



# Математическое моделирование участков переменной жёсткости перед искусственными сооружениями



Валентин ВИНОГРАДОВ  
Valentin V. VINOGRADOV

Алексей ЛОКТЕВ  
Alexey A. LOKTEV



Зульфия ФАЗИЛОВА  
Zulfiya T. FAZILOVA

*Виноградов Валентин Васильевич – доктор технических наук, профессор Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.*  
*Локтев Алексей Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой транспортного строительства РУТ (МИИТ), Москва, Россия.*  
*Фазилова Зульфия Тельмановна – кандидат технических наук, доцент РУТ (МИИТ), Москва, Россия.*

## Mathematical Modeling of Sections of Variable Rigidity in Front of Artificial Structures

(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 80)

**В статье рассматриваются особенности переходной зоны с балластного подшпального основания на мостовое сооружение с различными типами пролётных строений, а также сопряжённые с зоной участки безбалластного пути. Предложена аналитическая модель для описания динамического поведения железнодорожного пути в виде трансверсально-изотропной пластины с переменными параметрами жёсткости. Приведены примеры использования предложенной модели для вычисления динамической осадки земляного полотна под воздействием подвижного состава с разными грузовыми и скоростными характеристиками.**

*Ключевые слова:* железная дорога, мост, земляное полотно, остаточная деформация, участок переменной жёсткости, осадка пути, уклон, упругая волна, профиль пути, трансверсально-изотропная пластина.

При реконструкции участков железных дорог для организации скоростного движения поездов должны быть ликвидированы все проблемные места, которые могут стать источниками больших расстройств пути и возможных ограничений скоростного режима.

Одним из таких объектов является зона примыкания железнодорожного пути на земляном полотне к мосту. Путь на самом мосту достаточно стабилен и не имеет больших просадок, в то время как на земляном полотне в зоне подходов имеет осадку. С целью снижения потенциальной опасности необходимо усиление пути в этой зоне. Для плавного сопряжения проблемных мест на подходах и мостах с балластной и безбалластной конструкцией полотна устраиваются переходные участки с переменной жёсткостью таким образом, чтобы вертикальная жёсткость на мосту и подходной насыпи не сильно отличались друг от друга.

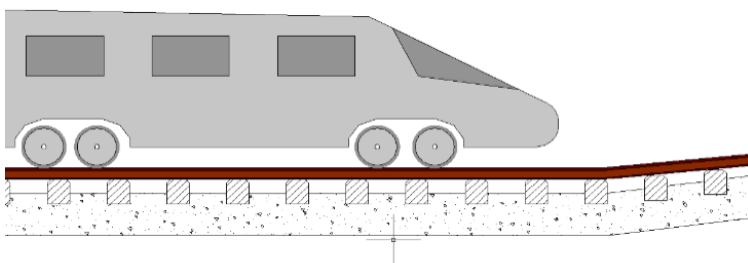


Рис. 1. Участок сопряжения конструкций разной жёсткости.

1.

Длина переходного участка железнодорожного пути с переменной жёсткостью на подходе к мосту определяется для каждого объекта длиной зоны расстройств железнодорожного пути. Помогают в этом данные вагона-путеизмерителя или результаты испытаний нагрузочными поездами.

В таблице 1 приведена минимальная длина участка с переменной жёсткостью на подходе к мосту в зависимости от скорости движения поездов [1].

В исследованиях, проводимых Holland Railconsult [2], длина влияния переходной зоны может быть определена с помощью так называемого правила «одной секунды». В этом случае, к примеру, при скорости движения поезда 200 км/ч длина зоны составит 55 м.

При прохождении подвижного состава по участку перегиба, возникшего в процессе осадки пути, оказывается дополнительное динамическое воздействие на колёсную пару, величина которого зависит от величины перепада (угла) в зоне перехода (рис. 1). Повышенная вибродинамическая нагрузка приводит к повышенному износу элементов верхнего строения пути и появлению дефектов в верхних слоях земляного полотна.

Интенсивность воздействия вибродинамической нагрузки от подвижного состава можно рассчитать по формуле:

$$\rho_0 = \frac{1.3 P_n}{l_{жб} b_0}, \quad (1)$$

где  $P$  – осевая нагрузка расчётной подвижной единицы, кН;

$n$  – число осей в тележке;

$l_{жб}$  – длина жёсткой базы тележки, м;

$b_0$  – длина шпалы, м (при железобетон-

ных шпалах – 2,7 м, при деревянных – 2,75 м).

Существует множество методов и вычислительных алгоритмов, чтобы решать задачи расчёта конструкций, их элементов и целых сооружений на различные виды прилагаемой нагрузки, но наиболее актуальны методики, позволяющие учесть не только динамику в приложении нагрузки, но и динамику в изменениях деформационных и силовых характеристик конструкции пути и основания [3].

Имея данные натуральных наблюдений, можно построить математическую модель участка переменной жёсткости с использованием численных методов в программной среде с помощью ЭВМ и получить пакет функциональных требований и стандартов для переходных конструкций.

В большинстве современных вычислительных комплексов (ПК Лира, Мираж, SCAD, Ansys, Abaqus, Nastran, Lusas и др.) преимущество отдаётся методам конечных и граничных элементов [4–6].

Метод конечных элементов заменяет задачу нахождения функции на задачу нахождения окончательного числа наиболее её точных значений в разных узловых точках. Первичная задача касательно функции строится из функционального уравнения, задача метода конечных элементов относитель-

Таблица 1  
Минимальная длина участка переменной жёсткости

№ пп.	Минимальная длина участка, м	Максимальная скорость движения поездов, км/ч
1	15	менее 80
2	20	80–120
3	25	более 120



но её значений в узлах предполагает нарушение системы алгебраических уравнений. С занижением максимального размера составляющих элементов добавляется количество узлов и искомым узловым параметрам. При этом увеличивается шанс наиболее точно приблизиться к условиям задачи и подойти вплотную к искомому результату.

## 2.

В нашем варианте железнодорожный путь предлагается представить упругой ортотропной пластинкой [3, 4, 7], динамическое поведение которой описывается уравнениями типа Уфлянда—Миндлина—Рейснера, учитывающими инерцию вращения поперечных сечений и деформацию поперечного сдвига [8, 9]. Поскольку движение транспортного средства в прямом участке представляет собой фактически осесимметричную задачу, то и определяющие уравнения можно представить в общем виде, когда волновые характеристики не зависят от угла  $\theta$  [10]:

$$D_r \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - D_\theta \frac{\varphi}{r^2} + hKG_r \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) = -\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$KG_r \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + KG_r \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$C_r \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - C_\theta \frac{u}{r^2} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$C_k \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$D_k \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \right) - KhG_{\theta z} \psi = -\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (6)$$

где

$$D_r = \frac{h^3}{12} B_r, \quad D_\theta = \frac{h^3}{12} B_\theta, \quad D_k = \frac{h^3}{12} B_k,$$

$$C_r = hB_r, \quad C_\theta = hB_\theta, \quad C_k = hB_k,$$

$$D_{r0} = D_r \sigma_r + 2D_k,$$

$$B_r = \frac{E_r}{1 - \sigma_r \sigma_\theta}, \quad B_\theta = \frac{E_\theta}{1 - \sigma_r \sigma_\theta}, \quad B_k = G_{r\theta},$$

$$E_r \sigma_r = E_\theta \sigma_\theta, \quad K = \frac{5}{6}; \quad D_r, D_\theta \text{ и } C_r, C_\theta - \text{соответственно жёсткости изгиба и растяжения-сжатия для направлений } r, \theta; D_k - \text{жёсткость кручения; } C_k - \text{жёсткость сдвига; } E_r, E_\theta \text{ и } \sigma_r, \sigma_\theta - \text{модуль упругости и коэффициент Пуассона для направлений } r, \theta; G_{rz}, G_{\theta z} - \text{модуль сдвига в плоскостях } rz \text{ и } \theta z \text{ соответственно; } w(r, \theta) - \text{нормальное пе-}$$

ремещение срединной плоскости;  $u(r, \theta)$  и  $v(r, \theta)$  — тангенциальные перемещения срединной поверхности соответственно по координатам  $r, \theta$ ;  $\varphi(r, \theta)$  и  $\psi(r, \theta)$  — произвольные искомые функции координат  $r, \theta$ .

