Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias (2005), Vol. 2, Nº 1, pp. 33-37 ISSN 1697-011X

¿MENTIMOS A NUESTROS HIJOS CUANDO LES DECIMOS QUE 1+1 SON 2?

Sergio Amat Plata

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. U.P. Cartagena
Paseo de Alfonso XIII, 52, 30203 Cartagena (Murcia)
sergio.amat@upct.es

RESUMEN

La gente cree que la forma de contar sigue unas reglas predeterminadas por la aritmética convencional y que no existen ni pueden existir otro tipo de aritméticas. El objetivo de este artículo es mostrar la existencia de aritméticas distintas de la usual que dan respuesta a problemas reales en los que las reglas cotidianas entran en contradicciones o paradojas. En muchas ocasiones, tenemos que utilizar diferentes reglas para contar y esto es un signo de la existencia de distintas aritméticas. A estas aritméticas las llamaremos no diofantinas, en honor a Diophantus cuyas contribuciones a la aritmética clásica fueron fundamentales.

Palabras claves: *Aritmética convencional o diofantina, aritméticas no diofantinas, problemas reales*

Dedicado a Roberto

INTRODUCCIÓN

Una de las cosas más usuales en nuestra vida diaria es contar. En nuestros primeros años de aprendizaje, aprendemos distintas reglas para realizar operaciones aritméticas y en particular asumimos que 1+1 es igual a 2. Sin embargo, en nuestros días, ciertos científicos ponen en duda la veracidad *absoluta* de esta afirmación.

No es ésta la primera vez que ocurre algo parecido en el mundo de las matemáticas con relación a problemas reales. Un claro ejemplo lo tenemos en la geometría euclídea. Se creyó durante 2200 años que esta geometría era la única. El famoso filósofo alemán Kant (1724-1804) afirmaba que la geometría (euclídea) está dada a priori, es decir, sin necesidad de un aprendizaje especial. Con el objetivo de mejorar la teoría axiomática de esta geometría, durante el siglo XIX, tres grandes matemáticos Gauss (1777-1855), Lobachewsky (1792-1856) y Bolyai (1802-1860), descubrieron muchas otras. Además, estos descubrimientos tienen una gran aplicación en la vida real. Por ejemplo, en estas geometrías la distancia mínima entre dos puntos puede no ser la línea recta. Si pensamos en nuestro planeta, de forma esférica, nos daremos cuenta de este hecho, basta notar que los aviones en sus recorridos, con el fin de optimizar la distancia, trazan otro tipo de curvas (las geodésicas), cruzando en

DOI: http://dx.doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2005.v2.i1.04

muchas ocasiones los polos. No obstante, romper con las reglas establecidas no es fácil: cabe recordar que Gauss (considerado, por muchos, el mejor matemático de todos los tiempos) no publicó gran parte de sus descubrimientos por miedo a la posible reacción de sus coetáneos.

Distintos matemáticos como Kolmogorov (1961), Littlewood (1953), Kline (1967), admiten la posible existencia de otras aritméticas diferentes de la usual. El primer matemático que formula explícitamente el problema de construir otro tipo de aritméticas fue Rashevky (1973). Más recientemente, Rotman (1997) basándose en una serie de ejemplos, donde gran cantidad de las propiedades de la aritmética clásica no funcionan, vuelve a plantear directamente el problema.

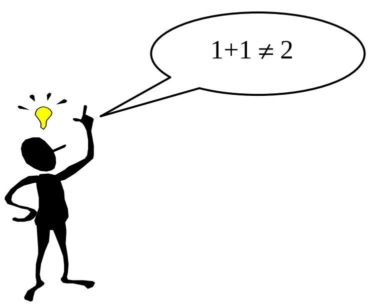
El objetivo de este artículo es justificar la necesidad y existencia de distintas aritméticas, que llamaremos no diofantinas (en honor a Diophantus gran estudioso de la aritmética clásica). Para una ampliación en los detalles de este tipo de aritméticas se pueden consultar los trabajos de Burgin (1997, 2001).

ARITMÉTICAS NO DIOFANTINAS

Sin contar no podemos hacer demasiado. La ciencia y la tecnología no podrían desarrollarse. No podríamos comprar ni vender. Todo el mundo necesita contar algo todos los días. Las calculadoras y los ordenadores fueron inventados para ayudarnos a contar. La mayoría de las aplicaciones se apoyan en los números y en sus operaciones aritméticas.

La aritmética de los números naturales es tratada como un ser primero. El famoso matemático Kronecker (1825-1891) afirmó "*Dios hizo los enteros, el resto del trabajo fue realizado por el hombre",* por su parte Jacobi (1805-1851) dijo *"Dios siempre hace aritmética".* Así, ninguna persona podría ser capaz de negar que 1+1 son 2, ya que, negaría al *Creador*.

Sin embargo, ya en la época de los grandes matemáticos y filósofos griegos, se proponen diversas paradojas dentro de la aritmética clásica basadas en la diversidad y complejidad del mundo real. La primera familia de aritméticas no diofantinas fue descubierta por Burgin (1977). Estas aritméticas dependen de un parámetro funcional $f(x)$. Sus propiedades y las leyes de sus operaciones vienen dadas en función de dicho parámetro. La aritmética diofantina se recupera considerando $f(x)=x$. El libro de Burgin (2001) contiene todos los detalles de estas aritméticas.



