УДК: 519.852.33

Решение транспортной задачи методом последовательного уменьшения её размерности

Виктор ИВНИЦКИЙ
Victor A. IVNITSKY

Андрей МАКАРЕНКО
Andrey A. MAKARENKO

***Ивницкий Виктор Аронович** – доктор технических наук, профессор кафедры автоматизированных систем управления Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.*
***Макаренко Андрей Александрович** – студент Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.*

Solution of the Transport Problem by the Method of Successively Decreasing its Dimension
(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 39)

В статье рассматривается решение транспортной задачи двумя способами: методом северо-западного угла и методом минимального элемента. В результате анализа доказывается, что метод минимального элемента позволяет сократить количество итераций в несколько раз. При решении сложных задач большой размерности выбор рационального метода играет определяющую роль, что и демонстрирует способ последовательного уменьшения подобной размерности посредством используемых алгоритмов оптимизации распределения поставок (перевозок) товара.

Ключевые слова: транспортная задача, логистика, оптимизация, программирование, методы решения, размерность, алгоритмы.

Транспортная задача – это поиск оптимального распределения поставок однородного товара от поставщиков к потребителям при известных затратах на перевозку (тарифах) между пунктами отправления и назначения. Является задачей линейного программирования специального вида. Решение её начинается с нахождения опорного плана.

В публикуемой статье сравниваются два способа решения такой задачи:

1. Опорный план формируется методом северо-западного угла.

2. Опорный план найден методом минимального элемента.

Искомый результат решения транспортной задачи: все заявки удовлетворены, все запасы исчерпаны, суммарная стоимость всех перевозок минимальна. Методы решения сводятся к операциям с таблицей, где в определённом порядке записаны все условия задачи. Такая таблица называется транспортной. В ней записываются:

– пункты отправления и назначения;

– запасы, имеющиеся в пунктах отправления (ПО);

– заявки, поданные пунктами назначения (ПН);

Таблица 1

Образец транспортной таблицы

ПО / ПН	B_1	B_2	...	B_n	Запасы a_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
Заявки b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

— стоимости перевозок из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется m пунктов отправления: $A_1, \ldots, A_m$, в которых сосредоточены запасы какого-то однородного товара (груза) в количестве $a_1, \ldots, a_m$ единиц. Кроме того, известны n пунктов назначения: $B_1, \ldots, B_n$, подавших заявку соответственно на $b_{1, \ldots,} b_n$ единиц товара. Предполагается, что сумма всех заявок равна сумме всех запасов:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Установлена стоимость a_{ij} перевозки единицы груза от каждого пункта отправления до каждого пункта назначения. Таблица (матрица) стоимостей перевозки a_{ij} единицы груза задана в следующем виде:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}\ a_{12} \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots\ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots\ a_{mn} \end{matrix} \right\| .$$

Размерностью этой матрицы $m \cdot n$ можно определять и размерность самой транспортной задачи.

Требуется составить такой план перевозок, при котором все заявки были бы выполнены, и при этом общая стоимость перевозок оказалась минимальна. При такой постановке задачи показателем эффективности плана является стоимость.

Обозначим x_{ij} — количество груза, перевозимого из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j. Неотрицательные переменные x_{ij} должны удовлетворять следующим условиям:

1. Суммарное количество груза, направляемого из каждого пункта отправления во все пункты назначения, должно быть равно запасу груза в своём пункте. Это даёт m условий равенств: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \ldots, m.$

2. Суммарное количество груза, доставляемого в каждый пункт назначения из всех пунктов отправления, должно быть равно заявке, поданной соответствующим пунктом. Это даёт n условий равенств:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \ldots, n.$$

3. Суммарная стоимость всех перевозок должна быть минимальной, т.е. должен быть найден $\min\limits_{x_{11}, \ldots, x_{mn}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$.

Стоимости перевозок помещаются в правом верхнем углу каждой ячейки таблицы 1, чтобы в самой ячейке при составлении плана помещать перевозки x_{ij} (см. таблицу 1).

Ранг системы ограничений-уравнений равен $r = m + n - 1$, где m — число строк, n — число столбцов транспортной таблицы. В каждом опорном плане будут отличны от нуля не более $m + n = 1$ перевозок. Ячейки таблицы, в которых будем записывать отличные от нуля перевозки, называются базисными, а остальные (пустые) — свободными.