Если рассмотреть деформирование безбалластного пути, то предлагаемую модель можно упростить, приняв, что плита основания может быть представлена трансверсально-изотропной пластиной, лежащей на деформируемом основании, два края которой жёстко закреплены (вдоль пути, по направлению рельс), а два других — шарнирно опёрты (поперёк пути, по направлению шпал) [11–13]. В этом случае пластина в недеформируемом состоянии занимает область  $\{0 \leq x \leq l; 0 \leq y \leq l_2; -h \leq z \leq h\}$ . Для полного моделирования динамического поведения и расчёта по первой и второй группе предельных состояний железобетонной плиты необходимо первоначальную задачу представить в виде совокупности более простых, и первой в этом ряду является задача определения собственных колебаний пластины. Уравнение, описывающее собственные поперечные колебания пластины, можно получить из соотношений (2)–(6) и записать в виде [15]:

$$A_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + A_2 \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} - A_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta W + A_4 \Delta^2 W + P(W) = 0, \quad (7)$$

где  $W$  — поперечное смещение точек срединной плоскости пластины,  $\Delta$  — оператор Лапласа.

$$A_1 = \rho_1; A_2 = \rho_1^2 \left( A_{33}^{-1} + 3A_{44}^{-1} \right) \frac{h^2}{b}; A_3 = \left\{ -\rho_1 \left[ 2 - 2A_{11} A_{33}^{-1} - 3 \left( A_{13}^2 - A_{11} A_{33} \right) A_{33}^{-1} A_{44}^{-1} \right] \right\} \frac{h^2}{b}; A_4 = 2A_{33}^{-1} \left( A_{11} A_{33} - A_{13}^2 \right) \frac{h^2}{b}; A_5 = \frac{S}{2h} \rho_1; A_6 = \frac{S}{2h} \rho_1 \frac{h^2}{2} \left( \rho_1 A_{44}^{-1} + 3A_{33}^{-1} \right); A_7 = -4 \frac{S}{2h} \rho_1 A_{11} A_{33}^{-1}. \quad (8)$$

В этих соотношениях величина  $P(W) = A_5 \frac{\partial W}{\partial t} + A_6 \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + A_7 \Delta \frac{\partial W}{\partial t}$  — она определяет реакцию основания,  $\rho_1$  — плотность,  $b$  — скорость поперечной волны;  $A_{11} = A_{13} = \dots = A_{nm}$  — коэффициенты анизотропии материала пластины.

Граничные условия для задачи деформирования пластины за счёт поперечных колебаний в данной постановке могут быть представлены в виде [16, 17]:

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0; x = 0, l_1; \quad (9)$$

$$W = \frac{\partial W}{\partial y} = 0; y = 0, l_2.$$

Решение однородного уравнения (7) предлагается искать в следующем виде:

$$W(x, y, t) = W(x, y) \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right), \quad (10)$$

где  $\xi$  — частота собственных колебаний пластины.

После подстановки (10) в (7) получим:

$$\begin{aligned} & A_1 W(x, y) \left(\frac{b\xi}{h}\right)^2 \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) + \\ & + A_2 W(x, y) \left(\frac{b\xi}{h}\right)^4 \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) - \\ & - A_3 \Delta W(x, y) \left(\frac{b\xi}{h}\right)^2 \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) + \\ & + A_4 \Delta^2 W(x, y) \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) + \\ & + A_5 W(x, y) \left(\frac{b\xi}{h}\right) \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) + \\ & + A_6 W(x, y) \left(\frac{b\xi}{h}\right)^3 \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) + \\ & + A_7 \Delta W(x, y) \left(\frac{b\xi}{h}\right) \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для удобства работы с математической моделью пластины целесообразно использовать безразмерные величины  $x = \frac{l_1}{\pi} \alpha;$

$y = \frac{l_2}{\pi} \beta$ , с помощью которых определяющее

уравнение (11) можно представить в следующем виде:

$$V(\alpha, \beta) \left[ \left( \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{l_1^2}{l_2^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{l_1^4}{l_2^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right) + B_1 \left( \frac{l_1^2}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{l_1^4}{\pi^2 l_2^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4} \right] = 0. \quad (12)$$

Здесь приняты обозначения:

$$B_1 = \frac{1}{A_4} \left[ -A_3 \left(\frac{b\xi}{h}\right)^2 + A_7 \left(\frac{b\xi}{h}\right) \right];$$

$$B_2 = \frac{1}{A_4} \left[ A_1 \left(\frac{b\xi}{h}\right)^2 + A_2 \left(\frac{b\xi}{h}\right)^4 + A_5 \left(\frac{b\xi}{h}\right) + A_6 \left(\frac{b\xi}{h}\right)^3 \right].$$

Для решения уравнения (12) предлагается использовать метод декомпозиций [18], он позволяет рассмотреть отдельно три вспомогательные задачи, объединив полученные результаты.

$$1. \frac{\partial^4 V_1}{\partial \alpha^4} = f_1(\alpha, \beta) \quad V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} = 0 \quad \alpha = 0, \pi.$$

$$2. \eta^4 \frac{\partial^4 V_2}{\partial \beta^4} = f_2(\alpha, \beta) \quad V_2 = \frac{\partial V_2}{\partial \beta} = 0 \quad \beta = 0, \pi. \quad (13)$$

$$3. \left[ 2\eta^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_1 \frac{l_1^2}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4} \right] V_3 + f_3 + f_2 = 0.$$

Здесь

$$\eta = l_1/l_2, \quad f_i(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m}^{(i)} \sin(n\alpha) \sin(m\beta) -$$

произвольные функции в общем виде;  $a_{n,m}^{(i)}$  — произвольные постоянные,  $i=1,2$ .

При определении динамических характеристик поведения пути с учётом собственных колебаний для заданных точек конструкции можно предположить, что приближённо будут выполняться следующие соотношения:

$$V_1 \cong V_2; \quad V_3 = \frac{1}{2}(V_1 + V_2). \quad (14)$$

Общее решение вспомогательных задач (13) предлагается искать в вариантах:

$$\begin{aligned} V_1(\alpha, \beta) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^4} \sin(n\alpha) \sin(m\beta) + \\ &+ \frac{\alpha^3}{6} \psi_1(\beta) + \frac{\alpha^2}{2} \psi_2(\beta) + \alpha \psi_3(\beta) + \psi_4(\beta); \\ V_2(\alpha, \beta) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^4} \sin(n\alpha) \sin(m\beta) + \\ &+ \frac{\beta^3}{6} \phi_1(\alpha) + \frac{\beta^2}{2} \phi_2(\alpha) + \beta \phi_3(\alpha) + \phi_4(\alpha), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\psi_i(\beta)$  и  $\phi_i(\alpha)$  — некоторые произвольные функции, для определения которых необходимо учесть граничные условия (9) и дефрагментацию общей задачи (13).

Определяя  $\psi_i(\beta)$  и  $\phi_i(\alpha)$ , получим:

при  $\alpha = 0$

$$V_1(\alpha, \beta) = \psi_4(\beta) = 0, \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha^2} = \psi_2(\beta) = 0; \quad (16)$$

при  $\alpha = \pi$

$$\psi_1(\beta) = 0, \quad \psi_3(\beta) = 0,$$

$$V_1(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^4} \sin(n\alpha) \sin(m\beta); \quad (17)$$

при  $\beta = 0$

$$V_2(\alpha, \beta) = \phi_4(\alpha) = 0, \quad \phi_3(\alpha) = - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^3} \sin(n\alpha); \quad (18)$$

при  $\beta = \pi$

$$\phi_1(\alpha) = - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^3} \sin(n\alpha) \left( (-1)^m + 1 \right),$$

$$\phi_2(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^3} \sin(n\alpha) \left( (-1)^m + 2 \right), \quad (19)$$



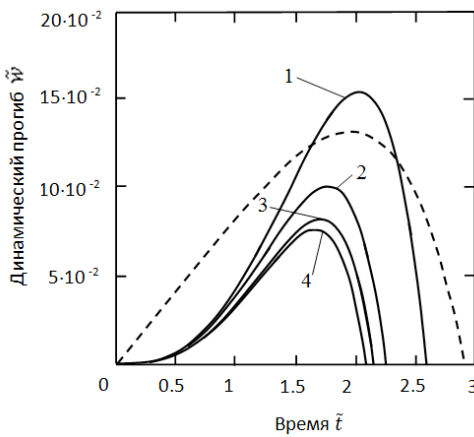


Рис. 3. Зависимость динамического прогиба от времени для различных значений соотношения  $E_0/E_r$ .

