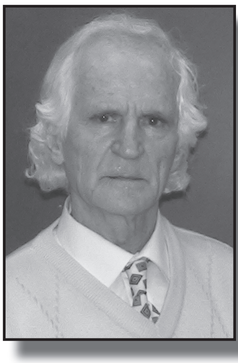
УДК 332.33:519.86

Зависимость используемых ресурсов от нелинейности производственной функции



Рафаэль САРКИСЯН
Rafael E. Sarkisyan

Елена КОБЕЦ
Elena V. Kobets

***Саркисян Рафаэль Еремович** – доктор технических наук, профессор Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.*
***Кобец Елена Владимировна** – аспирант МИИТ, Москва, Россия.*

Присущая производственным функциям нелинейность и порождаемые ею явления потери чувствительности и убывающей эффективности исследуются в рамках теории чувствительности. На этой основе рассматривается проблема оптимизации ресурсов с учетом критериев затрат и отдачи, а также нелинейной природы центральной причинной связи, свойственной естественным и искусственным системам. Отражающие эти особенности эффекты носят пространственно-временной характер и отражаются в технике, экономике, сфере управления. И внимание к ним только усиливается.

Ключевые слова: система, нелинейность, производственные функции, затраты, отдача, теория чувствительности, теория фирмы, убывающая эффективность, ресурсы, оптимизация.

Общепризнано, что самую полную и полезную характеристику любой организации вне контекста предметной или проблемной области можно получить в рамках теории систем [1, 2]. Это утверждение справедливо также в отношении таких ключевых аспектов строения и функционирования организации, как рациональное использование ресурсов, производительность, эффективность управления и т. д. На рис. 1 изображен наиболее распространенный и плодотворный системный взгляд на организацию как открытую систему «*вход – выход*».

Традиционно предполагается, что статическую картину наблюдаемой причинной связи между входными и выходными переменными достаточно точно удается описать (или представить) с помощью обобщенной производственной функции $Y = F(q1, \dots, qn)$, характеризующей технологическую связь между создаваемой организацией ценностью (товары и услуги) и произведенными затратами экономических факторов. И несмотря на известную полемику «*двух Кембриджей*» [3], концепция производственной функции остается одной из весьма конструктивных математических схем и моделей для экономического анализа и прогнозирования на макро- и микроуровнях [4]. Особую ценность представляет ее «*инженерный*» компонент, который играет важную роль для теории и техники экономического анализа и управления [5].

В теории фирмы постулируется существование *особой экономической области* (выпуклого подмножества пространства затрат), в точках которой производственная функция $\mathrm{Y} = \mathrm{F}(\mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_n)$ удовлетворяет условиям
$\partial F / \partial q_j > 0,\ \partial^2 F / \partial q_j^2 < 0,\ j = 1, \dots, n,$ [6].

Первое из них означает, что так называемый *предельный продукт* $\partial F / \partial q_j, j = 1, \dots, n$ положителен, но убывает по мере увеличения значения соответствующего экономического фактора, что и отражено во втором условии. Данный факт известен как *закон убывающей отдачи* (или *закон Госсена* – немецкого ученого, исследовавшего это явление в 1954 г.).

Причинной связи $\mathrm{Y} = \mathrm{F}(\mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_n)$ присуща нелинейность, которая порождает потери чувствительности между входами и выходами системы (между стимулом и реакцией) и, как следствие, потери эффективности производственных факторов (или ресурсов). Подобные нелинейные эффекты имеют непосредственное отношение к проблеме *этики эффективности* по отношению к ресурсам, которая за последние годы становится объектом изучения растущей интенсивности [7].

Цель нашего исследования – предложить подходящий аналитический инструментарий для описания и оценки упомянутых уже нелинейных эффектов, связанных с характеристикой $\mathrm{Y} = \mathrm{F}(\mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_n)$ в рамках теории чувствительности, а также определить их роль и влияние на формирование эффективных соотношений для ряда системных характеристик, представляющих научный и практический интерес.

1. МЕРЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И УБЫВАЮЩЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Будем предполагать, что нелинейная связь $Y = F(q),\ q = (q_1, \dots, q_n)^T$ принадлежит классу вогнуто возрастающих на непустом

Рис. 1. Взгляд на организацию как открытую систему «вход – выход».

Pic. 1. View of the organization as an open system «input – output».

выпуклом множестве $Q \subset E_+^n$ дважды непрерывно дифференцируемых функций $\mathrm{F}\colon Q \to E_+^1$, удовлетворяющих условиям $\partial F / \partial q_j > 0,\ \partial^2 F / \partial q_j^2 < 0,\ j = 1, \dots, n,$ где $\mathrm{q}_j, \mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{n},$ – координаты вектора $\mathrm{q} \in \mathrm{Q}$, E_+^n – неотрицательный ортант n–мерного евклидова пространства E^n. Как подчеркивалось, положительное значение частных производных первого порядка означает, что по мере роста значения аргумента функция $F(q),\ q \in Q$ монотонно возрастает, а отрицательное значение вторых производных показывает, что рост функции постепенно замедляется, вызывая потери чувствительности и убывающей эффективности связи «*вход – выход*».