Решение задачи сводится к следующему. Надо найти те значения перевозок, которые, будучи проставлены в базисных клетках транспортной таблицы, удовлетворяли бы таким условиям:

— сумма перевозок в каждой строке таблицы должна быть равна запасу данного ПО;

— сумма перевозок в каждом столбце должна быть равна заявке данного ПН;

— общая стоимость перевозок — минимальная.

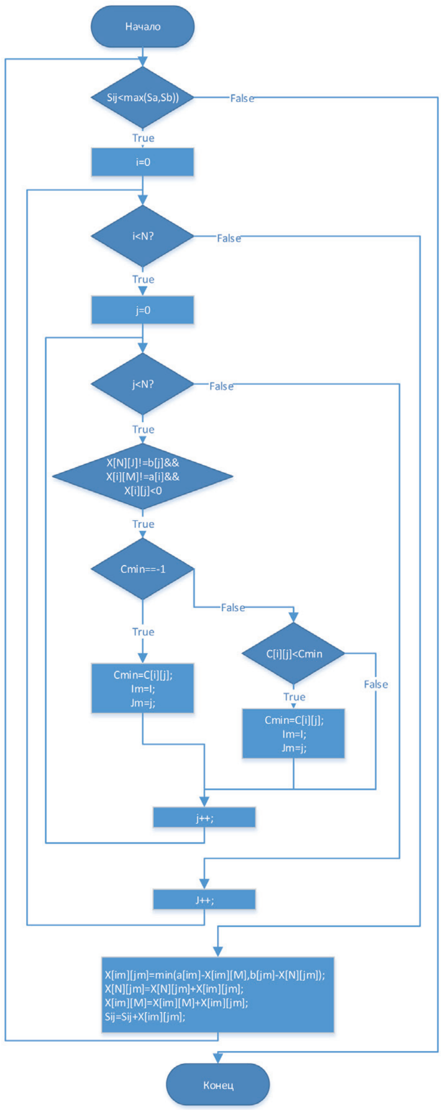


Рис. 1. Блок-схема алгоритма работы программы.

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ

Метод северо-западного угла рассчитан на получение доступного начального решения транспортной задачи. Был предложен Дж. Данцигом в 1951 г. и позднее назван «правилом северо-западного угла» (Чарнес, Купер). Суть метода в последовательном переборе строк и столбцов транспортной таблицы, начиная с левого столбца и верхней строки, и выписывании максимально возможных отгрузов в соответствующие ячейки таблицы так, чтобы не были превышены заявленные в задаче ресурсы поставщика или потребности товарополучателя. На цены доставки метод не акцентирован, поскольку в дальнейшем ожидается оптимизация отгрузок.

Метод последовательного уменьшения размерности транспортной задачи (метод минимального элемента) состоит в использовании следующего алгоритма.

1. Находим клетку таблицы 1 с минимальной стоимостью перевозки единицы груза, т.е. $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n} a_{ij}$, где i – номер пункта отправления (ПО), j – номер пункта назначения (ПН).

2. В этой клетке будет находиться стоимость $a_{i1,j1}$ и номер клетки равен (i_1, j_1), то есть она находится на пересечении j_1-го столбца с заявкой b_{j1} и i_1-й строки с запасом a_{i1}.

3. Далее находим $min(a_{i1}, b_{j1})$.

4. Если $min(a_{i1}, b_{j1}) = a_{i1}$, то в клетку с номером (i_1, j_1) ставим перевозку $x_{i1,j1} = a_{i1}$, запас a_{i1} полагается равным нулю и строчка A_{i1} вычёркивается. При этом транспортная задача исходной размерности $m \cdot n$ превращается в транспортную задачу размерности $(m - 1) \cdot n$. Стоимость обслуживаемой перевозки будет равна $a_{i1} \cdot a_{i1,j1}$.

5. Если $min(a_{i1}, b_{j1}) = b_{j1}$, то в клетку с номером (i_1, j_1) ставим перевозку $x_{i1,j1} = b_{i1}$, заявка b_{i1} полагается равной нулю и столбец B_{i1} вычёркивается. При этом транспортная задача исходной размерности $m \cdot n$ превращается в транспортную задачу размерности $m \cdot (n - 1)$. Стоимость перевозки будет $b_j \cdot a_{i1,j1}$.

