que os valores de n crescem infinitamente.

Outros 5 alunos apresentaram a ideia do limite de uma função como um valor máximo que a função atinge: A3, A10, A21, A25, C4. Resultados encontrados também por Cornu (1983), Santos (2000).

(A3) Limita a função o ponto de parada da função, que zera a função o máximo onde ela chega.

(A10) Quando uma função é crescente ou decrescente e um valor a limita, superiormente ou inferiormente.

(A25) Não há um nome melhor para explicar. O limite de uma função é o valor máximo de uma função $f(x)$ quando x tende a algum valor, o limite da função.

Outros alunos (9) falaram acerca do limite da função, relacionando-o a pontos que não pertenciam ao domínio dela. Eles todos afirmaram que o limite não é atingido (A6, A15, A22, A24, B4, B14, B20, B29, C3). Esse resultado já havia sido encontrado por Tall (1978), Cornu (1983), Jordaan (2005), Aline Robert (1982 apud CORNU, 2002) e Celestino (2008) em suas pesquisas com limite de sequências, além de Abreu (2011) e Guerra (2012).

(A6) O limite é um determinado valor do contradomínio, que uma função pode chegar muito próximo dele, mais nunca chega nele exatamente.

(B4) Um ponto do qual esta função se aproxima, porém não “tocado” por ela quando o entorno desse ponto é observado na função.

(C3) Limite é o ponto mais próximo de uma função dada no ponto em que não está definida.

Um grupo de nove alunos explicou (ou tentou explicar) o limite de uma função com a utilização de intervalos (A13, A18, A23, B6, B14, B16, B17, B20, B27). Apresentamos afirmações de 2 alunos que ilustram esse fato:

(A18) Nas proximidades de um ponto x existe um intervalo em y em que para todo x das proximidades cairá naquele intervalo de y .

(B20) Dada uma função, limite são possíveis “resultados” dessa função, na qual as variáveis existentes não podem ser um determinado valor, o limite são os resultados mais próximos quando substituimos valores próximos ao que não pode ser substituído.

Ao pensarmos nas melhores afirmações, no sentido daquelas que forneceram mais elementos sobre o conceito e expressaram uma ideia mais completa dele, encontramos um total de 13 alunos. Esse grupo foi composto pelos alunos: A15, A20, B4, B5, B9, B15, B18, B21, B28, C1, C2, C5, C6, que ao escreverem acerca do limite deram mais informações que os outros.

(A15) Limite de uma função f é um número real (considerando f uma função de reais em reais) que, quando existe, é único. Seria, resumidamente, o valor que a função “assume” ao se aproximar a variável que a compõe a um valor real que não pertence ao conjunto de domínio da função (geralmente).

(B15) Limite de uma função é o valor que $f(x)$ aproxima quando x tende a um número a .

(C6) Limite é um conceito matemático que trata de quando um valor que se encontra no eixo das abscissas tende a um valor fixado então o valor da função também tende pra um valor específico que vai ser o limite.

4 alunos apresentaram a definição mais formal de limite (A18, A23, B16, B27).

A síntese que podemos fazer dessas respostas é que os alunos apresentaram o conceito de limite de uma função como uma **tendência**. Porém, essa tendência pode ser analisada de três maneiras:

- a tendência para um valor limite;
- a tendência do gráfico (comportamento da função);
- a tendência de $f(x)$ ou de x para um determinado valor.

Na segunda questão, perguntamos: o que significa para você indeterminação quando se trabalha com limite de uma função? Nosso objetivo era verificar o aprendizado deles a respeito das indeterminações. Quais eles se lembravam. Gostaríamos de verificar o que o aluno escreveria acerca de indeterminações, que sentido que ele daria aos procedimentos, o que ele entendeu sobre isso. É importante ressaltar que exemplificar é parte de saber algo, mas não é o suficiente para que esse algo seja conhecido.

Também queríamos verificar se eles saberiam explicar/justificar o procedimento, ainda que não se lembrassem do que viria a ser uma indeterminação.

As pesquisas que constituíram nossa revisão bibliográfica indicaram que os alunos sabem resolver exercícios, mas que na maioria das vezes não entendem o que estão fazendo. Eles conseguem resolver com maestria certas tarefas; todavia, quando solicitados a explicarem o que fizeram e por que fizeram da forma como fizeram verifica-se o aprendizado do procedimento, não do conceito.

Análise dos resultados da questão 2

Encontramos poucos trabalhos que discutiram as indeterminações. Jordaan (2005) encontrou nos seus resultados que os alunos pensavam que quando se divide zero por zero a resposta é zero. Não podemos analisar esse tipo de resposta porque ela não foi colocada em questão, mas acerca da divisão de infinito por infinito nenhum aluno afirmou que esse resultado seria um. Voltaremos a essa discussão mais adiante na questão que trata especificamente desse tipo de situação.

Maurice (2005) destaca que o sentido da palavra “indeterminação” pode ser assimilado para a expressão “o limite não existe” ou com o fato de que “o limite não tem resultado”. A expressão “não existe” é associada à noção de função quando expressões do tipo $\frac{b}{n}$ ocorrem e reaparecem no caso da descontinuidade em um ponto. Há a assimilação de sentido: uma forma indeterminada corresponde ao ponto de descontinuidade. Esse resultado também apareceu em algumas respostas dadas pelos nossos alunos.

Para Maurice (2005), os estudantes consideraram o sentido do termo “indeterminação” associado ao da palavra “aproximação”, porque sua concepção de limite consiste em

uma aproximação, desde que o limite não seja alcançado (ainda que ele exista). A aproximação é uma ação matemática que indica imprecisão, resultado indeterminado.

Como nos resultados de Maurice (2005), encontramos 26 alunos que estabeleceram várias relações com o termo “indeterminação”. A primeira delas é aquela em que o aluno vê a indeterminação como sinônimo de “sem solução”. Essa ideia foi escrita de várias formas, tais como: “não pode ser resolvido”, “sem definição”, “sem interpretação”, “não pode ser calculado/determinado” etc., e pode ser observada nas respostas dos seguintes alunos:

(A3) O que não pode ser desenvolvido; não pode ser determinado e nem identificado. Ex: $\frac{\infty}{\infty}$.

(B13) Quando não é possível estabelecer um valor real para o limite de uma função.