Из теории оптимизации следует, что вогнуто возрастающая на непустом выпуклом множестве $Q \subset E_+^n$ функция $\mathrm{F}\colon Q \to E_+^1$ удовлетворяет дифференциальному неравенству [8]

$$F(q) - F(\bar{q}) \le \nabla F(\bar{q})^T (q - \bar{q}),\ q \in Q, \qquad (1.1)$$

где $\bar{q} \in Q$ – произвольная допустимая точка, $\nabla F(\bar{q})$ – градиент функции $F(q)$ в этой точке. В этом неравенстве функция $y = F(\bar{q}) + \nabla F(\bar{q})^T (q - \bar{q})$ соответствует гиперплоскости

$$H_F = \{(y, q) / y = F(\bar{q}) + \nabla F(\bar{q})^T (q - \bar{q}),\ q \in Q\},$$

касательной к поверхности функции $F(q)$ в точке $\bar{q}$, а градиент $\nabla F(\bar{q})$ – тангенсу угла наклона этой гиперплоскости. Обозначив $F_0(\bar{q})$ ординату точки пересечения гиперплоскости H_F с осью функции $F(q)$ и заметив, что точка $\bar{q} \in Q$ произвольная, для функции $F(q)$ получим разложение в виде

$$F(q) = F_0(q) + \nabla F(q)^T q,\ q \in Q. \qquad (1.2)$$

Второе слагаемое в правой части этого выражения представляет собой скалярное произведение двух векторов: градиента $\nabla F(q) \equiv \frac{\partial F}{\partial q} \equiv (\frac{\partial F}{\partial q_1},\ldots, \frac{\partial F}{\partial q_n})^T$ с положительными координатами, значение которых убывают, и вектора $q=(q_1,\ldots, q_n)^T$ текущих значений аргументов. Этот компонент функции $F(q)$, который мы обозначим $v(q)$, т. е.

$$v(q) \equiv \nabla F(q)^T q = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(q)}{\partial q_j} q_j , \qquad (1.3)$$

содержит полезную информацию о локальных динамических свойствах самой функции $F(q)$, в том числе о ее чувствительности и убывающей эффективности аргумента $q \in Q$.

Заметим в этой связи, что, подобно тому как возмущение функции позволяет получить полезную информацию о ее поведении в точках минимума или максимума [9], возмущение самого аргумента функции позволяет получить ценную информацию о ее локальных динамических свойствах, включая чувствительность. «*Заботясь о простоте и эффективности*» [9], используем для этой цели предел отношения

$$\frac{dF(tq)/F(tq)}{dt/t} = \frac{t}{F(tq)} \frac{dF(tq)}{dt} \qquad (1.4)$$

при $t \to 1$. Обозначив этот предел через $\sigma(q)$ и учитывая, что $F(tq) = F(tq_1,\ldots,tq_n)$, а ее производная по параметру *t* равна

$$\frac{d}{dt} F(tq_1,\ldots,tq_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(tq)}{\partial (tq_j)} \frac{\partial (tq_j)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(tq)}{\partial (tq_j)} q_j , \qquad (1.5)$$

для величины $\sigma(q)$ получим формулу

$$\sigma(q) \equiv \lim_{t\to 1} \frac{t}{F(tq)} \frac{dF(tq)}{dt} = \frac{1}{F(q)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(q)}{\partial q_j} q_j . \qquad (1.6)$$

По существу, величина $\sigma(q)$ представляет собой локальный показатель изменения функции $F(q)$ от пропорционального изменения координат вектора $q=(q_1,\ldots, q_n)^T$, а ее аддитивная структура дифференцированно отражает влияние каждой из координат этого вектора. В случае скалярного аргумента (1.6) принимает вид $\sigma(q) = (dF(q)/F(q))/(dq/q)$, откуда следует, что величина $\sigma(q)$ показывает относительное изменение функции $F(q)$ под действием единичного относительного изменения аргумента. В случае векторного аргумента $q=(q_1,\ldots, q_n)^T$ эти локальные эффекты просто суммируются.

Таким образом, величину $\sigma(q)$ можно рассматривать как *интегральную меру (относительной) чувствительности* функции $F(q)$ в точке $q \in Q$, а ее компонентов $\sigma_j(q)$, $j=1,\ldots, n$ — как *частные меры (относительной) чувствительности,* отражающие роль каждой из координат q_j, $j=1,\ldots, n$. Эти свойства $\sigma(q)$ и ее компонентов, а также то, что они безразмерны, стали причиной широкого их применения в системотехнике [2], экономике [6], теории управления [10]. В экономике эти величины больше извечтны как *эластичность.*

Используя (1.6), представим выражение (1.3) в виде

$$v(q) = \sigma(q) F(q), \qquad (1.7)$$

что, в свою очередь, позволяет переписать соотношение (1.2) в форме

$$F(q) = F_0(q) + v(q) = \\ (1-\sigma(q))F(q) + \sigma(q)F(q), \; q \in Q. \qquad (1.8)$$

На рис. 2 приведены с целью иллюстрации графики функций $F(q) = 1 - e^{-\alpha q}$, $\alpha > 0$, $v(q) = q dF/dq = \alpha q e^{-\alpha q}$ и $F_0(q) = F(q) - v(q) = 1 - e^{-\alpha q} - \alpha q e^{-\alpha q}$ для скалярного аргумента q. Как видно из этого рисунка, функции $F(q)$ и $F_0(q)$ монотонно возрастают, в то время как $v(q)$ имеет экстремум — максимум в точке $q^v = 1/\alpha$. При этом функция $\sigma(q) = \alpha q/(e^{\alpha q} - 1)$, равная по величине отношению отрезков прямых *BC* и *AC,* монотонно убывает, принимая в начале координат единичное значение.