6. Если $min(a_{i1}, b_{j1}) = a_{i1} = b_{j1}$, то в клетку с номером (i_1, j_1) ставим перевозку $x_{i1,j1} = b_{i1} = a_{i1}$, запас a_{i1} полагается равным нулю и строчка A_{i1} вычёркивается и заявка b_{1i} полагается равной нулю и столбец B_{i1} вычёркивается. Стоимость перевозки $b_{j1} \cdot a_{i1,j1} = a_{i1} \cdot a_{i1,j1}$.

7. При этом транспортная задача исходной размерности $m \cdot n$ превращается в транспортную задачу размерности $(m - 1) \cdot (n - 1)$.

8. Далее в видоизменённой таблице 1 находим клетку с минимальной стоимостью перевозки единицы груза, т.е. $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n} a_{ij}$, где i – номер пункта отправления, j – номер пункта назначения.

9. Затем повторяются пункты 2–7 алгоритма до тех пор, пока не будут вычеркнуты все строки и столбцы таблицы 1.

```
//Макаренко А.А. УИС-411
float Sij = 0;
 do
 {
 int im;
 int jm;
 int Cmin = -1;
 for(int i = 0;i<N;i + + )
 for(int j = 0;j<M;j + + )
 if(X[N][j]! = b[j])
 if(X[i][M]! = a[i])
 if(X[i][j]<0)
 {
 if(Cmin = = -1)
 {
 Cmin = C[i][j];
 im = i;
 jm = j;
 }
 else
 if(C[i][j]<Cmin)
 {
 Cmin = C[i][j];
 im = i;
 jm = j;
 }
 }

 X[im][jm] = min(a[im]-X[im][M], b[jm]-X[N][jm]);
 X[N][jm] = X[N][jm] + X[im][jm];
 X[im][M] = X[im][M] + X[im][jm];
 Sij = Sij + X[im][jm];

 }while(Sij<max(Sa, Sb));
```

Рис. 2. Код программы. Построение начального опорного плана методом минимального элемента.

Максимальное число шагов предлагаемого алгоритма равно $n + m - 1$. Минимальное число шагов $]\frac{n+m-1}{2}[$, т.е. целая часть от $\frac{n+m-1}{2}$ плюс 1.

Опишем теперь алгоритм поиска клетки таблицы 1 с минимальной стоимостью перевозки единицы груза.

1. Выделяем три ячейки для хранения текущего минимума стоимости перевозки единицы груза и координат этой стоимости: номера строки и номера столбца. В эти три ячейки записываем последовательно значение вектора $(a_{1,1}, 1,1)$.

2. В верхней строке таблицы 1 берём вектор $(a_{1,2}, 1,2)$.

3. Проверяем выполнение неравенства $a_{1,1} > a_{1,2}$. Если оно выполняется, то в выделенные три ячейки для хранения текущего минимума стоимости перевозки единицы груза и координат этой стоимости записываем последовательно значение вектора $(a_{1,2}, 1,2)$. Если оно не выполняется, то в выделенных ячейках ничего не изменяется.

4. Далее п. 3 выполняется для всех оставшихся стоимостей первой строки.

5. Затем пп. 3 и 4 выполняются для всех последующих строк таблицы 1.

Таким образом, находим клетку таблицы с минимальной стоимостью перевозки единицы груза.

ВЫВОДЫ

Проведя ряд опытов, можно убедиться, что построение начального опорного плана с помощью метода минимального