(C3) É quando não é possível estabelecer um limite para a função dada.

Além dessa primeira relação, outras tantas que se distribuíram entre as turmas foram percebidas. A representatividade dessas relações foi baixa comparada à primeira. No entanto, achamos importante citar algumas dessas outras relações estabelecidas.

3 alunos relacionaram a indeterminação com os limites laterais, como o caso do aluno B2, quando afirma que:

(B2) A indeterminação seria quando o limite é diferente quando analisamos por meio dos limites laterais.

Outros 3 alunos associaram a indeterminação com o gráfico da função relacionando indeterminação com descontinuidade, conforme pode ser observado na definição dada pelo aluno B23:

(B23) Significa que uma função não está definida em seu domínio ou simplesmente possui uma descontinuidade.

2 alunos associaram a indeterminação ao comportamento da função.

(A13) Não saber para onde a função está indo, pois não dá para determinar como é o comportamento da função.

4 alunos fizeram relação com pontos abertos do domínio da função.

(A24) Indeterminação de forma fácil, é quando o ponto em que se tem interesse é aberto, ou seja, não existe valor para ele na função.

Outros 4 alunos misturaram/confundiram indeterminação com os limites infinitos.

(B12) Indeterminação é quando aplicamos o limite e não conseguimos precisar um valor para a função (mas pode ser $-\infty$ ou ∞).

6 alunos demonstraram não ter compreendido totalmente o procedimento de “levantamento da indeterminação”, como podemos perceber, por exemplo, nos trechos:

(A25) É um determinado momento em que não há mais valores definidos que satisfaça a função em um conjunto, ou apenas uma situação do qual se manipularmos a função, ou aplicarmos regras (L’hopital), encontraremos uma nova apresentação da função que pode assumir valores bem definidos.

(B11) É quando aplicado determinado limite ele não é definido em um valor aproximado, nem mesmo após feito manipulações.

(B22) Indeterminação é quando não tem como resolver o limite, então temos que utilizar as propriedades e retirar a indeterminação.

(C8) Que não há uma solução direta, apenas utilizando alguma propriedade de limite.

Parte do grupo de alunos (18 alunos) que participou deste estudo apresentou exemplos de indeterminações indicados na tabela abaixo.

Tabela 2: Exemplos de indeterminação dados pelos alunos

Tipos de indeterminação	Total de alunos
$\frac{0}{0}$	12
$\frac{\infty}{\infty}$	13
$\infty + \infty$	1
$\infty - \infty$	1
0^∞	2
∞^0	1
$\frac{\infty}{0}$	1

Fonte: Santos (2013, p. 332).

Ao olharmos a tabela acima percebemos que os exemplos mais indicados pelos alunos foram os mesmos exemplos citados pelos professores. Mas há, na tabela dos professores, indeterminações que não foram citadas pelos alunos.

3 alunos apresentaram exemplos de limites de funções cujos valores tendem ao infinito como exemplo de indeterminações. E aqui podemos nos questionar com relação a isso: a presença do infinito poderia ter feito com que o aluno associasse o cálculo do limite no infinito com a indeterminação? Apesar de ambos envolverem o infinito, isso acontece em diferentes perspectivas. Temos também indeterminações que não envolvem o infinito.

3 alunos apresentaram alguns elementos a respeito do que vem a ser uma indeterminação, demonstrando um pouco mais de conhecimento acerca delas, como pode ser observado nos seguintes comentários:

(A20) Quando o resultado do limite não tende a determinado número nem a $+$ ou $-\infty$, ou seja pode ser qualquer valor.

(C4) Não há um único valor que satisfaz a função quando n cresce ou tende a algum valor.

Foram poucos os alunos que relacionaram a indeterminação com aspectos gráficos da função. Maurice (2005) destaca o fato de que uma indeterminação do tipo $\frac{0}{n}$ mostra que o limite existe e que o gráfico da função aponta o “buraco” de descontinuidade no ponto onde a função não está definida. Acreditamos que esse tipo de interpretação é pouco explorado nas aulas de cálculo, os procedimentos para levantamento da indeterminação são mais priorizados nos livros também.

É claro que o aluno só aprenderá esses novos sentidos se for dada a ele oportunidade de trabalhar com diferentes registros. Segundo Maurice (2005), uma situação de indeterminação nos informa sobre outros sentidos que o objeto matemático apresenta em outras representações semióticas.

Na questão 3, criamos a seguinte situação: imagine que um colega afirmasse que “infinito dividido por infinito dá um”. O que você pensa disso? Nosso objetivo era verificar se haveria a compreensão com relação aos conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, bem como a diferença de cardinalidade de conjuntos infinitos.

Os alunos que responderam ao questionário já cursaram Cálculo Diferencial e Integral, estávamos interessados em saber que percepção o aluno teria do infinito. Também gostaríamos de averiguar o que o aluno recordaria dessa parte do estudo, se seria capaz de exemplificá-lo. Queríamos descobrir como o aluno argumentaria que essa afirmação era falsa, que recursos mobilizaria para responder à questão, o que ele pensaria a respeito do infinito.

Análise dos resultados da questão 3

Não podemos inferir com certeza, mas talvez por influência da questão 2 a maioria dos alunos afirmou que “infinito dividido por infinito” constituía uma indeterminação. Concentramo-nos então nas justificativas apresentadas. Se tivéssemos elaborado a questão de outra maneira colocando-a de forma mais direta, como: “qual a sua posição com relação a isso?” ou “como você explicaria para seu colega que a afirmação é falsa?”, provavelmente teríamos obtido mais respostas com justificativas.

Um dos resultados encontrados por Nunes (2001 apud CELESTINO 2008) foi que os alunos consideram o infinito como um número desconhecido. Não encontramos esse resultado nas respostas dadas pelos informantes desta pesquisa.

18 alunos afirmaram que a expressão contida na questão 3 era falsa sem justificar o porquê dessa afirmação, asseguraram apenas que isso era uma indeterminação – A6, A7, A8, A10, A12, A14, A15, A19, B1, B4, B6, B10, B15, B16, B22, C1, C3, C6.