Следует отметить, что для вогнуто возрастающей функции величина $\sigma(q)$ — не обязательно убывающая, как, например, в случае производственной функции Кобба—Дугласа

$u(q) = \prod_{j=1}^{n} q_j^{\sigma_j}$, где

$\sigma_j \in (0,\ 1),\ j = 1,\ldots,\ n,$ – фиксированные параметры. Легко заметить, что здесь $\sigma(q) = \sigma_1 + \ldots + \ \sigma_n$ и, следовательно, является постоянной величиной. Если же функция $F(q)$, вогнуто возрастая, стремится к своему предельному значению F^*, величина $\sigma(q)$ всегда монотонно убывает (как отношение:
$(dF / F(q)) / (dq / q) = \mathrm{BC/AC}$ на рис.2), порождая тем самым эффект потери чувствительности выхода по отношению к входу.

Возвращаясь к формуле (1.7), заметим, что функция $v(f)$, как и $\sigma(f)$, имеет аддитивную структуру, а их компоненты связаны друг с другом соотношениями

$$v_j(q) = \frac{\partial F(q)}{\partial q_j} q_j = \sigma_j(q) F(q),\ j = 1,\ldots,\ n, \quad (1.9)$$

По существу, каждая из величин $v_j(q)$, $j = 1,\ldots,\ n$ представляет собой по аналогии с известной *концепцией производительности* [11] «*парциальную отдачу*» (или «*порциальную продуктивность*») соответствующей переменной $q_j,\ j = 1,\ldots,\ n,$ при фиксированном значении остальных переменных. В этом смысле величину $v(q)$ можно интерпретировать как «*совокупную отдачу*» (или «*совокупную продуктивность*») входных переменных $q_1,\ \ldots,\ q_n$. Поскольку в разложении $F(q)$ функция $v(q)$ представляет ее динамическую составляющую, $v(q)$ будем также называть *динамическим компонентом* или просто *функцией отдачи*. Полезно также отметить, что соотношение

$$v_i(q) / v_j(q) = \sigma_i(q) / \sigma_j(q) = (q_i / q_j)\mu_{ij},\ i, j = 1,\ldots,\ n, \quad (1.10)$$

где через μ_{ij} обозначены так называемые *предельные нормы замещения* между соответствующими координатами q_i и q_j [2, 6]:

$$\mu_{ij} = \frac{\partial F}{\partial q_i} / \frac{\partial F}{\partial q_j},\ i, j = 1,\ldots,\ n, \quad (1.11)$$

связывает друг с другом отношение

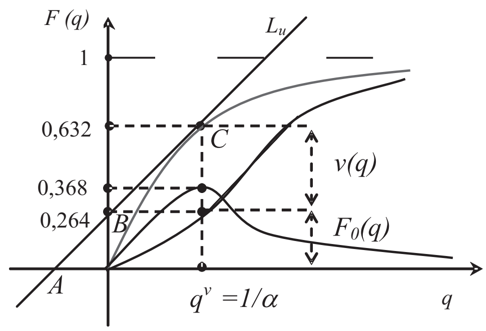


Рис.2. Графики функций $F(q) = 1 - e^{-\alpha q},\ \alpha > 0,$ $v(q) = \alpha q e^{-\alpha q}$ **и** $F_0(q) = F(q) - v(q) = 1 - e^{-\alpha q} - \alpha q e^{-\alpha q}$; $\sigma(q) = BC / AC = v(q) / F(q) = \alpha q / (e^{\alpha q} - 1)$.

Pic. 2. Graphs of functions $F(q) = 1 - e^{-\alpha q},\ \alpha > 0,$ $v(q) = \alpha q e^{-\alpha q}$ **and** $F_0(q) = F(q) - v(q) = 1 - e^{-\alpha q} - \alpha q e^{-\alpha q}$; $\sigma(q) = BC / AC = v(q) / F(q) = \alpha q / (e^{\alpha q} - 1)$.

компонентов величины $\sigma(q)$, координат вектора q и нормы замещения μ_{ij}, что для точек на поверхности $F(q) = const$ может представить практический интерес. Кроме того, точки поверхности $F(q) = const$, для которых выполняется условие

$$v_i(q) / v_j(q) = \sigma_i(q) / \sigma_j(q) = 1, \quad (1.12)$$

характеризуются устойчивыми пропорциями в том смысле, что для них из (1.10) следует условие $q_i / q_j = 1 / \mu_{ij} = \mu_{ji},\ i, j = 1,\ldots,\ n,$ которое можно интерпретировать как критерий устойчивости: *увеличение значения одной переменной приводит к уменьшению ее относительной роли* (или *относительной важности*) в интегральной оценке состояния.

Покажем в заключении этого раздела, что в общем случае производственную функцию можно выразить через меру чувствительности $\sigma(q)$ в виде экспоненциальной зависимости. Преобразовав с этой целью формулу для полного дифференциала

$$dF(q) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_j} dq_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{dq_j}{q_j} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(q) F(q) \frac{dq_j}{q_j}, \quad (1.13)$$

и представив ее в виде

$$\frac{dF(q)}{F(q)} = d\ln F(q) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(q) d\ln q_j, \qquad (1.14)$$

получим мультипликативную форму представления производственной функции:

$$F(q) = F_0 \prod_{j=1}^{n} \exp(\phi_j(q)), \qquad (1.15)$$

где принято обозначение

$$\phi_j(q) = \int \sigma_j(q) d\ln q_j, \;\; j = 1,\dots, \; n,$$

F_0 – константа.