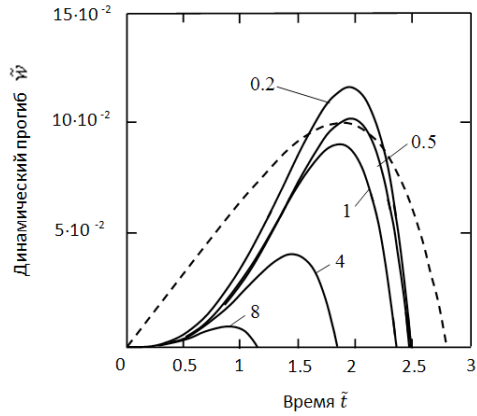


Рис. 4. Зависимость динамического прогиба от времени для различных значений соотношения  $G_{rz}/E_r$ .

$$V_2(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^3} \sin(n\alpha) \left( \frac{1}{m} \sin(m\beta) - \frac{\beta^3}{\pi^2} ((-1)^m + 1) + \frac{\beta^2}{\pi} ((-1)^m + 2) - \beta \right)$$

В итоге из (13) имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} V_1 - V_2 = 0, \\ V_3 = \frac{1}{2}(V_2 + V_1), \\ \left[ 2\eta^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_1 \frac{l_1^2}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4} \right] V_3 + f_1 + f_2 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

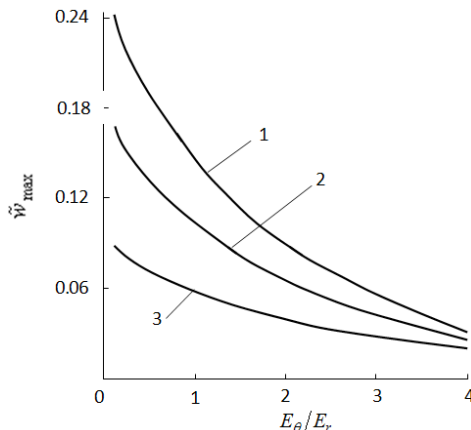


Рис. 5. Зависимость максимального прогиба от соотношения  $E_0/E_r$  для различных значений  $\tilde{E}$ .

При  $n, m = 1$  из (20) фиксируем соотношения:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} \sin(\alpha) \sin(\beta) - \frac{a_{11}^{(2)}}{\eta^4} \sin(\alpha) \left( \sin(\beta) + \frac{\beta^2}{\pi} - \beta \right) = 0, \\ \left[ 2\eta^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_1 \frac{l_1^2}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4} \right] \frac{1}{2} \cdot \\ \cdot \left( a_{11}^{(1)} \sin(\alpha) \sin(\beta) + \frac{a_{11}^{(2)}}{\eta^4} \sin(\alpha) \left( \sin(\beta) + \frac{\beta^2}{\pi} - \beta \right) \right) + \\ + a_{11}^{(1)} \sin(\alpha) \sin(\beta) + a_{11}^{(2)} \sin(\alpha) \sin(\beta) = 0. \end{cases}$$

Полагая  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$  в предыдущих соотношениях, получим систему уравнений, которая имеет ненулевое решение только в случае равенства нулю своего главного определителя:

$$\begin{aligned} & B_1 \frac{l_1^2}{\pi^2 \eta^2} \left[ \left( \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \left( \frac{2}{\pi} - 1 \right) \right] - \\ & - B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4 \eta^4} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\eta^4} \left( 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) - 1 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Если в (21) подставить выражения для  $B_1$  и  $B_2$ , то получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_4} \left( -A_3 \left( \frac{\xi b}{h} \right)^2 + A_7 \left( \frac{\xi b}{h} \right) \right) \frac{l_1^2}{\pi^2 \eta^2} \left[ \left( \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{2}{\pi} - 1 \right) \right] - \\ & - \frac{1}{A_4} \left( A_2 \left( \frac{\xi b}{h} \right)^4 + A_6 \left( \frac{\xi b}{h} \right)^3 + A_1 \left( \frac{\xi b}{h} \right)^2 + A_5 \left( \frac{\xi b}{h} \right) \right) \frac{l_1^4}{\pi^4 \eta^4} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \\ & - \frac{1}{\eta^4} \left( 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) - 1 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (22) можно представить в виде алгебраического уравнения четвёртого

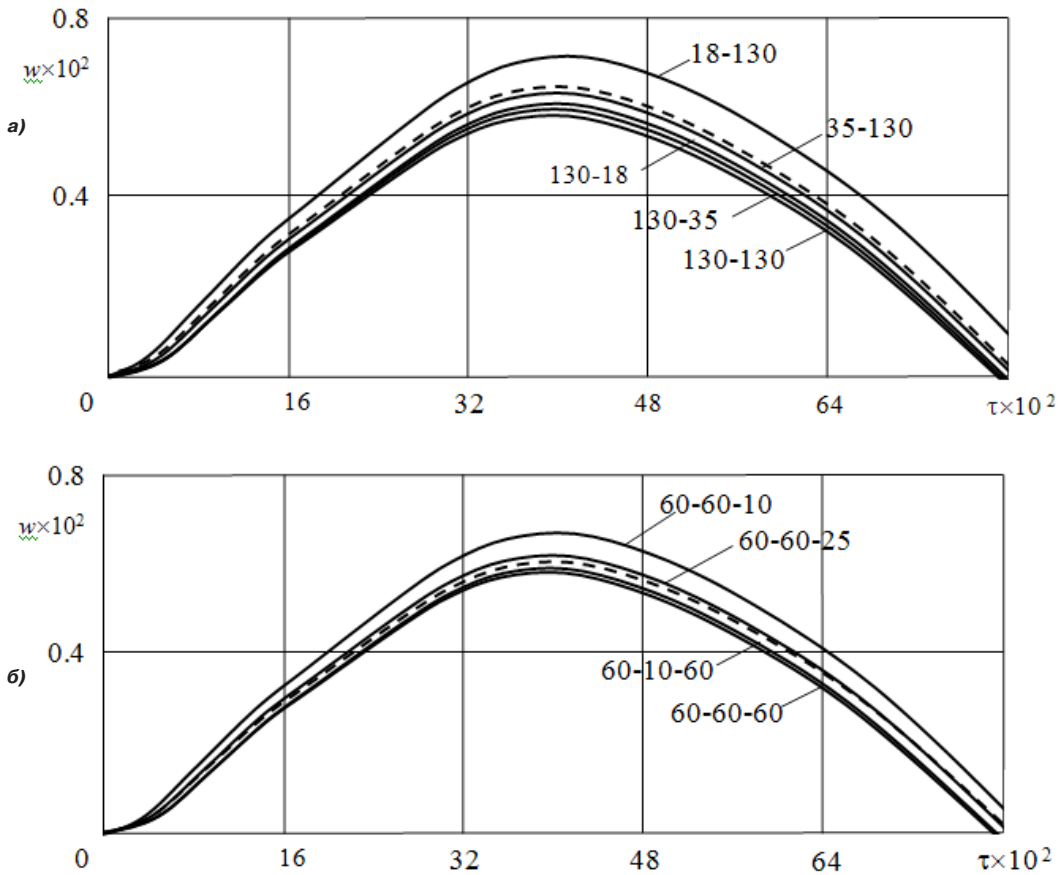


Рис. 6. Зависимость динамического прогиба в месте удара от времени для различных значений в направлениях анизотропии: а) модулей деформации, б) модулей сдвига.

порядка, неизвестным в котором является частота собственных колебаний безбалластного пути

$$d_1 \xi^4 + d_2 \xi^3 + d_3 \xi^2 + d_4 \xi + d_5 = 0. \quad (23)$$

Здесь приняты следующие обозначения коэффициентов при неизвестных:

$$d_1 = -\frac{A_2}{A_4} \frac{l_1^4}{\pi^4 \eta^4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{b}{h}\right)^4,$$

$$d_2 = -\frac{A_6}{A_4} \frac{l_1^4}{\pi^4 \eta^4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{b}{h}\right)^3,$$

$$d_3 = \frac{l_1^2}{A_4 \pi^2 \eta^2} \left\{ A_3 \left[ \left(\frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right] - A_4 \frac{l_1^2}{\pi^2 \eta^2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \left(\frac{b}{h}\right)^2,$$

$$d_4 = \frac{l_1^2}{A_4 \pi^2 \eta^2} \left\{ \frac{A_7}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right] - A_5 \frac{l_1^2}{\pi^2 \eta^2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \left(\frac{b}{h}\right),$$

$$d_5 = \frac{1}{\eta^2} \left[ \left(-1 + \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right) - \left(-1 + \frac{2}{\pi}\right) \right].$$

Решая уравнение (23), можно определить частоты собственных колебаний железнодорожного пути, что, в свою очередь, позволит определить динамическое нормальное перемещение точек как верхнего строения пути [19, 20], так и плиты безбалластного основания по формуле (10).

### 3.

Традиционные способы расчёта параметров поведения железнодорожного пути как из-за движения транспортных средств, так и по причине собственных колебаний не позволяют в полной мере учесть анизотропные свойства конструкции пути, особенно безбалластного, в прямых и кривых участках [7, 15, 21].

Нами исследованы полученные данные и построены графические зависимости динамического прогиба, который моделируется трансверсально-изотропной пластинкой, от времени для различных соотношений модулей упругости и модулей сдвига



[13, 22]. Параметры динамического воздействия транспортного средства на путь принимают следующие значения:  $m = 25$  т,  $h = 500$  мм,  $V_0 = 20$  м/с,  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>.

Используя соотношения (10) для динамического прогиба, записанного в безразмерном виде, получаем графики зависимостей динамических характеристик от времени [12, 23].