Os exemplos mais indicados de indeterminações, como na questão 2, foram $\frac{0}{n}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

A frequência da indicação dessas indeterminações foi representativa na Turma A (11 alunos). Tanto na turma B quanto na turma C os alunos não deram exemplos de indeterminações, mas procuraram apresentar justificativas para o erro do “colega”. Com relação a essas justificativas, pudemos assim categorizá-las:

- 10 alunos afirmaram que “infinito não é número”, “infinito não é valor”;
- a grande maioria (20 alunos) só afirmou: “é uma indeterminação” ou “não é definido” (2 alunos);
- um grupo de alunos (7) não apresentou nenhuma justificativa;
- 6 alunos tentaram justificar o “resultado” encontrado pelo colega argumentando que ele havia operado com o infinito como se operaria com um número qualquer. Esses alunos não deixaram, de forma clara, seu posicionamento. Alguns deles afirmaram que compreendiam o erro porque acreditavam que o colega teria raciocinado com base em um conhecimento anterior, apesar de errado;
- outros 3 alunos foram “criativos” na resposta afirmando que “o colega deveria estudar mais” ou que “ele deveria estar louco”.

—

Do total dos alunos, 13 deles apresentaram respostas mais significativas no sentido de oferecerem melhores justificativas acerca do que foi a eles solicitado:

(A22) Eu lhe diria que existem “vários” tipos de infinito, como funções que vão para o infinito mais rápido que outras ou na questão da cardinalidade de um conjunto, infinitos “maiores” que o infinito dos \mathbb{N} (naturais).

(B21) Acho engraçado em um primeiro momento, mas sei que isso não acontece, pois qual é o tamanho desses infinitos?

(C4) Penso não ser correto, uma vez que existem vários infinitos, o conj. dos inteiros e o conj. dos naturais por exemplos, onde este é subconjunto daquele contudo $c/$ a mesma cardinalidade.

Esse tipo de respostas apresentadas anteriormente que esperávamos, porque percebemos nelas uma compreensão mais abrangente do infinito. Os alunos C4 e A22 dão o exemplo clássico do conjunto dos naturais. Nossos resultados se diferenciaram dos resultados encontrados em trabalhos como os de Jordaan (2005) e Celestino (2008) em que os alunos demonstraram acreditar que o infinito era um número desconhecido ou realizando operações tais como a de dividir zero por zero e encontrando um “resultado” para essa operação.

Na questão 4, pedimos aos alunos para explicar uma das expressões apresentadas: você pode explicar com suas palavras o que significa uma das expressões abaixo?

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Queríamos verificar se o aluno percebia a diferença entre as expressões apresentadas, bem como entender os elementos utilizados por ele para falar sobre elas.

Não é tarefa fácil falar a respeito dos limites infinitos e limites no infinito porque essa elaboração exige elementos diretamente relacionados à compreensão do limite de uma função em pontos “delicados” do domínio. Além do fato de que o infinito pode ser um elemento complicador. A interpretação da igualdade e a leitura que se faz dela ganham um novo sentido. Não dizemos mais o limite é, mas o limite tende a.

Também queríamos ver como o aluno trabalharia com o fato do x tender ao infinito na letra a. Verificando se ele mencionaria o comportamento da função próxima ao ponto a do domínio na letra b.

Queríamos averiguar se os alunos conseguiriam ir além dos procedimentos para a resolução desses limites. Na letra b, ele perceberia que o limite não existe naquele ponto a ? Ele perceberia o que acontece com o gráfico da função em torno desse ponto?

Análise dos resultados da questão 4

Abreu e Reis (2011) e Abreu (2011) encontraram, com relação aos limites infinitos e no infinito, imagens conceituais que evocaram o crescimento indefinido e o crescimento “negativamente e positivamente”. No trabalho de Santos (2000), os alunos escreveram a respeito dos limites infinitos e limites no infinito, afirmando que: Limite infinito – limite que tem como resultado, infinito, Limite no infinito – é quando tendemos a variável ao infinito, as mais frequentes.

Como a questão era de escolha, a maioria dos alunos escolheu uma letra. Alguns deles escreveram a respeito das duas. Na turma A, 24 alunos escolheram a letra a e 16 alunos escolheram a letra b. Do total, 14 alunos escreveram sobre ambas. Na turma B, 28 alunos escreveram acerca da letra a, 18 alunos escreveram sobre a letra b e 17 alunos tentaram responder as duas. Na turma C, todos os alunos escreveram sobre a letra a e 5 deles sobre a letra b, esses 5 alunos tentaram responder ambas as questões.

Alguns alunos apenas “leram” o que estava escrito de maneira mais simbólica; outros alunos apresentaram uma “interpretação” para as expressões. Consideramos interpretação quando o aluno foi capaz de ir além do que está escrito, quando o aluno apresenta informações corretas relacionadas às expressões e que não estão, de maneira explícita, nelas. Esse quantitativo está expresso na tabela a seguir.

Tabela 3: Quantitativo de alunos que leram a expressão

Alunos que apenas “leram” a expressão	Quantidade
Turma A	15
Turma B	11
Turma C	5

Fonte: Santos (2013, p. 336).

Foram alguns desses alunos:

(A2) Limite da função f de x , com x tendendo ao infinito é igual a b .

(B13) O limite da função $f(x)$ quando x tende a infinito é igual a b .

(C5) Limite de $f(x)$ tende a “ b ” quando x tende para infinito.

A tabela seguinte mostra o quantitativo de alunos que apresentaram interpretação, como foi pedida na questão.

Tabela 4: Percentual dos alunos que apresentarão uma interpretação

Alunos que apenas “interpretaram” a expressão	Quantidade
Turma A	6
Turma B	6
Turma C	3

Fonte: Santos (2013, p. 336).

Alguns exemplos dessas “interpretações” dos alunos:

(A17) Significa dizer que quando x se torna suficientemente grande, $f(x)$ se aproxima de b .

(B14) O limite de $f(x)$; quando x tende a ∞ é igual a b . Ou seja quanto maiores os valores de x , mais a função $f(x)$ se aproxima de um valor b .

(C4) A medida que x cresce infinitamente, a função (o valor) se aproxima de b .

Com o objetivo de identificar as dificuldades e percepções dos alunos no estudo de limite, dando-lhes oportunidade de escrever livremente acerca do que considerariam mais difícil e de observar se os elementos apontados por eles seriam os mesmos encontrados em pesquisas que compuseram nossa revisão bibliográfica, elaboramos a questão 5: Do assunto sobre limite, para você, o que foi mais difícil? Por quê?