Если предположить, что входящие в (1.15) величины $\sigma_j(q), \; j = 1,\dots, \; n$ постоянны, получим производственную функцию типа Кобба – Дугласа, о которой уже шла речь. Думается, что в 20-х годах прошлого века Кобб и Дуглас именно из этих соображений и исходили. Однако никаких эмпирических данных или интуитивных соображений в пользу такого предположения не существует. Более реалистичным представляется предположение об убывающем характере величин $\sigma_j(q), \; j = 1,\dots, \; n$. В таком случае для восстановления функционального вида $F(q)$ можно применить более гибкий подход, основанный на *динамизации* процесса оценивания величин $\sigma_j(q), \; j = 1,\dots, \; n$, как это, например, практикуется в многомерном регрессионном анализе [12].

Суть динамизации заключается в том, что пространство оценок разбивается на подобласти, в пределах которых величины $\sigma_j(q), \; j = 1,\dots, \; n$ принимаются как постоянные. В результате производственная функция *F (q)* может быть аппроксимирована сколь угодно точно.

Несмотря на известные трудности, направленные на восстановление этой функции усилия, на наш взгляд, вполне оправданны, особенно если учитывать ту роль, которую теория производственной функции играет в экономическом анализе и управлении на микро- и макроуровнях [4, 6], а также нашу заинтересованность в получении более точных аналитических инструментов для построения надежных и достоверных оценок *технологической продуктивности* и *производительности организации* в целом.

2. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО ОТНОШЕНИЮ К ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ОТДАЧЕ РЕСУРСОВ

Оптимизация ресурсов служит ключевой задачей управления современной фирмой. Этой проблеме посвящены две классические задачи теории фирмы, одна из которых (*задача теории спроса*) связана с приобретением набора ресурсов $(q_1,\dots, \; q_n)$ по их рыночным ценам $p_1,\dots, \; p_n$ соответственно, который удовлетворяет бюджетному ограничению $p_1q_1 + p_2q_2 +,\dots,+ p_nq_n \le I$ и максимизирует функцию полезности потребителя $u(q_1,\dots, \; q_n)$. Предполагается, что эта функция является вогнуто возрастающей на множестве благ $Q \subset E_n^+$ и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка, удовлетворяющие условиям:
$\partial u / \partial q_j > 0, \; \partial^2 u / \partial q^2 < 0, \; i, j = 1,\dots, \; n$ [6,13].

Она представляется в виде задачи математического программирования [2, 6]

$$\begin{aligned} &u(q) \to \max. \\ &pTq \le I, \; q \ge o \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Другая задача, которую справедливо считать «*почти двойственной*» по отношению к этой [2], связана с минимизацией затрат производственных факторов при фиксированном объеме выпуска продукции $F(q_1,\dots,q_n) = \bar{y}$. Определив функцию затрат в виде $r(q) = p^T q$, где $p = (p_1,\dots, p_n)^T$, $q = (q_1,\dots,q_n)^T$, эту задачу можно представить как задачу математического программирования

$$r(q) = p^T q \to \min_{F(q)=\bar{y}}. \qquad (2.2)$$

Решение задачи (2.2) с помощью метода Лагранжа сводится к нахождению седловой точки $(q^*, \; \lambda)$ функции

$$L(q, \; \lambda) = p^T q + \lambda(\bar{y} - F(q)),$$

которая удовлетворяет необходимым условиям теоремы Куна – Таккера [8]

$$\frac{\partial L(q^*, \lambda)}{\partial q} = \text{p} - \lambda \frac{\partial F(q^*)}{\partial q} \ge 0;$$

$$\text{q}^{*\text{T}} \frac{\partial L(q^*, \lambda)}{\partial q} = 0, \; \text{q}^* \ge 0;$$

$$\frac{\partial L(q^*,\lambda)}{\partial \lambda} = \bar{y} - F(q^*) = 0. \qquad (2.3)$$

Для положительного решения q^* первое условие этой системы превращается в равенство, откуда непосредственно следует известное в общей теории соотношение

$$\lambda \frac{\partial F(q^*)}{\partial q_j} = p_j, \; j = 1,..., \; n. \qquad (2.4)$$

Умножив обе части этого равенства на q_j^* и просуммировав результат с учетом формулы (1.8), получим соотношение $r(q^*) = \lambda v(q^*)$, которое эквивалентно равенству $r(q^*) = \lambda\sigma(q^*)F(q^*) = \lambda\sigma(q^*)\bar{y}$. Эти соотношения показывают, что затраты пропорциональны отдаче ресурсов $v(q^*) = \sigma(q^*)F(q^*)$, а множитель λ выступает в качестве коэффициента пропорциональности. Заметим, кроме того, что в этих выражениях отношение $F(q^*)/r(q^*) = \bar{y}/r(q^*) = 1/\lambda\sigma(q^*)$ определяет производительность фирмы. Из (2.4) можно также вывести выражение для *предельной нормы технического замещения факторов*

$$\mu_{ij} = \frac{\partial F(q^*)}{\partial q_i} / \frac{\partial F(q^*)}{\partial q_j} = \qquad (2.5)$$

$$q_i^*\sigma_i(q^*) / q_j^*\sigma_j(q^*), \; i, j = 1,..., \; n.$$

Итак, решение q^* оптимально по отношению к затратам экономических факторов. Исследуем теперь проблему оптимальности ресурсов относительно их отдачи. Она сводится к решению задачи максимизации функции эффективности или отдачи ресурсов $v(q) = \nabla F(q)^T q = \sigma(q)F(q)$ на поверхности $F(q) = \bar{y}$ в предположении, что величина $\sigma(q)$ монотонно убывает. Соответствующая этой постановке задача математического программирования будет иметь вид

$$v(q) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(q)}{\partial q_j} q_j \to \max_{F(q)=\bar{y}}. \qquad (2.6)$$