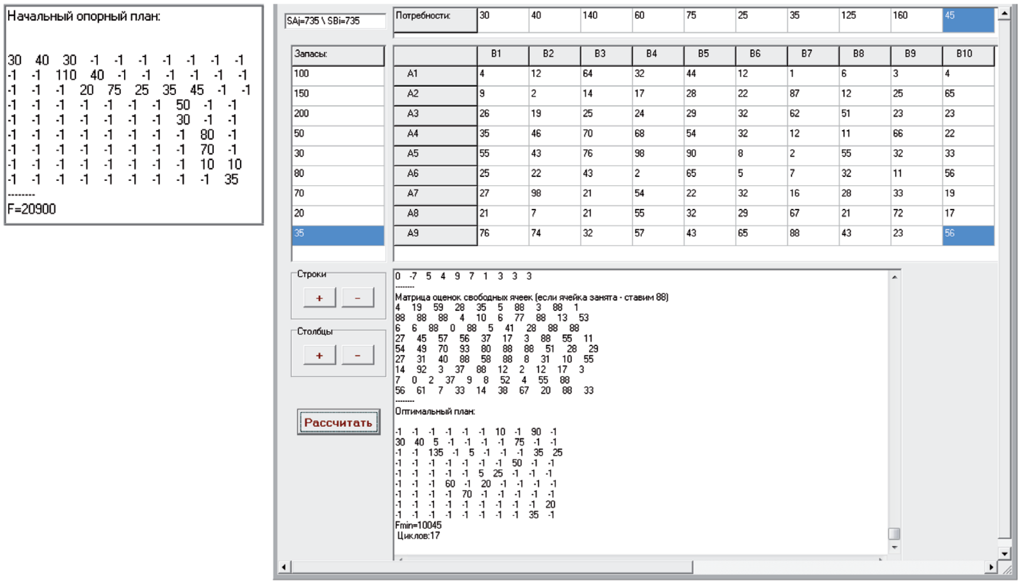
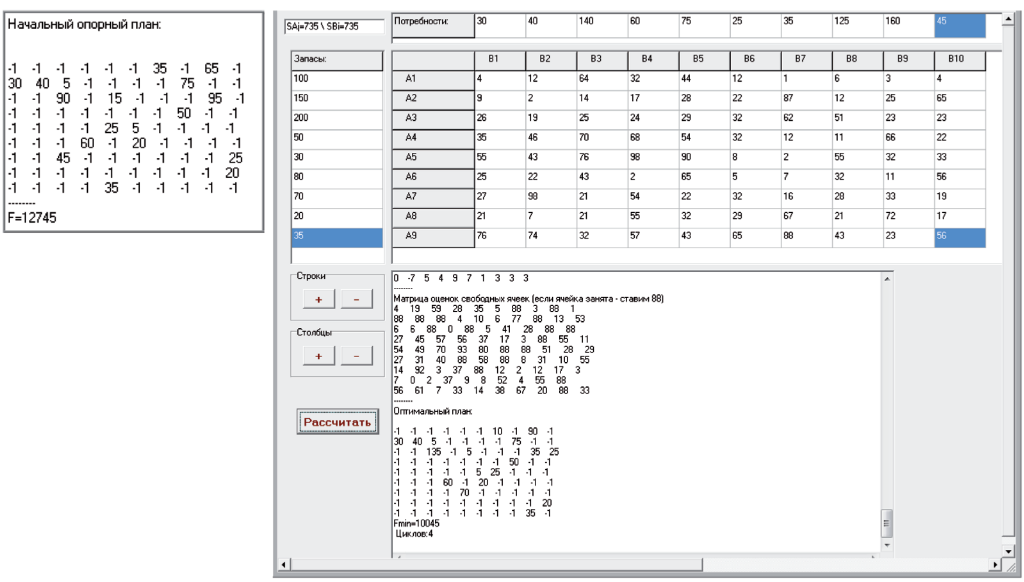


Рис. 3. Метод северо-западного угла.



$E = 17/4 = 4.25$

Рис. 4. Метод минимального элемента.

элемента даёт большое преимущество при его оптимизации. Исходя из результатов, можно заявить, что благодаря методу минимального элемента количество итераций оптимизации сокращается в два и более раз, в зависимости от сложности задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивницкий В. А. Лекции по математическим методам транспортной логистики.– М.: МИИТ, 2015.– 336 с.
2. Данциг Дж. Б. Линейное программирование, его обобщения и применения: Пер. с англ.– М.: Прогресс, 1966.– 600 с.
3. Кравцов М. К. К вопросу понижения размерности транспортной задачи // Известия АН БССР: Серия физ.-мат. наук.– 1973.– № 2.– С. 59–62.

Координаты авторов: **Ивницкий В. А.** – ivnitsky.viktor@vniizht.ru,
Макаренко А. А. – dronskiy95@yandex.ru.

Статья поступила в редакцию 27.10.2016, актуализирована 30.11.2016, принята к публикации 04.03.2017.

SOLUTION OF THE TRANSPORT PROBLEM BY THE METHOD OF SUCCESSIVELY DECREASING ITS DIMENSION

Ivnitsky, Victor A., *Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia.*
Makarenko, Andrey A., *Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia.*

ABSTRACT

The article considers the solution of the transport problem in two ways: by the method of the north-western angle and the method of the minimal element. As a result of the analysis, it is proved that the minimal element method allows to reduce the number of iterations by several times. In solving complex problems of large dimension, the choice of a rational method plays a decisive role, which is demonstrated by the method of successively reducing this dimension by means of the algorithms used to optimize the distribution of shipments of goods.