Análise dos resultados da questão 5

A dificuldade mais apontada pelos alunos foi a definição formal de limite (19 alunos) seguida pelas indeterminações (7 alunos) e o trabalho com gráficos (7 alunos). Outras dificuldades indicadas em menor número foram: os limites infinitos ou limites no infinito, os limites laterais, o trabalho com o infinito, os procedimentos, a finalidade/o sentido do estudo de limite e o fato de o assunto ser totalmente novo para eles. Em número ainda mais reduzido, foram indicados aspectos mais específicos: o teorema do confronto, a continuidade etc.

Na questão 6, perguntamos: quando do seu estudo sobre limite houve alguma relação

com a história da matemática? Se sim, qual? Queríamos verificar se havia, por parte do professor que ensinou o conceito de limite, alguma relação com a história e se isso exerceu influência positiva na aprendizagem dos alunos. Averiguar se, em algum momento do estudo, eles mencionaram a história do zero ou do infinito.

Bakhtin ressalta as vozes que se fazem presentes nos enunciados, que constituem nossos discursos. Em matemática, essas vozes podem ser identificadas. A história é um elemento que contribui nessa perspectiva, além de mostrar como se desenvolve a ciência matemática. O significado formal de um conceito só é atingido depois de modificações, reajustes. Ao tratarmos dos limites, sabemos que o germe para esse conceito já se fazia presente em Zenão de Eléia, mas que a sua completa definição só acontece com Weierstrass. Queríamos identificar, com isso, se o professor utilizava a história como recurso metodológico ou motivação ao estudo.

Análise dos resultados da questão 6

As respostas obtidas foram:

Tabela 5: Quantitativo de respostas

Turmas	Sim	Não	Não lembram
Turma A	4	11	6
Turma B	-	18	4
Turma C	1	7	-

Fonte: Santos (2013, p. 338).

Algumas respostas dadas pelos alunos foram:

(B2) Não sei, pois ainda não estudei sobre história da matemática.

(B26) Não tive estudo aprofundado sobre história da matemática, então não saberei relacionar os conteúdos.

A maioria das respostas indicou a não utilização da história da matemática em sala de aula. Os alunos que mencionaram ter algum contato com ela, assim fizeram por meio de projetos realizados na universidade, como o PETMAT, citado duas vezes por eles. Outros alunos disseram ler, por “conta própria”, história da matemática.

Nosso objetivo com a questão 7 era voltar às expressões que envolvem limite de uma função e limite de uma sequência para saber qual seria a mais familiar e como os alunos

explicariam essas expressões. Apesar de nosso estudo não ser focado no limite de seqüências, com essa questão, teríamos a chance de verificar o conhecimento deles a respeito do assunto.

Queríamos averiguar qual a leitura que o aluno faria dessas expressões, o que dariam mais ênfase, se seriam capazes de decodificar o que está materializado ali em linguagem simbólica. Quando sabemos algo sempre encontraremos as palavras para falar (VYGOTSKY, 1998a), a descodificação é típica de signos que ao mudarem de contexto adquirem outros sentidos (BATKHIN, 2010).

Considere as expressões/definições

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (\quad)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\quad)$$

Escolha a que lhe for mais familiar e explique, com as suas palavras, o significado dela.

Análise dos resultados da questão 7

Na turma A, 15 alunos marcaram a letra a e 2 alunos marcaram essa letra, mas não explicaram nada acerca dessa escolha; 5 alunos escolheram a letra b e 7 alunos não responderam a questão. Na turma B, 23 alunos escolheram a letra a e apenas 4 alunos escolheram a letra b. Na turma C, 5 alunos marcaram a letra a e apenas 1 aluno marcou a letra b.

Ao observarmos os resultados das três turmas, percebemos, com relação a letra a, que a maioria tentou traduzir a expressão/definição como uma tendência (26 alunos).

(A9) Quando um valor x tende a x_0 , $f(x)$ tenderá a L .

(B9) Quando “ x ” se aproxima ao máximo de um valor numérico pela direita ou pela esquerda, o valor da função se aproxima do valor limite [o aluno fez um gráfico para ilustrar].

(C2) À medida que x está se aproximando de x_0 a função $f(x) = L$.

Podemos perceber certa relação dessas respostas com as respostas apresentadas para a primeira questão. É interessante perceber a utilização de palavras que indicam tendência e aproximação – o que pode indicar que o aluno estaria pensando em termos

gráficos ou, segundo Bkouche (1996), pelo ponto de vista cinemático, cuja significação está associada à ideia de movimento.

Outros alunos demonstraram certa confusão, escrevendo sentenças incompletas (9 alunos). Alguns alunos (5) escreveram algo com sentido impreciso.

(A4) Dada uma função $[f(x)]$, aplicada nela um valor (x_0) tem-se como resultado a expressão L. Que intuitivamente na aplicação (x_0) é possível somente L.

(B11) Quando a função $f(x)$ aplicada no ponto x_0 encontra-se o valor o qual será o limite aplicado do ponto.

Com relação à letra b, a sua escolha foi muito inferior. Alguns alunos (2) tentaram ler a expressão; outros procuraram explicitar do que tratava a definição/expressão (5 alunos). Os alunos que escreveram algo confuso e/ou errado foram em número de 3. 2 deles escreveram:

(B4) Limite da sequência a_n , onde n é o índice da sequência, tende para infinito. Isto é, essa é uma sequência infinita.

(C6) A_n e o coeficiente de um poli e o termo geral de uma sequência n é um número natural que tende ao infinito. Trata-se de limite de sequência.

Questionário para os alunos – Questões que envolviam gráficos – Parte II

Na segunda parte do questionário, nosso objetivo foi o de verificar o quanto a mudança de registro afetaria a resposta do aluno. Se na primeira parte ele foi livre para escrever o que pensava, nesse momento ele teria que saber interpretar gráficos para indicar a resposta correta, além de relacioná-los com a teoria estudada. As duas questões trabalham com elementos da teoria e elementos relacionados aos procedimentos algébricos que são mobilizados para a resolução de tarefas.

A primeira questão teve o intuito de verificar se o aluno conseguiria “ler” os gráficos e compará-los com a expressão que os representava. Expressões essas que envolviam limites infinitos.