По существу, в этой задаче необходимо найти на поверхности $\mathrm{F(q)} = \bar{y}$ точек, в которых функции *v (q)* и σ *(q)* одновременно достигают своего максимума.

Решение задачи (2.6) по методу Лагранжа сводится к нахождению седловой точки $(q^v, \; \lambda)$ функции

$$L(q,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(q)}{\partial q_j} q_j + \lambda(\bar{y} - F(q)), \qquad (2.7)$$

где λ – неопределенный множитель. Соответствующие условия теоремы Куна–Таккера в матричной и векторной форма [8]:

$$\frac{\partial L(q^v,\lambda)}{\partial q} = \frac{\partial F(q^v)}{\partial q} + Hq^v - \lambda \frac{\partial F(q^v)}{\partial q} \le 0,$$

$$q^{vT} \frac{\partial L(q^v,\lambda)}{\partial q} = 0, \; q^v \ge 0,$$

$$\frac{\partial L(q^v,\lambda)}{\partial \lambda} = \bar{y} - F(q^v) = 0. \qquad (2.8)$$

где H – матрица Гессе функции $F(q)$. Для положительного вектора q^v (*произведенные затраты*) первое условие системы (2.8) превращается в равенство, которое после группировки подобных членов примет вид

$$Hq^v + (1-\lambda)\frac{\partial F(q^v)}{\partial q} = 0, \qquad (2.9)$$

и его решение будет равно

$$q^v = -(1-\lambda)H^{-1}\frac{\partial F(q^v)}{\partial q}. \qquad (2.10)$$

Второе условие системы (2.8) сводится к уравнению

$$-q^{vT}Hq^v = (1-\lambda)q^{vT}\frac{\partial F(q^v)}{\partial q}, \qquad (2.11)$$

которое можно преобразовать к виду

$$-q^{vT}Hq^v = (1-\lambda)v(q^v) = \qquad (2.12)$$
$$(1-\lambda)\sigma(q^v)F(q^v) = (1-\lambda)\sigma(q^v)\bar{y}.$$

В формулах (2.10) – (2.12) множитель λ удовлеторяет условию $\lambda \le 1$. Легко установить, что если бы в задачах (2.2) и (2.6) присутствовало ограничение $F(q) \ge \bar{y}$ (производить не меньше $\bar{y}$), то это обстоятельство никак не повлияло бы на решение первой задачи $(q^*, \; \lambda)$. В решении второй задачи $(q^v, \; \lambda)$ в формулах (2.9) – (2.12) вместо множителя $(1-\lambda)$ появляется множитель $(1+\lambda)$. Оба решения при этом должны удовлетворить условию дополня-

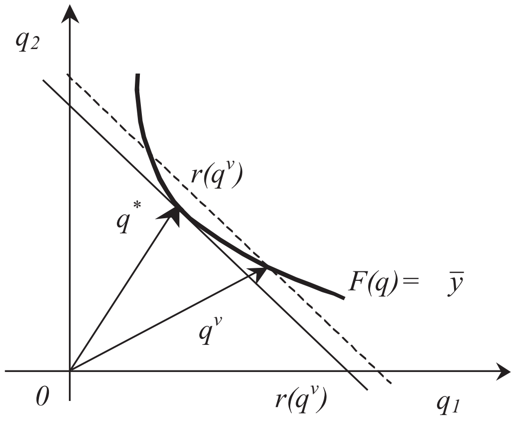


Рис. 3. Взаимное расположение решений.
q * = argmax r(q) = pTq and qv =
argmax v(q) = F(q)Tq

Pic. 3. Mutual location of decisions
q * = argmax r(q) = pTq and qv =
argmax v(q) = F(q)Tq

ющей нежесткости Слейтера $\lambda(\bar{y}-F(q))=0,\ \lambda\geq 0$ [8].

Формула (2.10) показывает, что для различных значений параметра λ мы имеем оптимальную траекторию $q^v(\lambda)$, $\lambda\leq 1$. В частности, когда $\lambda=1$, решение $q^v(1)$ совпадает с началом координат, где функция $F(q)$ имеет нулевой уровень, а когда $\lambda=0$, решение $q^v(0)$ совпадает с точкой безусловного максимума функции $v(q)$. Логично предположить, что когда $\lambda\to-\infty$, траектория $q^v(\lambda)$ будет стягиваться в точку $q^F=\arg\max F(q),\ q\in Q$. Отметим, наконец, основываясь на уравнении (2.9), что по существу в точках траектории $q^v(\lambda)$ матрица $-H$ *«поворачивает»* вектор q^v по направлению градиента функции $F(q)$, другими словами, всегда имеет место условие $-Hq^v=(1-\lambda)\nabla F(q^v),\ \lambda\leq 1$. Характерно, что в точках на траектории $q^v(\lambda)$ отношения координат вектора q^v составляют

$$q_i^v/q_j^v=(H^{-1}\frac{\partial F(q^v)}{\partial q})_i/(H^{-1}\frac{\partial F(q^v)}{\partial q})_j, \quad (2.13)$$