На рис. 3 приведены зависимости динамического прогиба верхнего пути от времени для различных значений соотношения  $E_o/E_r$  (отношение приведённых модулей упругости в направлении шпалы и рельса соответственно), которые указаны цифрами у кривых. Рассматривается влияние анизотропных свойств плиты безбалластного основания на характеристики динамического воздействия: при уменьшении соотношения  $E_o/E_r$  происходит увеличение прогиба-просадки до некоторого значения при  $E_o/E_r < 1$ ; при увеличении  $E_o/E_r$  происходит уменьшение прогиба, поскольку последний член отрезка ряда, полученного из (10), уменьшается при росте соотношения  $E_o/E_r > 1$ .

На рис. 4 обозначены осадки безбалластного пути исходя из предположения, что он обладает трансверсально-изотропными свойствами для различных модулей сдвига в направлении, перпендикулярном плоскости насыпи ( $G_{rz}$ ), для различных соотношений модуля сдвига в направлении, перпендикулярном нитке рельсов, и модуля деформации в направлении нитки. Значения  $G_{rz}/E_r$  показаны цифрами у кривых, при  $G_{rz}/E_r = 0,54$  балластная призма обладает изотропными свойствами. Из рис. 4 видно, что увеличение значения соотношения модулей  $G_{rz}/E_r$  приводит к уменьшению прогиба-осадки.

Пунктиром на рис. 3 и рис. 4 показана осадка, определённая экспериментально на подходе к мосту через реку Горючка (чётный путь), мосту, расположенному на участке Саратов–Колоцкий 56 км ПК6. Путём сравнения с кривыми, полученными теоретически по предложенной модели, можно оценить приведённые жёсткости (модули упругости и сдвига) рассматриваемого пути на подходе к мосту. В итоге наблюдается хорошее совпадение результатов эксперимента и аналитического

расчёта по наибольшей величине прогиба и по длительности деформирования пути, только вначале экспериментальная зависимость ведёт себя более линейно, чем теоретическая.

На рис. 5 приведены зависимости максимального прогиба от соотношения  $E/E$  для различных значений приведённого модуля деформации верхнего строения пути  $\tilde{E}$ : кривая 1 соответствует  $\tilde{E} = 3,6 \cdot 10^{-6}$ , кривая 2 —  $\tilde{E} = 2,5 \cdot 10^{-6}$ , кривая 3 —  $\tilde{E} = 1,4 \cdot 10^{-6}$ . Из рис. 5 следует, что максимальный прогиб уменьшается с увеличением соотношения  $E_o/E_r$  и увеличивается с увеличением линейной жёсткости контакта колесо–рельс  $\tilde{E}$ . Столь же ясно, что при увеличении отношения  $E_o/E_r$  динамический прогиб уменьшается для всех рассмотренных соотношений контактной жёсткости колесо–рельс.

Одновременно были определены перемещения основания плиты безбалластного пути в зоне её соприкосновения с грунтом насыпи.

На рис. 6а показано, что при снижении модулей упругости  $E_r$  и  $E_o$  максимальное значение динамического прогиба увеличивается, а  $E_r$  оказывает наибольшее влияние на прогиб. При снижении значений модулей сдвига прогиб возрастает, при этом, как фиксирует график рис. 6б,  $G_{oz}$  более остальных параметров оказывает влияние на динамический прогиб мишени.

При снижении  $G_{rz}, G_{oz}$  наибольший прогиб и время, в течение которого прогиб приравнивается к нулю, возрастают пропорционально, а при снижении  $G_{ro}$  время, относящееся к нулевому прогибу, возрастает интенсивнее, т.е. восстановление земляного полотна будет проходить медленнее.

Сравнивая графические зависимости для динамической осадки, можно подобрать механические характеристики насыпи с анизотропными свойствами (перебором различных конструкций для переходных участков переменной жёсткости) таким образом, чтобы добиться уменьшения осадки до уровня, необходимого для движения состава с заданной скоростью, а также максимальной силы, при которой не будет наблюдаться дефектов полотна.

## ВЫВОДЫ

Анализируя и сравнивая полученные теоретические зависимости для различных величин механических параметров земляного полотна с расчётными данными, нетрудно обнаружить, что изменением механических параметров грунта можно как повысить, так и понизить деформацию железнодорожного пути. Высокое соответствие данных математического моделирования и экспериментальных исследований даёт возможность рекомендовать предлагаемую методику в качестве средства решения задач, обеспечивающих стабильность поведения железнодорожного пути при эксплуатации существующих линий и при проектировании высокоскоростных магистралей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Инструкция по применению конструктивно-технологических решений переходных участков на подходах к искусственным сооружениям для участков скоростного совмещённого движения. Утверждена распоряжением ОАО «РЖД» от 20.12.2013 г. № 2754р.
2. Coelho, B., Priest, J., Hölscher, P., Powrie, W. Monitoring of transition zones in railways, 10<sup>th</sup> International Conference and Exhibition on railway engineering, London, 24–25 June, 2009.
3. Коншин Г. Г. Работа земляного полотна под поездами. – М.: УМЦ по образованию на ж. д. транспорте, 2012. – 208 с.
4. Локтев А. А., Виноградов В. В., Бучкин В. А. Модели взаимодействия колеса и рельса при высоких скоростях движения // Мир транспорта. – 2016. – № 1. – С. 54–60.
5. Loktev A., Sychev V., Gridasova E. and Stepanov R. Mathematical Modeling of Railway Track Structure under Changing Rigidity Parameters // Nonlinearity. Problems, Solutions and Applications. V.1. Theoretical and Applied Mathematics. – 2017. – Pp. 291–307.
6. Киселёв Ф. Б., Мансуров А. Р., Рамазанов М. И. Моделирование динамического воздействия подвижного состава на основание железнодорожной насыпи с цилиндрической полостью // Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство. – 2016. – № 10. – С. 37–45.
7. Абдурашитов А. Ю., Сычёв В. П., Абдурашитов Ю. А. Выбор моделей напряжённо-деформированного состояния железнодорожных рельсов при различных вариантах их закаливании // Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство. – 2016. – № 10. – С. 64–79.
8. Локтев А. А. Ударное взаимодействие твёрдого тела и упругой ортотропной пластинки // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – № 4. – С. 478–492.
9. Loktev A. A., Sychev V. P. Vinogradov V. V., Buchkin V. A. Modelling of the Dynamic Contact between a Wheel of a Moving Railway Vehicle and Rails with

Evaluation of Defects Emerging upon Their Interaction. Part 1. The Defects of the Rail and Models of Contact // Applied Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 11. – No. 10. – Pp. 473–480.

10. Сычёв В. П., Новожилов Т. В. Исследование влияния на работу железнодорожного пути демпфирующих подкладок под рельсы и шпалы // Наука и техника транспорта. – 2016. – № 1. – С. 63–68.

11. Залетдинов А. В., Локтев А. А., Сычева А. В., Запольнова Е. В. Выбор мест усиления земляного полотна // Путь и путевое хозяйство. – 2015. – № 3. – С. 15–18.

12. Agostinacchio M., Ciampa D., Diomedì M., Olita S. Parametrical analysis of the railways dynamic response at high speed moving loads. Journal of Modern Transportation. – 2013. – Vol. 21. – No. 3. – Pp. 169–181.

13. Phillips J. W., Calvit H. H. Impact of a rigid sphere on a viscoelastic plate // Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics. – 1967. – Vol. 34. – No. 4. – Pp. 873–878.

14. Старишкин В. В., Фазилова З. Т. Участки переходной жёсткости в зоне примыкания к мостам с балластной и безбалластной конструкцией пути // Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство. – 2017. – № 11. – С. 16–20.

15. Chen P., Xiong J., Shen Z. Thickness effect on the contact behavior of a composite laminate indented by a rigid sphere. Mechanics of Materials. – 2008. – Vol. 40. – Pp. 183–194.

16. Сычева А. В., Сычев В. П., Бучкин В. А., Быков Ю. А. Моделирование работы железнодорожного пути как системы квазиупругих ортотропных слоёв // Вестник МГСУ. – 2016. – № 3. – С. 37–46.

17. Malekzadeh K., Khalili M. R., Mittal R. K. Response of composite sandwich panels with transversely flexible core to low-velocity transverse impact: A new dynamic model. Int. J. of Impact Engineering. – 2007. – Vol. 34. – P. 522–543.

18. Локтев А. А. Удар вязкоупругого тела по упругой изотропной пластинке // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – № 3. – С. 417–425.

19. Вершинин В. В., Локтев А. А. Моделирование систем противоударной изоляции с вязкоупругими элементами // Вестник МГТУ им. Баумана. Серия Естественные науки. – 2012. – № 2. – С. 52–67.

20. Локтев А. А. Упругопластическая модель взаимодействия цилиндрического ударника и пластинки // Письма в Журнал технической физики. – 2007. – № 16. – С. 72–77.

21. Локтев А. А., Бахтин В. Ф., Черников И. Ю., Локтев Д. А. Методика определения внешних дефектов сооружения путём анализа серии его изображений в системе мониторинга // Вестник МГСУ. – 2015. – № 3. – С. 7–16.

22. Алфимцев А. Н., Локтев Д. А., Локтев А. А. Сравнение методологий разработки систем интеллектуального взаимодействия // Вестник МГСУ. – 2013. – № 5. – С. 200–208.