A segunda questão explorou diferentes aspectos presentes no estudo de limite de funções. Elaboramos afirmativa nas quais a função é descontínua (ou contínua) no ponto considerado para, assim, o aluno avaliar se o limite existiria e, caso existisse, qual seria o seu valor. Outras afirmativas relacionavam-se ao cálculo do limite da função quando em alguns pontos considerados do seu domínio x crescem arbitrariamente ou

tende a zero. Em algumas afirmativas, trabalhamos com justificativas ora falsas ora verdadeiras para questões as quais o aluno já havia realizado algum procedimento algébrico a fim de verificar se o julgamento da justificativa seria correto ou não. Esse tipo de questão teve o intuito de verificar a relação entre teoria e procedimento. Discutiremos a seguir os resultados de cada item.

Questão 1

Observe os gráficos 1, 2 e 3. Associe as “afirmações” com seus respectivos gráficos.

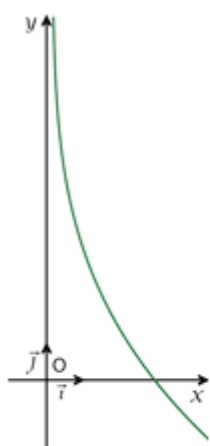


Gráfico 1



Gráfico 2

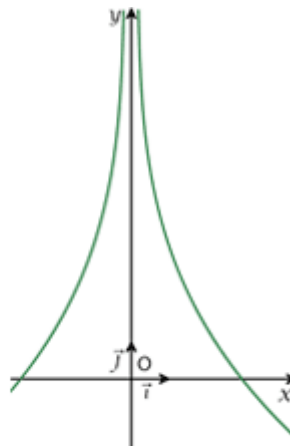


Gráfico 3

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$	Representa o gráfico ()
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$	Representa o gráfico ()
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$	Representa o gráfico ()

Resultados e análise da questão 1 – II Parte do questionário

A resposta correta deveria ser, de cima para baixo, a sequência: 2 – 3 – 1. Para melhor visualização, marcamos em azul as respostas corretas.

Os dados obtidos foram:

Turma A – Apenas 2 alunos erraram a sequência.

A11	3	2	1
A20	1	3	2

Turma B – 6 alunos erraram a sequência.

B6	2	1	3
B13	3	2	1
B17	1	3	2
B19	2	1	3
B25	2	1	3
B26	1	3	2

Turma C – 2 alunos erraram a sequência.

C2	1	2	3
C8	1	3	2

Chama atenção o fato de que a maioria dos alunos que cometeu erro nessa questão foi capaz de escrever acerca dos limites infinitos e limites no infinito na questão 4. Seria o registro em língua materna mais simples do que a interpretação gráfica desses limites? Como explicar que alguns deles escreveram sobre o que viria a ser cada tipo de limite, mas não conseguiram fazer relação dessa informação com o gráfico? Quais seriam as causas desses erros?

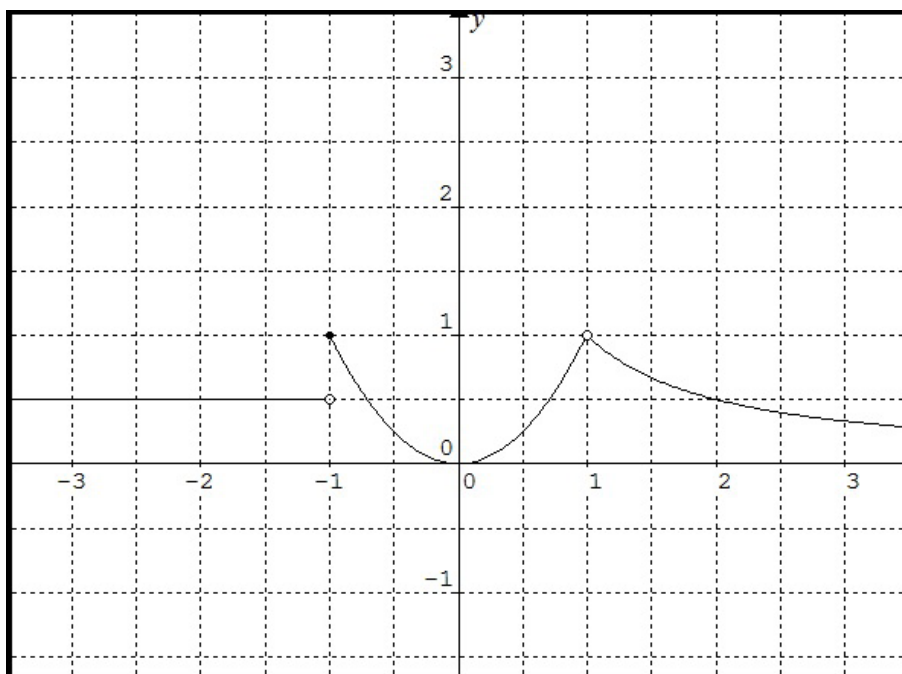
Se observarmos o gráfico 3, ele é, no nosso ponto de vista, o mais fácil dos três porque traz a variação dos pontos do domínio tanto à direita quanto à esquerda de zero. Dos 10 alunos que comentaram algum erro, apenas 4 marcaram a opção correta. Não há como estabelecermos repostas precisas para esse erro, já que não entrevistamos os alunos, só podemos, a partir disso, fazer algumas conjecturas, tais como: a inversão que alguns alunos fizeram com relação às opções seria falta de atenção? E com relação aos alunos que erraram todos os gráficos?

Pensando em contextos, quando modificamos o registro, modifica-se o contexto, mas nem por isso há modificação do conceito. Esse tipo de erro na interpretação dos gráficos nos leva a crer que os alunos têm mais facilidade no registro em língua natural, mas que encontram dificuldades em traduzir/transportar essas informações para outro registro. Há que se pensar, também, na qualidade dessa compreensão conceitual. Se os alunos entendem, de fato, o que escrevem ou repetem o que foi dito pelo professor.