$i,j=1,\ldots,\ n,$

а выражение для *предельной нормы технического замещения факторов,* согласно уравнению (2.9), принимает вид

$$\mu_{ij}=\frac{\partial F(q^v)}{\partial q_i}/\frac{\partial F(q^v)}{\partial q_j}=(Hq^v)_i/(Hq^*)_j, \quad (2.14)$$

$i,j=1,\ldots,\ n.$

Взаимное расположение решений q^* и q^v в случае двух производственных факторов иллюстрировано на рис. 3. В точке q^* уровень затрат составляет $r(q^*)=\lambda\sigma(q^*)\bar{y}$ и меньше, чем уровень $r(q^v)$, соответствующий точке q^v, однако в точке q^v имеем наибольшую динамическую отдачу факторов $v(q^v)$, наибольшую (относительную) чувствительность связи «*вход — выход*» $\sigma(q^v)$ и, а также согласованный уровень взаимодействия факторов $\theta(q^v)=-q^{vT}Hq^v$.

Принимая во внимание, что величины $v(q^v)$ и $\sigma(q^v)$ обеспечивают максимальный уровень суммарного относительного изменения выхода $\sum_{j=1}^n\ (\Delta F/F(q))/(\Delta q_j/q_j)$, представляется разумным согласиться на «*уступки*» по затратам на величину $r(q^*)-r(q^v)\geq 0$, чтобы иметь решение q^v, которое учитывает потери чувствительности и убывающую эффективность ресурсов. Представляется, что последний вывод может быть полезен при определении наиболее предпочтительного уровня загрузки производственных мощностей фирмы.

Отметим, наконец, что все точки линии уровня (в общем случае — поверхности уровня) $F(q)=\bar{y}$, которые соединяют решеия q^* и q^v, по существу, составляют *«разумный компромисс»* между критериями: минимума функции затрат $r(q)=p^Tq$ и максимума функций v(q) = F(q)Tq и (q). В этом случае мы просто имеем дело с задачей векторной (в данном случае — двухкритериальной) задачи, связанной с минимизацией функции затрат ресурсов *r (q)* и максимизацией характеристик *v (q)* и σ *(q)*.

Представляет интерес исследование безусловного максимума функции $v(q)=\sigma(q)F(q)$ на множестве ресурсов $Q\subset E^n$. Заметим в этой связи, что в разложении (1.8) слагаемое

$F_0(q)=(1-\sigma(q))F(q)$,

как и сама функция $F(q)$, монотонно возрастает на множестве *Q,* в то время как слагаемое $v(q)=\sigma(q)F(q)$ имеет точку безусловного оптимума – максимума, которая является решением уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial q}=Hq+\frac{\partial F}{\partial q}=0, \qquad (2.15)$$

где H – матрица Гессе функции $F(q)$. Так как для вогнуто возрастающей функции матрица H отрицательно полуопределена, т. е. $q^T Hq \le 0,\ q\in Q,$ и ее обратная матрица H^{-1} существует, то обозначив q^v искомое решение уравнения (2.15), получим

$$q^v=-H^{-1}\frac{\partial F(q^v)}{\partial q}. \qquad (2.16)$$

Это решение совпадает с точкой (2.8) при $\lambda=0$. Уровень функции $v(q)$ при этом составляет

$$v(q^v)=-q^{vT}Hq^v, \qquad (2.17)$$

и совпадает с уровнем функции взаимодействия координат $\theta(q)\equiv -q^{vT}Hq^v$.

Полезно заметить, что в случае скалярного аргумента уравнение (2.15) принимает вид $-q^v\frac{d^2F}{dq^2}=\frac{dF}{dq}$, а его решение: $q^v=-\frac{dF}{dq}/\frac{d^2F}{dq^2}$. Величина $\sigma_F=-q\frac{d^2F}{dq^2}/\frac{dF}{dq}$ представляет собой показатель кривизны $F(q)$, следовательно, в точке q^v показатель кривизны вогнуто возрастающей функции $F(q)$ равен единице. Представив величину $\sigma_F=-\frac{d^2F}{dq^2}/(\frac{dF}{dq}/q)$, приходим к выводу, что σ_F характеризует относительную чувствительность предельной величины $dF(q)/dq$. В случае многомерной функции $F(q)$, если взаимодействия между координатами $q_j,\ j=1,\ldots,\ n,$ отсутствуют, тогда матрица H будет диагональной, и величины $\sigma_{Fj}=-q_j\frac{d^2F}{dq_j^2}/\frac{dF}{dq_j}$, как локальные показатели кривизны функции $F(q)$ относительно координат $q_j,\ j=1,\ldots,\ n,$ также будут равны единице.