Keywords: transport problem, logistics, optimization, programming, decision methods, dimension, algorithms.

Background. *The transport problem is the search for the optimal distribution of supplies of a homogeneous product from suppliers to consumers at known costs of transportation (tariffs) between origin and destination points. It is a linear programming task of a special kind. Its solution begins with finding a basic plan.*

In the article published, two ways of solving this problem are compared:

1. The basic plan is formed by the method of the north-western angle.

2. The basic plan is found by the method of the minimal element.

The required result of solving the transport problem: all applications are satisfied, all stocks are exhausted, the total cost of all transportation is minimal. The solution methods are reduced to operations with the table, where in a certain order all the conditions of the problem are written down. Such a table is called a transport table. It records:

– points of departure and destination;

– stocks available at departure points (DepP);

– applications submitted by destination points (DesP);

– cost of transportation from each point of departure to each destination.

Objective. *The objective of the authors is to consider the solution of the transport problem in two ways: by the method of the north-western angle and the method of the minimal element.*

Methods. *The authors use general scientific and engineering methods, mathematical analysis, north-western angle method, minimal element method.*

Results.

Formulation of the problem

There are m departure points: $A_1,\dots, A_m$, in which the stocks of some homogeneous goods (cargo) are concentrated in the amount of $a_1,\dots, a_m$ units. In addition, n destination points are known: $B_1,\dots, B_n$, who applied for $b_{1,\dots,} b_n$ units of goods, respectively. It is assumed that the sum of all applications is equal to the sum of all stocks: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. The cost a_{ij} of transportation of a unit of cargo from each point of departure to each point of destination has been established. The table (matrix) of transportation costs a_{ij} of the unit of cargo is given in the following form:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

The dimension of this matrix m • n can also be used to determine the dimension of the transport problem itself.

It is required to make such a plan of transportation, in which all applications would have been fulfilled, and the total cost of all transportations would be minimal. With such a statement of the problem, the indicator of the efficiency of the transportation plan is the cost.

Let x_{ij} be the amount of cargo sent from the departure point A_i to the destination point B_j. Non-negative variables x_{ij} must satisfy the following conditions:

1. The total amount of cargo sent from each point of departure to all destinations should be equal to the cargo stock at this point. This gives m conditions for the equalities: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,\dots,m.$

2. The total amount of cargo delivered to each destination point from all points of departure must be equal to the application filed by the relevant paragraph. This gives n conditions for the equalities:

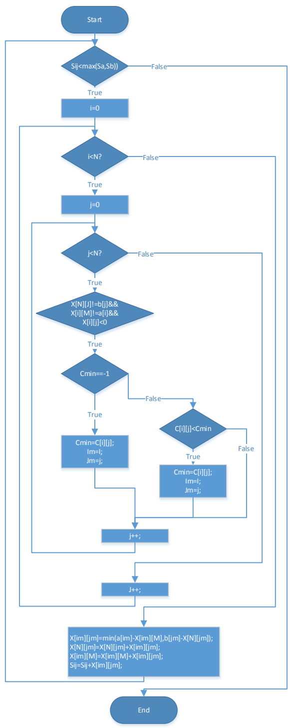
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,\dots,n.$$

3. The total cost of all transportation should be minimal, i.e $\min\limits_{x_{11},\dots,x_{mn}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}$ *must be found.*

Table 1

Sample of a transport table

DepP / DesP	B_1	B_2	…	B_n	Stocks a_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	a_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	a_m
Applications b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$



Pic. 1. Block diagram of the program operation algorithm.

```
//Makarenko A.A. UIS-411
float Sij = 0;
do
{
int im;
int jm;
int Cmin = -1;
for(int i = 0;i<N;i++)
for(int j = 0;j<M;j++)
if(X[N][j]! = b[j])
if(X[i][M]! = a[i])
if(X[i][j]<0)
{
if(Cmin =  = -1)
{
Cmin = C[i][j];
im = i;
jm = j;
}
else
if(C[i][j]<Cmin)
{
Cmin = C[i][j];
im = i;
jm = j;
}
}

X[im][jm] = min(a[im]-X[im][M],b[jm]-X[N][jm]);
X[N][jm] = X[N][jm]+X[im][jm];
X[im][M] = X[im][M]+X[im][jm];
Sij = Sij+X[im][jm];

}while(Sij<max(Sa,Sb));
```

Pic. 2. The code of the program. Construction of the initial basic plan by the minimal element method.