Questão 2

Observe o gráfico da função definida abaixo e julgue as sentenças em: V – para verdadeiro, F – para falso e SN – para não sei.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x}, & 1 < x \end{cases}$$



- a. () O limite de $g(x)$ quando x tende a -1 existe.
- b. () O limite de $g(x)$ quando x tende a -1 não existe porque os limites laterais existem, mas são iguais.
- c. () O valor do limite de $g(x)$ quando x tende a -1 é $1/2$.
- d. () O limite de $g(x)$ no ponto $x = 0$ existe e seu valor é zero.
- e. () O limite de $g(x)$ no ponto $x = 1$ não existe porque o ponto $x=1$ não pertence ao domínio da função.

- f. () O limite de $g(x)$ no ponto $x = 1$ é 1.
- g. () O limite de $g(x)$ quando x tende a número muito grande não existe.
- h. () O limite de $g(x)$ quando x tende a número muito grande é infinito.
- i. () O limite de $g(x)$ quando x tende a 2 é $\frac{1}{2}$.
- j. () O limite de $g(x)$ quando x tende 2 é $\frac{1}{4}$.
- k. () O limite de $g(x)$ quando $x \rightarrow \infty$ é zero.

Resultados e análise da questão 2 – II Parte do questionário

Antes de apresentarmos as análises dos resultados, devemos ressaltar que a letra b não foi apresentada de maneira correta. O objetivo dessa afirmativa era avaliar se o aluno concordaria com a justificativa para o fato da função não ter limite no ponto $x = -1$ considerado. Sendo assim, a sentença correta deveria ser: O limite de $g(x)$ quando x tende a -1 não existe porque os limites laterais existem, mas **não** são iguais. O que tornaria a sentença verdadeira e não falsa.

A sequência correta seria:

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)
F	F	F	V	F	V	F	F	V	F	V

Nas tabelas, apresentaremos a opção SN – Não Sei – representada com um traço (-) para não sobrecarregar a apresentação e análise das respostas. Em azul, estão indicadas as respostas corretas, em cinza as erradas, em branco os alunos que não responderam ou que indicaram que não sabiam a resposta. Para evidenciar os percentuais por turma, trabalharemos com áreas. Desse modo, os resultados obtidos foram:

Turma A – De todos os alunos da turma, apenas 1 aluno não respondeu. Outros 3 alunos não responderam todas as questões.

Tabela 6: Referente às respostas da turma A

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)
A1	F	F	F	V	F	V	F	F	V	F	V
A2	F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V
A3	V	F	V	F	V	F	F	V	V	F	F
A4	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F	V
A5											
A6	F	F	F	V	F	F	F	V	V	V	V
A7	F	V	F	-	-	F	F	V	F	F	V
A8	F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V
A9	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F	V
A10	V	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V
A11	V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	V
A12	V	-	F	F	F	-	-	V	-	-	-
A13	F	F	V	V	V	V	F	F	V	F	V
A14	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
A15	F	F	F	V	F	V	F	F	V	F	V
A16	V	F	F	V	F	F	V	V	F	F	V
A17	F	V	F	V	V	F	F	F	V	F	F
A18	F	F	F	V	F	V	F	F	V	F	F
A19	V	F	V	V	V	F	V	F	F	F	F
A20	V	F	F	V	V	F	F	F	V	F	V
A21	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F	V
A22	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	V
A23	V	F	F	V	V	F	F	F	V	F	V
A24	F	F	F	V	-	-	-	F	V	F	V
A25	F	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V

Fonte: Santos (2013, p.344).

Considerando cada quadradinho que compõe as linhas da tabela como uma unidade de área, teríamos uma área dada por $(25 \times 11) = 275$ quadradinhos. Esse valor seria o equivalente a um acerto de 100% por parte da turma. Subtraindo o aluno que não respondeu (A5), teremos $275 - 11 = 264$. Considerando também os alunos que marcaram “não sei” em algumas afirmativas: $264 - 11 = 253$. É com esse valor que consideraremos acertos e erros.

O total de afirmativas julgadas corretamente foi de 177 quadradinhos – o equivalente a 46,24%. As afirmativas julgadas de maneira incorreta alcançaram um valor de 76 – equivalente a 30,04%.

Turma B – Nessa turma, 2 alunos não responderam a questão e outro 5 alunos não responderam todas elas. O ponto de interrogação na letra a, do aluno B14, especifica algo que não foi compreendido. O aluno rasurou a resposta.

Tabela 7: Referente às respostas da turma B

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)
B1	F	V	F	V	F	V	F	F	V	F	V
B2	F	V	F	V	-	F	F	F	V	F	F
B3	F	V	V	V	F	V	F	F	V	F	V
B4	V	F	F	V	F	V	F	F	V	F	V
B5	V	F	F	V	V	F	F	F	V	F	V
B6	F	F	F	V	F	F	F	V	V	F	V
B7											
B8	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F	V
B9	F	F	F	V	F	V	F	F	V	F	V
B10	F	F	F	V	V	F	F	V	V	F	V
B11	F	F	F	V	V	F	F	V	V	F	V
B12	F	V	F	V	-	-	F	V	V	F	V
B13	V	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V
B14	?	F	F	V	F	V	F	V	V	F	V
B15	F	F	F	V	F	V	F	F	V	F	V
B16	F	-	F	V	V	F	F	F	F	F	V
B17	V	F	F	V	F	V	F	F	V	F	V
B18	V	V	F	F	V	F	F	V	V	F	F
B19	V	F	F	F	V	F	F	-	F	F	V
B20	V	-	V	F	-	F	-	-	V	F	V
B21	F	V	F	V	V	F	F	F	V	F	V
B22	F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	F
B23	F	F	F	V	V	F	F	F	V	F	V
B24	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F	V
B25											
B26	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V
B27	V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	V
B28	F	F	F	V	F	V	F	F	F	F	V
B29	V	F	F	F	F	F	F	F	V	F	V

Fonte: Santos (2013, p. 345).

A área dessas respostas será dada por $29 \times 11 = 319$ quadradinhos. Subtraindo do total dos alunos que não responderam teremos $319 - 22 = 287$. Subtraindo, ainda, os alunos que marcaram “não sei” e o aluno que não identificamos sua resposta para um dos itens teremos: $287 - 10 = 277$ quadradinhos.

O percentual da turma B encontrado foi: número de acertos: $212 = 76,25\%$; número de erros: $65 = 23,46\%$.

Turma C – Apenas 3 alunos nessa turma não responderam toda a questão.