Эффект, обусловленный отмеченными ранее качествами решения $q^v(\lambda)$, аналогичен известному в современной науке *эффекту синергии,* который возникает в нелинейных динамических системах в результате согласованного и совместного действия различных системных факторов [14]. Благодаря этому величина $v(q^v)=\sigma(q^v)F(q^v)$ выступает в качестве *эффективной отдачи* входных воздействий (экономических факторов) на уровне $q^v=(q_1^v,\ldots,q_n^v)^T$. В реальных ситуациях соотношения, учитывающие *согласованность* ведущих факторов исследуемой проблемы больше отвечают нашим предпочтениям, чем другие, если учитывать возможности и ограничения объективной модели исследуемой и оптимизируемой проблемы. Такая концепция в практических приложениях служит *руководящим принципом*, который своими корнями уходит далеко в *этическую систему стоицизма* и широко применяется в системотехнике [2]. В прикладных задачах согласованные отношения и пропорции представляют большую *«управленческую»* ценность, чем другие, так как именно они создают *гармонию,* повышают *жизнеспособность* и *эффективность функционирования* систем.

3. ИЛЛЮСТРАЦИЯ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В теории производственных функций широкое применение получили две математические схемы (или модели), которые предполагают постоянное значение функции чувствительности σ (q). Одна из них – упомянутая выше производственная функция Кобба – Дугласа в форме

$$F(q)=a_0q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\ldots q_n^{\alpha_n} \qquad (3.1)$$

где $\alpha_j\in(0,1),\ j=1,\ldots,n,$ – постоянные параметры. Легко проверить, что в этом случае $\sigma(q)=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ и, следовательно, является постоянной величиной.

Вторая модель – это так называемая производственная функция с постоянной эластичностью

$$F(q)=\alpha_0(\alpha_1q_1^{-p}+\ldots+\alpha_nq_n^{-p})^{-m/p}, \qquad (3.2)$$
$$\alpha_0,\ m>0,\ p\ge -1,$$

для которой имеет место соотношение $\sigma\ (\mathrm{q}) = \mathrm{m}$. Нереалистично предположить, что такое положение может иметь место на всей поверхности $\mathrm{F(q)} = \bar{y}$. В работе [15] обсуждалась возможность аппроксимации производственной функции в виде

$$\mathrm{F(q)} = \mathrm{F}_0 \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\alpha_i q_i}), \qquad (3.3)$$

для которой величина σ *(q)* оценивается на всех изоквантах функции *F (q)* и представляет собой убывающую функцию. Однако для иллюстрации изложенных выше аналитических соотношений более простой и удобной схемой служит квадратичная аппроксимация функции $F(q)$ в виде

$$F(q) = a^T q + (1/2) q^T Hq, \qquad (3.4)$$

где $a - (n \times 1) -$ вектор, $H -$ отрицательно определенная $(n \times n) -$ матрица, $a + Hq > 0$. Путем подбора соответствующих значений вектора a и матрицы H можно достичь приемлемого уровня адекватности данной модели с реальной производственной ситуацией. Поскольку градиент функции (3.4) равен $a + Hf$, формула (2.10) порождает решение

$$q^v = -\phi(\lambda) H^{-1} a, \qquad (3.5)$$

где $\phi(\lambda) = (1-\lambda)/(2-\lambda)$, $\lambda \le 1$. Формула (3.5) показывает, что траектория $q^v = q^v(\lambda)$ овпадает с диагональю $[0, q^F]$, связывающей начало координат с точкой $q^F = H^{-1}a$, где *F (q)* достигает своего максимума. В точках этой траектории имеем:

$$F(q^v) = -\psi(\lambda) a^T H^{-1} a,$$

$$v(q^v) = -(\phi(\lambda)/(2-\lambda)) a^T H^{-1} a,$$

$$\sigma(q^v) = 2/(3-\lambda),$$

где $\psi(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda)/2(2-\lambda)^2$. Эти соотношения показывают, что при изменении λ в пределах от 1 до $-\infty$, точка $q^v(\lambda)$ *«скользит»* по диагонали $[0,\ q^F]$, причем $F(q^v)$ монотонно возрастает до своего наибольшего значения $F(q^F) = -(1/2) a^T H^{-1} a$, величина $\sigma(q^v)$ монотонно убывает до нулевого значения, а величина $v(q^v)$ монотонно возрастает до точки $q^v = q^F/2$, достигнув в ней своего наибольшего значения $v(q^v) = -(1/4) a^T H^{-1} a$, и затем убывает до нулевого значения в точке q^F. В точках диагонали $[0,\ q^F]$ имеют место отношения

$$q_i^v / q_j^v = (H^{-1}a)_i / (H^{-1}a)_j,$$

$$v_i / v_j = \sigma_i / \sigma_j = a_i q_i^v / a_j q_j^v,$$

$$\mu_{ij} = a_i / a_j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, в случае квадратичной аппроксимации производственной функции точка $q^v = q^F/2$, для которой имеет место условие $\lambda = 0$, оказывается наиболее приемлемой в смысле обеих характеристик $\mathrm{v(q)}$ и $\sigma(\mathrm{q})$. В этой же точке мера чувствительности принимает значение 2/3, функция $\mathrm{F(q^v)}$ составляет 3/4 своего максимума, а функция эффективной отдачи $\mathrm{v(q^v)}$ составляет 2/3 величины $\mathrm{F(q^v)}$.

Существует целый ряд важных приложений, в которых нелинейность и обусловленные ею явления потери чувствительности и убывающей эффективности преобразования ресурсов в рыночную стоимость являются доминирующей характеристикой. К числу таких проблем относятся: *нелинейный акселератор,* связывающий объем индуцируемых капвложений с изменением выпуска продукции экономической системы [16]; макроэкономическая модель динамики «CVP», характеризующая зависимость денежных поступлений и затрат ресурсов от выхода продукции (объема производства) [17]; зависимость производительности от технологической продуктивности, производительности труда и продуктивности управления [11, 18]; пространственно-временная динамика функции ценности или полезности для принятия решений, характеризующая поведение экономического субъекта в ситуации выбора [2, 19], и многие другие.