23. Локтев А. А., Сычева А. В., Талашкин Г. Н., Степанов К. Д. Разработка математической модели железнодорожного пути переменной жёсткости // Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство. – 2016. – № 9. – С. 26–38.

Координаты авторов: **Виноградов В. В.** – +7(495) 684–21–10, **Локтев А. А.** – aaloktev@yandex.ru, **Фазилова З. Т.** – fazil\_1905@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 22.03.2018, принята к публикации 19.05.2018.





# MATHEMATICAL MODELING OF SECTIONS OF VARIABLE RIGIDITY IN FRONT OF ARTIFICIAL STRUCTURES

**Vinogradov, Valentin V.**, Russian University of Transport, Moscow, Russia.  
**Loktev, Alexey A.**, Russian University of Transport, Moscow, Russia.  
**Fazilova, Zulfija T.**, Russian University of Transport, Moscow, Russia.

## ABSTRACT

The article deals with the features of the transition zone from the ballast under-sleeper base to the bridge structure with various types of span structures, as well as the sections of the ballastless track, conjugated with the transient zone. An analytical model is proposed for

describing the dynamic behavior of a railway track in the form of a transversely isotropic plate with variable rigidity parameters. Examples of the use of the proposed model for calculating the dynamic depression of a roadbed under the influence of a rolling stock with different freight and speed characteristics are given.

**Keywords:** railway, bridge, roadbed, residual deformation, variable rigidity section, track depression, slope, elastic wave, track profile, transversal-isotropic plate.

**Background.** When reconstructing railway sections for organization of high-speed train traffic, all problem areas that can become sources of large track disturbances and possible speed limits restrictions must be upgraded.

One of these objects is the railway track on the roadbed in the zone adjacent to the bridge. The track on the bridge itself is quite stable and does not have large drawdowns, while track on the roadbed might be subject to depression in the approach zone. In order to reduce the potential danger, it is necessary to strengthen the track in this zone. To smoothly interface problem areas at the approaches and on the bridges with ballast and ballastless design of the roadbed, transitional sections with variable rigidity are arranged so that the vertical rigidity on the bridge and the approach embankment does not differ much from each other.

**Objective.** The objective of the authors is to consider mathematical modeling of sections of variable rigidity in front of artificial structures.

**Methods.** The authors use general scientific and engineering methods, comparative analysis, graph construction, evaluation approach, mathematical calculations.

### Results.

#### 1.

The length of the transition section of the railway track with variable rigidity at the approach to the bridge is determined for each object by the length of the railway track disturbance zone. The data of the track measuring car or the results of the load train tests help in this.

Table 1 shows the minimum length of the section with variable rigidity at the approach to the bridge, depending on the train speed [1].

In studies conducted by Holland Railconsult [2], the length of the transition zone effect can be determined using the so-called «one second» rule. In this case, for example, at a train speed of 200 km/h, the length of the zone will be 55 m.

When the rolling stock passes through the part of the bend that has arisen during the track depression, an additional dynamic effect on the wheel set occurs, the value of which depends on the size of the difference (angle) in the transition zone (Pic. 1). Increased vibrodynamics load leads to increased wear of the elements of the track upper structure and the appearance of defects in the upper layers of the roadbed.

The intensity of the effect of the vibrodynamics load on the rolling stock can be calculated from the formula:

$$\rho_0 = \frac{1,3 P_n}{l_{rb} b_0}, \quad (1)$$

where  $P$  is axial load of the calculated mobile unit, kN;  
 $n$  – number of axles in the bogie;

$l_{rb}$  – length of the rigid base of the bogie, m;

$b_0$  – length of sleepers, m (for reinforced concrete sleepers – 2,7 m, for wooden sleepers – 2,75 m).

There are many methods and computational algorithms to solve the problems of calculating the structures, their elements and entire structures for different types of applied load, but the most relevant are the techniques that allow to take into account not only the dynamics of the application of the load, but also the dynamics of the changes in deformation and strength characteristics of the structures of track and base [3].

Having the data of field observations, it is possible to construct a mathematical model of a section of variable rigidity using numerical methods in a software environment with the help of a computer and obtain a package of functional requirements and standards for transient structures.

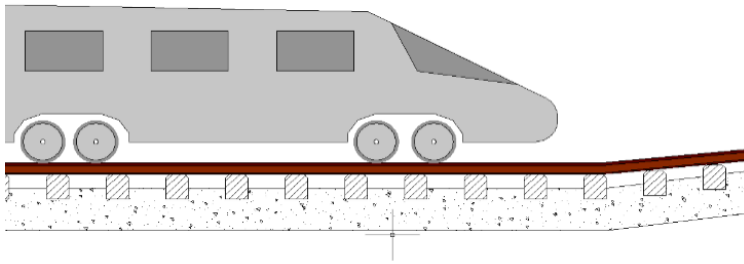
In most modern computer systems (PC Lira, Mirage, SCAD, Ansys, Abaqus, Nastran, Lusas, etc.), the advantage is given to the methods of finite and boundary elements [4–6].

The finite element method replaces the problem of finding a function for the problem of finding the final number of its most accurate values at different nodal points. The primary problem with respect to a function is constructed from a functional equation, the problem of the finite element method with respect to its values at nodes implies a violation of the system of algebraic equations. While reducing the maximum size of the constituent elements, the number of nodes and the required nodal parameters are added. At the same time, the chance to approach the conditions of the problem more accurately and to approach the desired result closely increases.

**Table 1**

### Minimum length of a section of variable rigidity

No.	Minimum length of a section, m	Maximum speed of train movement, km/h
1	15	less than 80
2	20	80–120
3	25	more than 120



**Pic. 1. The section of conjugation of structures of different rigidity.**

**2.**

In our version, it is proposed to represent a railway track as an elastic orthotropic plate [3, 4, 7] whose dynamic behavior is described by equations of the Ufland–Mindlin–Reissner type, taking into account the inertia of rotation of the cross sections and the deformation of the transverse shear [8, 9]. Since the motion of a vehicle in a straight section is actually an axisymmetric problem, then the equations, describing it, can be represented in a general form when the wave characteristics do not depend on the angle  $\theta$  [10]:

$$D_r \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - D_\theta \frac{\varphi}{r^2} + hKG_{rz} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) = -\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

(2)

$$KG_{rz} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + KG_{rz} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$C_r \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - C_\theta \frac{u}{r^2} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$C_k \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$D_k \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \right) - KhG_{\theta z} \psi = -\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (6)$$

where

$$D_r = \frac{h^3}{12} B_r, \quad D_\theta = \frac{h^3}{12} B_\theta, \quad D_k = \frac{h^3}{12} B_k,$$

$$C_r = hB_r, \quad C_\theta = hB_\theta, \quad C_k = hB_k,$$

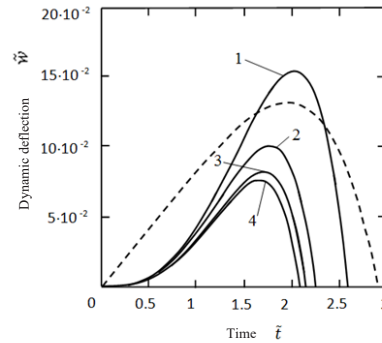
$$D_{r\theta} = D_r \sigma_\theta + 2D_k,$$

$$B_r = \frac{E_r}{1 - \sigma_r \sigma_\theta}, \quad B_\theta = \frac{E_\theta}{1 - \sigma_r \sigma_\theta}, \quad B_k = G_{r\theta},$$

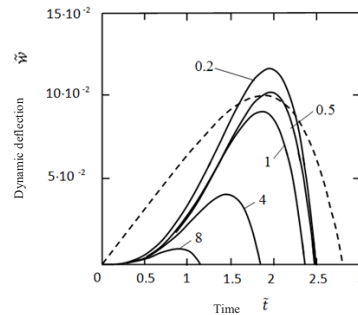
$$E_r \sigma_r = E_\theta \sigma_\theta, \quad K = \frac{5}{6}; \quad D_r, D_\theta \text{ and } C_r, C_\theta - \text{respectively,}$$

rigidity of deflection and tension-compression for directions  $r, \theta$ ;  $D_k$  – torsional rigidity;  $C_k$  – shear rigidity;  $E_r, E_\theta$  and  $\sigma_r, \sigma_\theta$  – elastic modulus and Poisson’s ratio for directions  $r, \theta$ ;  $G_{rz}, G_{\theta z}$  – shear modulus in the planes  $rz$  and  $\theta z$  respectively;  $w(r, \theta)$  – normal displacement of the median plane;  $u(r, \theta)$  and  $v(r, \theta)$  – tangential displacements of the median surface, respectively, with respect to the coordinates  $r, \theta$ ;  $\varphi(r, \theta)$  and  $\psi(r, \theta)$  – arbitrary sought functions of the coordinates  $r, \theta$ .