Costs of transportation are placed in the upper right corner of each cell of the table in order to place x_{ij} transportation in the cell itself when drawing a plan (see table 1).

The rank of the constraint-equation system is $r = m + n - 1$, where m is the number of rows, n is the number of columns in the transport table. In each basic plan, no more than $m + n = 1$ transportation will be different from zero. The cells of the table, in which we will write the nonzero transportations, are called basic, and the remaining (empty) are free.

The solution of the problem reduces to the following. It is necessary to find those values of transportation, which, if affixed to the basic cells of the transport table, would satisfy such conditions:

– the amount of transportation in each row of the table should be equal to the stock of this DepP;

– the amount of transportation in each column should be equal to the application of this DesP;

– the total cost of transportation is minimal.

Ways of solution

The north-western angle method is designed to obtain an accessible initial solution to the transport problem. It was proposed by J. Dantzig (1951) and later called «the rule of the north-western angle» (Charnes, Cooper). The essence of the method is the sequential search for the rows and columns of the transport table, starting with the left column and the top row, and writing out the maximum possible shipments to the appropriate table cells so that the stated resources of the supplier or the needs of the consignee are not exceeded. The method is not focused on delivery prices, since in the future the optimization of shipments is expected.

The method of successively reducing the dimension of the transport problem (the minimal element method) consists in using the following algorithm.

1. We find the cell of Table 1 with the minimum cost of transporting the unit of cargo, i.e. $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n} a_{ij}$, where i – number of the departure point (DepP), j – number of the destination point (DesPПН).

2. In this cell there will be the cost $a_{i1,j1}$ and the cell number is (i_1, j_1), that is, it is at the intersection of the j_1-th column with the application b_{j1} and the i_1-th row with the stock a_{i1}.

3. Then we find $\min(a_{i1}, b_{j1})$.

4. If $\min(a_{i1}, b_{j1}) = a_{i1}$, then we put in the cell with the number (i_1, j_1) transportation $x_{i1,j1} = a_{i1}$, the stock a_{i1} is set equal to zero and the row A_{i1} is deleted. In this case the transport problem of the original dimension $m \cdot n$ turns into a transport problem of dimension $(m-1) \cdot n$. The cost of serviced transportation will be equal to $a_{i1} \cdot a_{i1,j1}$.

5. If $\min(a_{i1}, b_{j1}) = b_{j1}$, we put in the cell with the number (i_1, j_1) transportation $x_{i1,j1} = b_{i1}$, the application b_{i1} is set equal to zero and the column B_{i1} is deleted. In this case the transport problem of initial dimension $m \cdot n$ turns into a transport problem of the dimension $m \cdot (n-1)$. The cost of transportation will be $b_j \cdot a_{i1,j1}$.

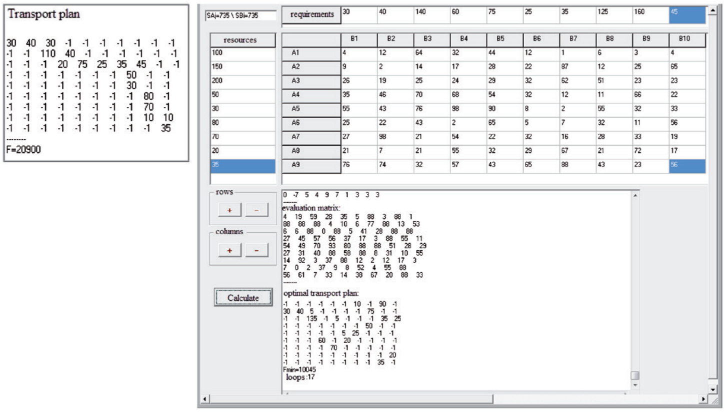
6. If $\min(a_{i1}, b_{j1}) = a_{i1} = b_{j1}$, then we put in the cell with the number (i_1, j_1) transportation $x_{i1,j1} = b_{i1} = a_{i1}$, the stock a_{i1} is set equal to zero and the row A_{i1} is deleted and the application b_{1i} is set equal to zero and the column B_{i1} is deleted. The cost of transportation $b_{j1} \cdot a_{i1,j1} = a_{i1} \cdot a_{i1,j1}$.