Эти явления и эффекты сходны по роли и влиянию нелинейной природы «*центральной причинной связи*», которая лежит в основе строения и действия соответствующих систем. В этой связи весьма полезно вспомнить замечание Г. Саймона, сделанное им при обсуждении различных точек зрения относительно за и против создания обшей теории систем: «*метафора и аналогия могут быть очень полезными, но могут и уводить от истины. Все зависит от того,* *существенно или поверхностно сходство, схваченное в метафоре*» [20].

Нелинейные эффекты пространственно-временного характера присутствуют в естественных и искусственных системах [21]. Они с заметным постоянством возникают в технике, экономике и организационном управлении в контексте создания высокоэффективных систем, их роль и влияние обсуждаются с растущей интенсивностью в научных трудах отечественных и зарубежных авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клир Дж. Системология. Опыт решения системных задач. /Пер. с англ., – М.: Радио и связь, 1990. – 544 с.
2. Холл А. Опыт методологии для системотехники. – М.: Советское радио, 1975. – 607 с.
3. Коэн А., Харкурт Дж. Судьба дискуссии двух Кембриджей о теории капитала // Вопросы экономики, 2009, № 8. – С. 4–27.
4. Клейнер Г. Б. Производственные функции: теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
5. Мэнкью Н. Г. Макроэкономист как ученый и инженер // Вопросы экономики, 2009, № 8. – С. 86–103.
6. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис Пресс, 2002. – 564 с.
7. Ставерен И. Этика эффективности // Вопросы экономики, 2009. № 12. – С. 58–71.
8. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982. – 580 с.
9. Обен, Ж. – П. Нелинейный анализ и ее экономические приложения. – М.: Мир, 1988. – 264 с.
10. Сейдж Э. П., Уайт Ч. С., III. Оптимальное управление системами. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
11. Дафт Р. Л. Теория организации. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 736 с.
12. Демиденко Е. З. Метод динамизации коэффициентов регрессии. //Автоматика и телемехагника, 1987, № 9. – С. 77–83.
13. Экланд И. Элементы математической экономики. – М.: Мир, 1983. – 245 с.
14. Кемпбелл Э., Лачс К. С. Стратегический синергизм. – СПб.: Питер, 2004. – 416 с.
15. Саркисян Р. Е. Предпочтения, полезность и меры чувствительности многокритериальных альтернатив // Экономика и математические методы, 2009, том 45, № 3. – С. 87–105.
16. Аллен Р.Дж.Д. Математическая экономика: Пер. с англ. Под ред. А. Л. Вайнштейна. – М.: Мир, 1963. – 580 с.
17. Друри К. Управленческий и производственный учет. Вводный курс: Учебник. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 735 с.
18. Управленческое консультирование. Введение в профессию / Под ред. М. Кубра. – М.: Планум, 2004. – 976 с.
19. Делавинья С. Психология и экономика: Результаты эмпирических исследований. Часть I: Нестандартные предпочтения //Вопросы экономики, 2011, № 4. – С. 50–77.
20. Саймон Г. А. Теория принятия решений в экономической теории и науке о поведении // Теория фирмы. – СПб.: 1995. – С. 54–72..
21. Майнцер К. Сложносистемное мышление: Материя, разум, человечество. Новый синтез. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 464 с. ●

DEPENDENCE OF THE USED RESOURCES ON THE NONLINEARITY OF THE PRODUCTION FUNCTION

Sarkisyan, Rafael E. *– D. Sc. (Tech.), professor of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia.*

Kobets, Elena V. *– Ph. D. student of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia.*

ABSTRACT

The inherent nonlinearity of production functions and loss of sensitivity generated by it and decreasing effectiveness are investigated in the framework of sensitivity theory. On this basis, the problem of optimization of resources is explored according to the criteria of benefits and costs, as well as the nonlinear nature of the central causation, which is characteristic of natural and artificial systems. The effects, reflecting these features, are spatio-temporal in nature and appear in engineering, economics, management. Attention to them is only increasing.

ENGLISH SUMMARY

Background

It is generally accepted that the most complete and useful characteristic of any organization can be obtained in the framework of system theory [1, 2]. This is true also with respect to such key aspects of the structure and functioning of the organization as a rational use of resources, productivity, management efficiency, etc. Pic. 1 shows the most common and productive system view of the organization as an open system «input – output».

Traditionally, it is assumed that a static picture of the observed causal relationship between input and output variables can be described quite accurately with the help of the generalized production function $Y = F(q1, \ldots, qn)$ *that characterizes the technological relationship between value (goods and services) created by the organization and the costs incurred by economic factors. And despite a certain controversy, of «two Cambridges « [3], the concept of the production function remains one of the very constructive mathematical schemes and models for economic analysis and forecasting at the macro and micro levels. [4] Of particular value is its «engineering» component, which plays an important role in the theory and techniques of economic analysis and control [5].*

The theory of the firm postulates the existence of a special economic area (convex subsets of costs), at the points of which the production function $Y = F(q_1, \ldots, q_n)$ *satisfies the conditions* $\partial F / \partial q_j > 0,\ \partial^2 F / \partial q_j^2 < 0,\ j = 1, \ldots, n,$ *[6]. The first of*