Tabela 8: respostas referentes à turma C

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)
C1	V	F	V	V	F	V	F	F	F	F	V
C2	F	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V
C3	F	V	F	F	-	-	F	F	-	-	V
C4	F	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V
C5	F	V	F	V	F	V	F	F	V	F	V
C6	F	V	V	V	V	F	F	-	V	F	-
C7	V	F	F	V	V	F	F	F	V	F	V
C8	V	F	F	V	F	F	V	V	F	-	F

Fonte: Santos (2013, p. 346).

A área total será: 8×11 quadradinhos = $88 - 7$ (alunos que não marcaram nada) = 81

Total de acertos: $59 = 72,84\%$

Total de erros: $22 = 21,16\%$

Podemos perceber, de posse desses percentuais, que as turmas B e C tiveram elevado número de acertos. Somente a turma A teve um número menor, mas atingiu 46,24%. Esses resultados nos levam a refletir acerca de uma possível facilidade dos alunos ao trabalhar com gráficos. Também foi baixo o percentual de alunos que não marcaram nada ou que fizeram a opção pelo “não sei”.

Discutiremos alguns pontos que nos chamaram a atenção.

As três primeiras letras (a), (b) e (c), apesar daquela falha na construção da letra (b), se relacionam. Esperava-se que o aluno que acertasse a letra (a) acertasse também a letra (b) e a letra (c). O que não ocorreu. Abreu (2011) encontrou resultados similares. Os alunos percebiam a descontinuidade da função, mas ao justificarem se utilizaram dos limites laterais de maneira equivocada.

Para responder a letra (d), o aluno deveria saber a ideia mais intuitiva de limite e observando o gráfico não teria dúvidas que o ponto considerado pertence ao domínio e que o valor para o limite da função no ponto $x = 0$ é zero. 14 foi a quantidade de alunos que errou essa questão.

Para responder a letra (e), os alunos deveriam mobilizar conhecimento considerado delicado no estudo de limite: o fato de uma função ter limite em um ponto que não pertence a seu domínio. E era isso que queríamos averiguar. Se os alunos indicariam essa compreensão. Trabalhos como os de Jordaan (2005) evidenciaram que os alunos

acreditavam que a função tinha que estar definida no ponto para ter limite. Se ela não é definida no ponto considerado, não tem limite. Os alunos que marcaram esse item como verdadeiro foi em número de 28, um percentual alto.

Com relação à letra (f), encontramos 34 alunos, mais da metade do total, que a julgaram incorreta. O aluno que marcou a letra (e) como falsa deveria ter marcado também a letra (f) como falsa. Juntado as duas questões é como se afirmássemos: o limite da função no ponto $x = 1$ existe mesmo ele não pertencendo ao domínio da função e o valor do limite – é um. Ao analisarmos se os alunos que marcaram a primeira falsa marcaram a segunda também ou se responderam corretamente as duas, marcando falso e verdadeiro, encontramos um total de 42 pares. O que indica que 42 alunos mantiveram certa lógica ao responderem a questão.

Com a letra (g), queríamos verificar se o aluno compreende a questão da existência do limite e da igualdade presente na definição do limite quando x tende a infinito. À medida que o valor de x cresce arbitrariamente, o que acontece com o limite da função? Tende a zero.

Na letra (h), verificaríamos se o aluno, além de considerar a existência do limite, era capaz de dizer para qual valor ele tenderia. Combinando as letras (g) e (h), teríamos duas afirmações falsas. Apenas 4 alunos erraram a letra (g), mas 20 alunos erraram a letra (h). Abreu (2011) encontrou no seu trabalho de investigação um acerto de 80% das respostas dos alunos quando trabalharam com gráficos analisando as tendências de x para $+\infty$ ou $-\infty$. No nosso caso, encontramos número maior de erros quando o aluno deveria imaginar para qual valor a função iria.

As letras (i) e (j) eram questões em que o aluno deveria analisar o domínio da função, verificar se seria possível a substituição direta do valor na lei da função e realizar o cálculo. O que é bastante simples. Depois desses procedimentos, encontraria letra (i) verdadeira e letra (j) falsa. Do total, 11 alunos erraram a letra (i) e apenas 1 aluno errou a letra (j) – o que indica percentuais relativamente baixos. É importante que reflitamos acerca do motivo do erro na letra (i), já que os procedimentos são os mesmos, tanto para uma quanto para a outra. O que poderia ter gerado isso? Falta de atenção?

Na letra (k), voltamos aos limites na perspectiva de tendência. Isso não deixou de ser uma confirmação das letras (g) e (h). Do total, 9 alunos erraram essa questão – número inferior ao dos erros cometidos na letra (h), por exemplo.

Considerações finais

A maioria das respostas dos alunos indicou a não utilização da história da matemática em sala de aula pelos professores. Os alunos que mencionaram ter algum contato com esse estudo, assim fizeram por meio de projetos realizados na universidade.

Os alunos também falaram de limite de uma função se expressando com palavras, tais como valor, valores, número – e, também, tende a, tende para. Mas, a palavra mais utilizada foi aproximação. Esse dado revela que a ideia intuitiva do limite de uma função foi a mais frequente nas respostas dos alunos. Também encontramos alunos que acreditam que o limite da função é um valor nunca alcançado. Poucos alunos falaram do limite com referências a intervalos. Em termos mais gerais, podemos afirmar que os alunos, ao falarem a respeito do limite, escrevem fazendo referências a tendências.

Quando observamos as respostas dos alunos acerca do significado que eles dão a uma indeterminação, a primeira relação foi a de que é algo “sem solução”. Mas, surgiram outros vários significados relacionados até com o comportamento do gráfico da função. Com relação às indeterminações, ficou evidente que boa parte dos alunos não compreende o “levantamento da indeterminação” – nem em termos gráficos, nem em termos algébricos. As indeterminações mais indicadas pelos alunos foram

as mesmas que os professores indicaram: $\frac{0}{n}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Após a análise das respostas, podemos refletir com mais vagar sobre alguns aspectos e levantar alguns questionamentos: se o valor não pode ser determinado, qual o sentido do levantamento da indeterminação para os alunos? Que valor é esse encontrado após o trabalho com uma função “semelhante” àquela que gera a indeterminação? A indeterminação indica algo com relação ao gráfico da função, o que seria? Como deveria ser feita essa “leitura”, essa conversão de um registro algébrico/simbólico para o registro gráfico de maneira que esse procedimento contribuísse para uma maior compreensão por parte dos alunos?