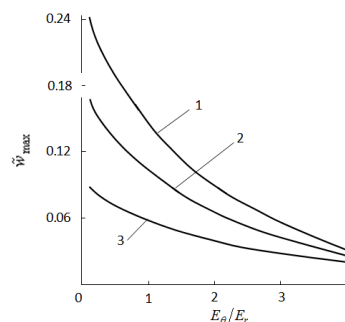
If we consider the deformation of the ballastless track, then the proposed model can be simplified by assuming that the base plate can be represented by a transversally isotropic plate lying on the deformable base, two edges of which are rigidly fixed (along the track, in the direction of the rails), and the other two



**Pic. 3. Dependence of the dynamic deflection on time for different values of the ratio  $E_\theta/E_r$ .**

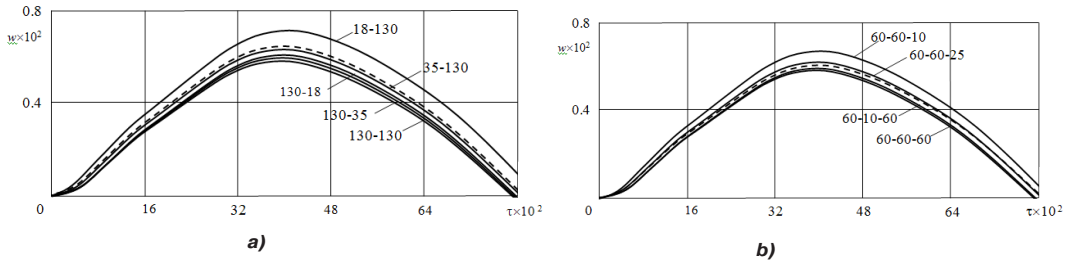


**Pic. 4. Dependence of the dynamic deflection on time for different values of the ratio  $G_{rz}/E_r$ .**



**Pic. 5. Dependence of the maximum deflection on the relation  $E_\theta/E_r$  for different values of  $\tilde{E}$ .**





**Fig. 6. Dependence of the dynamic deflection at the point of impact on time for different values in the anisotropy directions: a) moduli of deformation, b) shear moduli.**

are hinged (across the track, in the direction of sleepers) [11–13]. In this case, the plate in the non-deformable state occupies the area

$$\{0 \leq x \leq l_1; 0 \leq y \leq l_2; -h \leq z \leq h\}.$$

To complete the simulation of dynamic behavior and calculation of the first and second group of limiting states of a reinforced concrete slab, the initial problem is to be presented as a set of simpler ones, and the first problem in this series is to determine the natural vibrations of the plate. The equation describing the proper transverse vibrations of the plate can be obtained from the relations (2)–(6) and written in the form [15]:

$$A_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + A_2 \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} - A_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta W + A_4 \Delta^2 W + P(W) = 0, \quad (7)$$

where  $W$  – transverse displacement of the points of the medium plane of the plate,  $\Delta$  – Laplace operator.

$$A_1 = \rho_1; A_2 = \rho_1^2 \left( \frac{A_{33}^{-1} + 3A_{44}^{-1}}{b} \right) \frac{h^2}{b};$$

$$A_3 = \left\{ -\rho_1 \left[ \frac{2 - 2A_{11}A_{33}^{-1} - 3(A_{13}^2 - A_{11}A_{33})A_{33}^{-1}A_{44}^{-1}}{b} \right] \right\} \frac{h^2}{b};$$

$$A_4 = 2A_{33}^{-1} (A_{11}A_{33} - A_{13}^2) \frac{h^2}{b}; A_5 = \frac{S}{2h} \rho_1;$$

$$A_6 = \frac{S}{2h} \rho_1 \frac{h^2}{2} (\rho_1 A_{44}^{-1} + 3A_{33}^{-1}); A_7 =$$

$$= -4 \frac{S}{2h} \rho_1 A_{11} A_{33}^{-1}. \quad (8)$$

In those ratios, the value

$$P(W) = A_5 \frac{\partial W}{\partial t} + A_6 \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + A_7 \Delta \frac{\partial W}{\partial t} -$$

determines the reaction of the base,  $\rho_1$  is density,  $b$  – speed of the transverse wave;  $A_{11} = A_{13} = \dots = A_{nm}$  – anisotropy coefficients of the plate material.

The boundary conditions for the plate deformation problem due to transverse oscillations in this formulation can be represented in the form [16, 17]:

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0; x = 0, l_1; \quad (9)$$

$$W = \frac{\partial W}{\partial y} = 0; y = 0, l_2.$$

The solution of the homogeneous equation (7) is proposed to be sought in the following form:

$$W(x, y, t) = W(x, y) \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right), \quad (10)$$

where  $\xi$  – natural oscillation frequency of the plate.

After substituting (10) into (7), we obtain:

$$A_1 W(x, y) \left( \frac{b\xi}{h} \right)^2 \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) +$$

$$+ A_2 W(x, y) \left( \frac{b\xi}{h} \right)^4 \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) -$$

$$- A_3 \Delta W(x, y) \left( \frac{b\xi}{h} \right)^2 \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) +$$

$$+ A_4 \Delta^2 W(x, y) \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) +$$

$$+ A_5 W(x, y) \left( \frac{b\xi}{h} \right) \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) +$$

$$+ A_6 W(x, y) \left( \frac{b\xi}{h} \right)^3 \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) + \quad (11)$$

$$+ A_7 \Delta W(x, y) \left( \frac{b\xi}{h} \right) \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) = 0.$$

For the convenience of working with the mathematical model of a plate, it is expedient to use dimensionless quantities  $x = \frac{l_1}{\pi} \alpha$ ;  $y = \frac{l_2}{\pi} \beta$ , by means

of which the defining equation (11) can be represented in the following form:

$$V(\alpha, \beta) \left( \left( \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{l_1^2}{l_2^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{l_1^4}{l_2^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right) + \right.$$

$$\left. + B_1 \left( \frac{l_1^2}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{l_1^4}{\pi^2 l_2^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \right.$$

$$\left. + B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4} \right) = 0. \quad (12)$$

Here we use the notation:

$$B_1 = \frac{1}{A_4} \left( -A_3 \left( \frac{b\xi}{h} \right)^2 + A_7 \left( \frac{b\xi}{h} \right) \right);$$

$$B_2 = \frac{1}{A_4} \left( A_1 \left( \frac{b\xi}{h} \right)^2 + A_2 \left( \frac{b\xi}{h} \right)^4 + A_5 \left( \frac{b\xi}{h} \right) + A_6 \left( \frac{b\xi}{h} \right)^3 \right).$$

To solve the equation (12) it is proposed to use the decomposition method [18], it allows us to consider separately three auxiliary problems, combining the results obtained.

$$1. \frac{\partial^4 V_1}{\partial \alpha^4} = f_1(\alpha, \beta) \quad V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} = 0 \quad \alpha = 0, \pi.$$

$$2. \eta^4 \frac{\partial^4 V_2}{\partial \beta^4} = f_2(\alpha, \beta) \quad V_2 = \frac{\partial V_2}{\partial \beta} = 0 \quad \beta = 0, \pi. \quad (13)$$

$$3. \left[ \begin{array}{l} 2\eta^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \\ + B_1 \frac{l_1^2}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \\ + B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4} \end{array} \right] V_3 + f_1 + f_2 = 0.$$

Here  $\eta = l_1/l_2$ ,  $f_i(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m}^{(i)} \sin(n\alpha) \sin(m\beta)$  –

arbitrary functions in the general form;  $a_{n,m}^{(i)}$  – arbitrary constants,  $i = 1, 2$ .

In determining the dynamic characteristics of the track behavior, taking into account the natural oscillations for its given points, it can be assumed that the following relations will be approximately satisfied:

$$V_1 \equiv V_2; \quad V_3 = \frac{1}{2}(V_1 + V_2). \quad (14)$$

The general solution of the auxiliary problems (13) is proposed to be sought within the variants:

$$V_1(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^4} \sin(n\alpha) \sin(m\beta) + \frac{\alpha^3}{6} \psi_1(\beta) + \frac{\alpha^2}{2} \psi_2(\beta) + \alpha \psi_3(\beta) + \psi_4(\beta);$$

$$V_2(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^4} \sin(n\alpha) \sin(m\beta) + \frac{\beta^3}{6} \phi_1(\alpha) + \frac{\beta^2}{2} \phi_2(\alpha) + \beta \phi_3(\alpha) + \phi_4(\alpha). \quad (15)$$

where  $\psi_i(\beta)$  and  $\phi_i(\alpha)$  – some arbitrary functions, for which it is necessary to take into account the boundary conditions (9) and defragmentation of the general problem (13).