7. In this case the transport problem of initial dimension $m \cdot n$ turns into a transport problem of dimension $(m-1) \cdot (n-1)$.

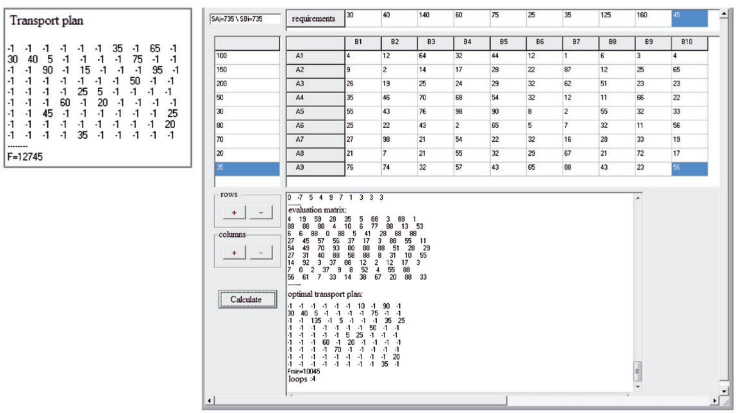
8. Further in the modified table 1 we find a cell with a minimum cost of transportation of a unit of cargo, i.e. $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n} a_{ij}$, where i – number of the point of departure, j – number of the point of destination.

9. Then steps 2–7 of the algorithm are repeated until all the rows and columns of Table 1 are deleted.

The maximum number of steps of the proposed



Pic. 3. North-western angle method.



Pic. 4. Minimum element method.

E = 17/4 = 4.25

algorithm is equal to n + m – 1. The minimum number of steps is $]\frac{n+m-1}{2}[$*, i.e. the whole part from* $\frac{n+m-1}{2}$ *plus 1.*

We describe now the algorithm for searching for a cell in Table 1 with the minimum cost of transportation of a unit of cargo.

1. We allocate three cells for storing the current minimum of the cost of transportation of the unit of cargo and the coordinates of this cost: number of the row and number of the column. In these three cells, we record successively the value of the vector ($a_{1,1}$, 1,1).

2. In the top row of Table 1 we take the vector ($a_{1,2}$, 1,2).

3. We verify the fulfillment of the inequality $a_{1,1} > a_{1,2}$. *If it is fulfilled, then in the allocated three cells for storing the current minimum of the cost of transportation of the unit of cargo and the coordinates of this cost, we write sequentially the value of the vector* ($a_{1,2}$, 1,2). *If it is not fulfilled, then nothing changes in the selected cells.*

4. Further, step 3 is satisfied for all remaining values of the first row.

5. Then, steps 3 and 4 are satisfied for all subsequent rows of Table 1.

Thus, we find the cell of Table 1 with the minimum transportation cost of the unit of cargo.

Conclusions. *Having carried out a series of experiments, one can be sure that the construction of the initial basic plan with the help of the minimal element method gives a great advantage in its optimization. Based on the results, it can be stated that due to the minimal element method, the number of optimization iterations is reduced by two or more times, depending on the complexity of the problem.*

REFERENCES

1. Ivnitsky, V. A. Lectures on mathematical methods of transport logistics [*Lekcii po matematicheskim metodam transportnoj logistiki*]. Moscow, MIIT publ., 2015, 336 p.

2. Danzig, J. B. Linear programming, its generalizations and applications [*Linejnoe programmirovanie, ego obobshhenija i primenenija. Transl. from English*]. Moscow, Progress publ., 1966, 600 p.

3. Kravtsov, M. K. On the problem of lowering the dimension of the transport problem [*K voprosu ponizhenija razmernosti transportnoj zadachi*]. *Izvestija AN BSSR: Serija fiz.-mat. nauk*, 1973, Iss. 2, pp. 59–62.

Information about the authors:
Ivnitsky, Victor A. – D.Sc. (Eng), professor of the department of Automated control systems of Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia, ivnitsky.viktor@vniizht.ru.
Makarenko, Andrey A. – student of Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia, dronskiy95@yandex.ru.

Article received 27.10.2016, revised 30.11.2016, accepted 04.03.2017.