Não há como falar da dificuldade do aluno sem relacionarmos com sua vivência em sala de aula. Acreditamos que as dificuldades geradas pelos obstáculos que se fazem presente na origem do conceito podem ser superadas desde que haja por parte de quem ensina conhecimento e vontade para isso. Se o aluno apresenta dificuldades em aprender esse conceito, o professor também pode ter dificuldades em ensiná-lo.

Com esses resultados, percebemos que há grande variação com relação à percepção que os alunos têm do conceito de limite. Encontramos alunos que não apresentaram domínio nem mesmo da ideia mais intuitiva desse conceito enquanto outros conseguiram apresentar elementos que demonstraram compreensão até mesmo da definição formal.

A percepção que os alunos têm de limites infinitos e de limites no infinito demonstrou uma forte relação (seja ela correta ou não) com os gráficos, mas pouca habilidade com o simbólico. Essa inabilidade ficou explícita nos resultados relacionados à definição formal de limite. Grande parte dos alunos não consegue expressar uma compreensão razoável dessa definição.

Encontramos, também, resultados que não coincidiram com os de outros estudos que compuseram nossa revisão bibliográfica:

Com relação aos alunos, eles não perceberam o infinito como um número desconhecido ou realizaram cálculos com algo que não podiam, como nos trabalhos de Celestino (2008) e Jordaan (2005); diferentemente do resultado encontrado por Abreu (2011) que indicou que mais de 80% dos seus sujeitos acertaram que a indeterminação é uma ruptura e erraram com relação à justificativa por meio dos limites laterais, nossos alunos não fizeram relações entre a indeterminação e os gráficos. Em termos algébricos sim, pois alguns deles afirmaram que a indeterminação vinha do fato daquele limite possuir várias soluções. Não houve indicações dos limites laterais para a reflexão ligada à indeterminação.

Em termos percentuais e considerando o conjunto de alunos que respondeu o questionário como um todo, nós percebemos que o número de questões deixadas em branco foi baixo. Passaremos a comentar, a partir de agora, quais as questões que foram menos respondidas.

Considerando a primeira parte do questionário, composto por questões abertas, nas cinco primeiras questões não atingimos – em cada item – nem 10% de questões em branco. A questão número quatro – letra *b* – foi a que atingiu um percentual relativamente alto de respostas em branco. Nessa questão, pedimos para o aluno explicar o que significaria uma das expressões apresentadas. A letra *a* tratava de limite no infinito e a letra *b* de limite infinito. 24 alunos não responderam a letra *b*.

Os limites cujos “resultados” são infinitos não são, no nosso ponto de vista, fáceis de serem entendidos. Há uma igualdade que precisa ser lida/percebida de outra maneira. Quando analisamos o que acontece com a função quando o valor de x se aproxima de um determinado ponto ($x=a$), percebemos que o valor de $f(x)$ cresce indefinidamente. A imagem da função tende para o infinito e o limite não existe, já que infinito não é número.

Outra questão que teve um número alto de respostas em branco foi a letra *b* da questão sete. Nessa questão, pedimos aos alunos que escolhessem a expressão/definição que lhes fosse mais familiar e que explicassem com suas palavras o significado dela. Na letra *a* apresentamos a ideia intuitiva de limite e na letra *b* a de limite de uma sequência. A letra *b* alcançou alto grau de abstenções – 52 alunos deixaram essa questão em branco.

Não podemos fazer conjecturas do porquê dessa quantidade de respostas em branco, pois não sabemos se o aluno estudou limite de sequências já no Cálculo 1 – o

que seria raro, já que esse estudo acontece, normalmente, no Cálculo 2. Sabemos que parte desse grupo de alunos já estudou sequências, mas não utilizamos instrumentos para precisar a quantidade exata.

Ao encerrarmos nosso texto, gostaríamos de chamar atenção para o grande número de alunos que reprovam nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Se há uma “reclamação geral” de que os alunos chegam “sem base” na universidade. É necessário, também, que o professor reflita acerca da sua prática, do seu discurso em sala de aula, das metodologias que utiliza, porque um conceito como o de limite exige um trabalho para além do ensino de procedimentos algébricos. Não há como aprendermos um conceito apenas por meio de manipulações algébricas. Aprender um conceito vai muito além disso.

Referências

ABREU, Osvaldo Honório de (2011). *Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em cálculo I*. 99 f, 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

ABREU, Osvaldo Honório de; REIS, Frederico da Silva (2011). Uma discussão sobre o papel das definições formais no ensino e aprendizagem de limites e continuidade em Cálculo I. *Educação Matemática Pesquisa*, v.13, n. 3, p. 439-459. São Paulo.

AMORIM, Lilian Isabel F (2011). *A (re)construção do conceito de limite do Cálculo para a Análise: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática*, Dissertação, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

BAKHTIN, Mikhail (2010). *Marxismo e filosofia da linguagem*. (14. ed.). São Paulo: Editora Hucitec.

CELESTINO, Marcos Roberto (2008) – *Concepção sobre limites: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior*, tese de doutorado, PUC/SP.

CORNU, Bernard (1983) – *Apprentissage de la notion de limite – Conceptions et obstacles* – These de doctorat de Troisième Cycle de Mathématiques Pures – L’Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

GUERRA, Rita Catarina C (2012) – *Aprendizagem do conceito de limite* – dissertação, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

JORDAAN, Tertia (2005). *Misconceptions of the limit concept in mathematics course for engineering students*, master of education, University of South África.

MAURICE, Louise (2005). *College student's ideas on the limits of rational functions dealing with zero and infinity* - disponível em: <http://www.reflets.ca/rayonnement.html>, Acessado em 26-03-2013.

Santos, Maria Bethânia Sardeiro dos (2013). *Uma olhar para o conceito de limite*. Tese de doutorado, PUC, São Paulo.

TALL, David (1978). *Conflicts in the learning of Real Numbers and Limits* - Published in *Mathematics Teaching*, 82, 44-49. Oxford University Press (University of Warwick institutional repository: <http://go.warwick.ac.uk/wrap>). Acessado em 24-03-2013.

VYGOTSKY, L.S (1998). *Pensamento e linguagem* (2ª edição). São Paulo: Martins Fontes.