Determining  $\psi_i(\beta)$  and  $\phi_i(\alpha)$ , we get:

for  $\underline{\alpha} = 0$

$$V_1(\alpha, \beta) = \psi_4(\beta) = 0, \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha^2} = \psi_2(\beta) = 0; \quad (16)$$

for  $\underline{\alpha} = \pi$

$$\psi_1(\beta) = 0, \quad \psi_3(\beta) = 0,$$

$$V_1(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^4} \sin(n\alpha) \sin(m\beta); \quad (17)$$

for  $\underline{\beta} = 0$

$$V_2(\alpha, \beta) = \phi_4(\alpha) = 0, \quad \phi_3(\alpha) = - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^3} \sin(n\alpha); \quad (18)$$

for  $\underline{\beta} = \pi$

$$\phi_1(\alpha) = - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^3} \sin(n\alpha) \left( (-1)^m + 1 \right),$$

$$\phi_2(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^3} \sin(n\alpha) \left( (-1)^m + 2 \right). \quad (19)$$

$$V_2(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^3} \sin(n\alpha) \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{m} \sin(m\beta) - \\ - \frac{\beta^3}{\pi^2} \left( (-1)^m + 1 \right) + \\ + \frac{\beta^2}{\pi} \left( (-1)^m + 2 \right) - \beta \end{array} \right].$$

As a result, from (13) we have the following system of equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 - V_2 = 0, \quad V_3 = \frac{1}{2}(V_2 + V_1), \\ \left[ \begin{array}{l} 2\eta^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \\ + B_1 \frac{l_1^2}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \\ + B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4} \end{array} \right] V_3 + f_1 + f_2 = 0. \end{array} \right. \quad (20)$$

For  $n, m = 1$  from (20) we fix the ratios:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)} \sin(\alpha) \sin(\beta) - \frac{a_{11}^{(2)}}{\eta^4} \sin(\alpha) \left( \sin(\beta) + \frac{\beta^2}{\pi} - \beta \right) = 0, \\ \left[ \begin{array}{l} 2\eta^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_1 \frac{l_1^2}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4} \end{array} \right] \frac{1}{2} \cdot \\ \cdot \left( a_{11}^{(1)} \sin(\alpha) \sin(\beta) + \frac{a_{11}^{(2)}}{\eta^4} \sin(\alpha) \left( \sin(\beta) + \frac{\beta^2}{\pi} - \beta \right) \right) + \\ + a_{11}^{(1)} \sin(\alpha) \sin(\beta) + a_{11}^{(2)} \sin(\alpha) \sin(\beta) = 0. \end{array} \right.$$

Assuming  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$  in the previous relations, we

obtain a system of equations that has a nonzero solution only if its principal determinant is equal to zero:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 \frac{l_1^2}{\pi^2 \eta^2} \left[ \left( \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \left( \frac{2}{\pi} - 1 \right) \right] - \\ - B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4 \eta^4} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\eta^4} \left( 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) - 1 = 0. \end{array} \right. \quad (21)$$

If we substitute expressions for  $B_1$  and  $B_2$  in (21), we obtain:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{A_4} \left( -A_3 \left( \frac{\xi b}{h} \right)^2 + A_7 \left( \frac{\xi b}{h} \right) \right) \frac{l_1^2}{\pi^2 \eta^2} \cdot \\ \cdot \left[ \left( \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \left( \frac{2}{\pi} - 1 \right) \right] - \\ - \frac{1}{A_4} \left( A_2 \left( \frac{\xi b}{h} \right)^4 + A_6 \left( \frac{\xi b}{h} \right)^3 + \right) \frac{l_1^4}{\pi^4 \eta^4} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \\ - \frac{1}{\eta^4} \left( 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) - 1 = 0. \end{array} \right. \quad (22)$$

Equation (22) can be represented in the form of an algebraic equation of the fourth order, the unknown in which is the frequency of natural oscillations of the ballastless track

$$d_1 \xi^4 + d_2 \xi^3 + d_3 \xi^2 + d_4 \xi + d_5 = 0. \quad (23)$$

Here we have adopted the following notation for the coefficients of unknowns:



$$d_1 = -\frac{A_2}{A_4} \frac{l_1^4}{\pi^4 \eta^4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{b}{h}\right)^4,$$

$$d_2 = -\frac{A_6}{A_4} \frac{l_1^4}{\pi^4 \eta^4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{b}{h}\right)^3,$$

$$d_3 = \frac{l_1^2}{A_4 \pi^2 \eta^2} \left\{ A_3 \left[ \left(\frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right] - A_1 \frac{l_1^2}{\pi^2 \eta^2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \left(\frac{b}{h}\right)^2,$$

$$d_4 = \frac{l_1^2}{A_4 \pi^2 \eta^2} \left\{ \frac{A_7}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right] - A_5 \frac{l_1^2}{\pi^2 \eta^2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \left(\frac{b}{h}\right),$$

$$d_5 = \frac{1}{\eta^2} \left[ \left(-1 + \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right) - 1 + \frac{2}{\pi} \right] - 1.$$

Solving the equation (23), we can determine the frequencies of natural oscillations of the railway track, which in turn will allow us to determine the dynamic normal displacement of points of the track upper structure [19, 20] and of the plate of the ballastless base according to the formula (10).

### 3.

The traditional ways of calculating the parameters of the behavior of the railway track both because of the movement of vehicles and due to natural oscillations do not allow to fully take into account the anisotropic properties of the track design, especially a ballastless one, in straight and curved sections [7, 15, 21].

We have studied the data obtained and built the graph dependences of dynamic deflections, which is modeled by a transversally isotropic plate, on time for different ratios of elastic moduli and shear moduli [13, 22]. The parameters of the dynamic impact of the vehicle on the track take the following values:  $m = 25 \text{ t}$ ,  $h = 500 \text{ mm}$ ,  $V_0 = 20 \text{ m/s}$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ .

Using relations (10) for the dynamic deflection recorded in a dimensionless form, we obtain graphs of the dependences of the dynamic characteristics on time [12, 23].

Pic. 3 shows the dependence of the dynamic deflection of the track upper structure on time for different values of the ratio  $E_0/E_r$  (the ratio of the reduced elastic moduli in the direction of the sleeper and the rail, respectively), which are indicated as the numbers in the curves. The influence of the anisotropic properties of the plate of the ballastless base on the characteristics of the dynamic effect is considered: with decreasing ratio  $E_0/E_r$ , the deflection-sediment increases to a certain value at  $E_0/E_r < 1$ ; with increasing  $E_0/E_r$ , the deflection decreases, since the last term of the segment of the series obtained from (10) decreases with increasing ratio  $E_0/E_r > 1$ .

Pic. 4 shows depressions of the ballastless track, assuming that it has transversely isotropic properties for various shear moduli in the direction perpendicular to the plane of the embankment ( $G_{rz}$ ), for different ratios of the shear modulus in the direction perpendicular to the rails, and the strain modulus in the direction of the thread. The values  $G_{rz}/E_r$  are shown in digits at the curves, at  $G_{rz}/E_r = 0,54$  the ballast prism

has isotropic properties. From Pic. 4 it follows that the increase in the value of the modulus ratio  $G_{rz}/E_r$  leads to a decrease in deflection-sediment.

The dashed line in Pic. 3 and Pic. 4 shows the depressions determined experimentally on the approach to the bridge over the Goryuchka River (even track), the bridge located on the section Saratov–Kolotsky at 56 km. By comparison with the curves obtained theoretically based on the proposed model, it is possible to estimate the resulted rigidity (modulus of elasticity and shear) of the track under consideration at the approach to the bridge. As a result, there is a good consistency between the results of the experiment and the analytical calculation of the largest deflection value and the duration of the deformation at the track, only at the beginning the experimental dependence behaves more linearly than the theoretical dependence.

Pic. 5 shows the dependence of the maximum deflection on the ratio  $E_0/E_r$  for different values of the reduced strain modulus of the track upper structure  $\tilde{E}$ : curve 1 corresponds to  $\tilde{E} = 3,6 \cdot 10^{-6}$ , curve 2 –  $\tilde{E} = 2,5 \cdot 10^{-6}$ , curve 3 –  $\tilde{E} = 1,4 \cdot 10^{-6}$ . From Pic. 5 it follows that the maximum deflection decreases with increasing ratio  $E_0/E_r$  and increases with increasing linear rigidity of the wheel–rail contact  $\tilde{E}$ . It is equally clear that as the ratio  $E_0/E_r$  increases, the dynamic deflection decreases for all considered wheel–rail contact rigidity ratios.

Simultaneously, the movements of the base of the plate of the ballastless track in the zone of its contact with the ground of the embankment were determined.

In Pic. 6a it is shown that when the moduli of elasticity  $E_r$  and  $E_0$  decrease and the maximum value of the dynamic deflection increases, and  $E_r$  has the greatest effect on deflection. When the values of shear moduli decrease, the deflection increases, while the graph of Pic. 6b shows that  $G_{0z}$  affects the dynamic deflection of the target more than other parameters.

When decreasing  $G_{rz}, G_{0z}$ , the greatest deflection and time during which the deflection is equated to zero increase proportionately, and when decreasing  $G_{r0}$ , the time related to the zero deflection increases more intensively; i. e. restoration of the roadbed will be slower.

Comparing the graphical dependencies for the dynamic depression, it is possible to select the mechanical characteristics of the embankment with anisotropic properties (search for different structures for the transitional sections of variable rigidity) in such a way as to reduce the depression to the level necessary for train movement at a given speed, and the maximum force at which there will be no defects in the roadbed.

**Conclusions.** Analyzing and comparing the theoretical dependences obtained for different values of the mechanical parameters of the roadbed with the calculated data, it is easy to find that by changing the mechanical parameters of the soil, it is possible both to increase and reduce the deformation of the railway track. High compliance of the data of mathematical modeling with the results

of experimental research makes it possible to recommend the proposed method as a tool of solving problems that ensure the stability of the behavior of the railway track when operating existing lines and when designing high-speed lines.

## REFERENCES

1. Instruction on the use of structural and technological solutions of transition areas at approaches to artificial structures for high-speed combined traffic areas. Approved by the order of JSC Russian Railways of December 20, 2013, No. 2754r [*Instruktsiya po primeneniyu konstruktivno-technologicheskikh reshenii perehodnykh uchastkov na podhodakh k iskustvennyim sooruzheniyam dlya uchastkov skorostnogo sovmeshchennogo dvizheniya. Utverzhdena rasporyazheniem OAO «RZD» of 20.12.2013 No. 2754r*].
2. Coelho, B., Priest, J., Hölscher, P., Powrie, W. Monitoring of transition zones in railways, 10<sup>th</sup> International Conference and Exhibition on railway engineering, London, 24–25 June, 2009.
3. Konshin, G. G. Operation of the road bed under the trains [*Rabota zemlyanogo polotna pod poezdami*]. Moscow, TMC for education on railway transport, 2012, 208 p.
4. Loktev, A. A., Vinogradov, V. V., Buchkin, V. A. Models of interaction of wheel and rail at high speed. *World of Transport and Transportation*, Vol. 14, 2016, Iss. 1, pp. 54–60.
5. Loktev, A., Sychev, V., Gridasova, E., Stepanov R. Mathematical Modeling of Railway Track Structure under Changing Rigidity Parameters. Nonlinearity. Problems, Solutions and Applications. Vol. 1. Theoretical and Applied Mathematics, 2017, pp. 291–307
6. Kiselev, F. B., Mansurov, A. R., Ramazanov, M. I. Modeling of the dynamic effect of a rolling stock on the base of a railway embankment with a cylindrical cavity [*Modelirovanie dinamicheskogo vozdeistviya podvizhnogo sostava na osnovanie zheleznodorozhnoi nasypyi tsilindricheskoi polost'yu*]. *Vnedrenie sovremennykh konstruktivnykh i peredovykh tehnologiy v putevoe hozyaistvo*, 2016, Iss. 10, pp. 37–45.
7. Abdurashitov, A. Yu., Sychev, V. P., Abdurashitov, Yu. A. Choice of models of the stressed-deformed state of railway rails under different variants of their hardening [*Vybor modeli napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya zheleznodorozhnykh rel'sov pri razlichnykh variantakh ih zakalivaniya*]. *Vnedrenie sovremennykh konstruktivnykh i peredovykh tehnologiy v putevoe hozyaistvo*, 2016, Iss. 10, pp. 64–79.
8. Loktev, A. A. Shock interaction of a solid body and an elastic orthotropic plate [*Udamnoe vzaimodeistvie tverdogo tela i uprugoi ortotropnoi plastinki*]. *Mehanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivnykh*, 2005, Iss. 4, pp. 478–492.
9. Loktev, A. A., Sychev, V. P., Vinogradov, V. V., Buchkin, V. A. Modelling of the Dynamic Contact between a Wheel of a Moving Railway Vehicle and Rails with Evaluation of Defects Emerging upon Their Interaction. Part 1. The Defects of the Rail and Models of Contact. *Applied Mathematical Sciences*, 2017, Vol. 11, No. 10, pp. 473–480.
10. Sychev, V. P., Novozhilov, T. V. Research of influence of damping pads under rails and sleepers on the railway track [*Issledovanie vliyaniya na rabotu zheleznodorozhnoy puti dempfirovushchikh podkladok pod rel'sy i shpaly*]. *Nauka i tekhnika transporta*, 2016, Iss. 1, pp. 63–68.
11. Zaletdinov, A. V., Loktev, A. A., Sycheva, A. V., Zapolnova, E. V. Selection of sites for reinforcement of the roadbed [*Vybor mest usileniya zemlyanogo polotna*]. *Put' i putevoe hozyaistvo*, 2015, Iss. 3, pp. 15–18.
12. Agostinacchio, M., Ciampa, D., Diomed, M., Olita, S. Parametrical analysis of the railways dynamic response at high speed moving loads. *Journal of Modern Transportation*, 2013, Vol. 21, No. 3, pp. 169–181.
13. Phillips, J. W., Calvit, H. H. Impact of a rigid sphere on a viscoelastic plate. Transaction of the ASME, *Journal of Applied Mechanics*, 1967, Vol. 34, No. 4, pp. 873–878.
14. Starishkin, V. V., Fazilova, Z. T. Sites of transitional rigidity in the zone of conjunction to bridges with ballast and ballastless track design [*Uchastki perehodnoi zhestkosti v zone primykaniya k mostam s ballastnoi i bezballastnoi konstruktivnykh puti*]. *Vnedrenie sovremennykh konstruktivnykh i peredovykh tehnologiy v putevoe hozyaistvo*, 2017, Iss. 11, pp. 16–20.
15. Chen, P., Xiong, J., Shen, Z. Thickness effect on the contact behavior of a composite laminate indented by a rigid sphere. *Mechanics of Materials*, 2008, Vol. 40, pp. 183–194.
16. Sycheva, A. V., Sychev, V. P., Buchkin, V. A., Bykov, Yu. A. Modeling the work of a railway track as a system of quasielastic orthotropic layers [*Modelirovanie raboty zheleznodorozhnoy puti kak sistemy kvaziuprugih ortotropnykh sloev*]. *Vestnik MGSU*, 2016, Iss. 3, pp. 37–46.
17. Malekzadeh K., Khalili M. R., Mittal R. K. Response of composite sandwich panels with transversely flexible core to low-velocity transverse impact: A new dynamic model. *Int. J. of Impact Engineering*, 2007, Vol. 34, pp. 522–543.
18. Loktev, A. A., Impact of a viscoelastic body on an elastic isotropic plate [*Udar vyazkoupругogo tela po uprugoi izotropnoi plastinke*]. *Mehanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivnykh*, 2007, Iss. 3, pp. 417–425.
19. Vershinin, V. V., Loktev, A. A. Modeling of systems of shockproof insulation with viscoelastic elements [*Modelirovanie sistem protivoudarnoi izolyatsii s vyazkoupругimi elementami*]. *Vestnik of Bauman MSTU. Series of Natural Sciences*, 2012, Iss. 2, pp. 52–67.
20. Loktev, A. A. Elastic-plastic model of the interaction of a cylindrical impactor and a plate [*Uprugoplasticheskaya model' vzaimodeistviya tsilindricheskogo udarnika i plastinki*]. *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2007, Iss. 16, pp. 72–77.
21. Loktev, A. A., Bakhtin, V. F., Chernikov, I. Yu., Loktev, D. A. Methodology for determining external defects of a structure by analyzing a series of its images in a monitoring system [*Metodika opredeleniya vneshnih defektov sooruzheniya putem analiza sesrii ego izobrazhenii v sisteme monitoringa*]. *Vestnik MGSU*, 2015, Iss. 3, pp. 7–16.
22. Alfimtsev, A. N., Loktev, D. A., Loktev, A. A. Comparison of methodologies for development of intellectual interaction systems [*Sravnienie metodologii razrabotki sistem intellektual'nogo vzaimodeistviya*]. *Vestnik MGSU*, 2013, Iss. 5, pp. 200–208.
23. Loktev, A. A., Sycheva, A. V., Talashkin, G. N., Stepanov, K. D. Development of the mathematical model of a railway track of variable rigidity [*Razrabotka matematicheskoi modeli zheleznodorozhnoy puti peremennoi zhestkosti*]. *Vnedrenie sovremennykh konstruktivnykh i peredovykh tehnologiy v putevoe hozyaistvo*, 2016, Iss. 9, pp. 26–38.

Information about the authors:

**Vinogradov, Valentin V.** – D.Sc. (Eng), professor of Russian University of Transport, Moscow, Russia, +7(495) 684–21–10.

**Loktev, Alexey A.** – D.Sc. (Physics and Mathematics), professor, head of the department of Transport construction of Russian University of Transport, Moscow, Russia, aaloktev@yandex.ru.

**Fazilova, Zulfiya T.** – Ph.D. (Eng), associate professor of Russian University of Transport, Moscow, Russia, fazil\_1905@mail.ru.

Article received 22.03.2018, accepted 19.05.2018.