En aritméticas no diofantinas, incluso la igualdad más evidente puede ser falsa.

Algunas de estas aritméticas tienen propiedades similares a la aritmética para números transfinitos construida por Cantor (1845-1918). Por ejemplo, puede existir una sucesión de números $a_1, a_2,..., a_n,...$ tales que para cada número b menor que ellos la igualdad $a_n + b = a_n$ sea válida. Esta es una propiedad que en aritmetica clásica sólo la verifica el infinito. Así, las aritméticas no diofantinas proporcionan modelos en los que cantidades finitas (como los números naturales) adquieren propiedades de objetos infinitos. Dentro del modelo, los números son clasificados según su tamaño relativo. Expresiones del tipo "<<", comunes en otras ramas como la física, adquieren un sentido formal.

Como propiedades de este tipo de aritméticas podemos citar que la suma y la multiplicación son siempre conmutativas, que el 0 es el elemento neutro de la adición que el 1 es el neutro para el producto. Por otra parte, las propiedades asociativa y la distributiva no suelen cumplirse.

Se podría pensar que estas aritméticas son meros objetos abstractos, construcciones formales realizadas por los matemáticos y que se alejan del mundo real. En la siguiente sección presentaremos diversos ejemplos de la vida cotidiana que justifican la existencia de dichas aritméticas.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Veamos cómo en nuestra vida utilizamos aritméticas distintas a la usual.

1. En una frutería podemos encontrar el kilo de peras a 1.5 euros y los dos kilos a 2 euros. Así, $a + a \neq 2a$.

2. Es más, podemos ir a un supermercado y leer "*Compre uno y llévese otro de regalo*" (2×1). Por lo tanto, $a + a = a$, lo cual sólo es posible en aritmética no diofantina.

3. Al mezclar una taza de cereales con una de leche el resultado es una taza con la mezcla, ya que, la leche es absorbida rápidamente por los cereales, así, $1 + 1 = 1$. Esta paradoja también ocurre al mezclar ciertos productos químicos.

4. Supongamos que deseamos realizar una llamada de teléfono en una cabina. Si una llamada local cuesta 20 céntimos de euros y disponemos de 35 céntimos, no tendríamos problemas en realizarla. Ahora bien, dado que la cabina sólo admite monedas de al menos 5 céntimos de euro, si tuviéramos los 35 céntimos en monedas de un céntimo no podríamos realizar la deseada llamada. En este submundo, *sobre todo si se está solo*, haciendo $1 + 1 + 1 + \ldots$ no llegaríamos nunca a 5.

5. En física, existen valores finitos que son considerados como infinitos, este es el caso de la velocidad de la luz C. La teoría de la relatividad, afirma que es la velocidad mayor que puede alcanzar un cuerpo. Por lo tanto, dada una velocidad V tendremos que $V + C = C$.

6. En economía cantidades finitas tienen propiedades de objetos infinitos. Por ejemplo, si al precio de una casa le quitamos 30 euros, nos parecería que el precio es el mismo.

7. La aritmética utilizada por los ordenadores no puede ser clásica. En esta aritmética, cuando se ha de sumar una gran cantidad de números, y se quiere obtener un resultado aceptable, es mejor ir sumando en orden creciente, así, la propiedad asociativa no se verifica. Los errores de redondeo no aparecen en los cálculos teóricos, es decir, con la aritmética clásica.

8. Muchas de las variables físico-químicas no son aditivas: dos cuerpos a temperatura de 20º y 30º al mezclarse no tienen temperatura de 50º; lo mismo ocurre con el PH de la mezcla de dos disoluciones.

Como consecuencia, cuando se resuelven este tipo de problemas mediante la aritmética usual podemos llegar a resultados matemáticos válidos pero que son falsos en la realidad. Las aplicaciones de estas nuevas aritméticas, como vemos, son muy variadas: economía, física, química,…

Otro ejemplo donde aparecen aritméticas no diofantinas es en la convergencia de series. Mientras que para un matemático la serie de términos $n!/1000^n$ es divergente, ya que sus términos tienden a infinito, para un físico la serie es convergente, dado que sus 1000 primeros términos son decrecientes. Poincaré (1854-1912) concluye que ambos conceptos son válidos: el primero basado en el estudio teórico y el segundo en el práctico, y que estas ramas deben de ser diferenciadas. Si sólo existiera una aritmética sólo existiría un tipo de convergencia.

A igual que ocurría con la geometría euclídea, aceptar y convencerse de la existencia de otro tipo de aritméticas no es una tarea fácil. Un hombre le dijo a Burgin: "*No conozco tu nueva teoría, no he leído nada de ella. Sin embargo estoy totalmente en desacuerdo con ella*". Cambiar los estereotipos es siempre complicado. Los matemáticos pueden asegurar la existencia de una única aritmética aceptando un nuevo postulado *"No existe otra aritmética diferente a la diofantina".* Pero, esto llevaría consigo la imposibilidad de modelar y resolver gran cantidad de problemas que aparecen en la realidad. Dar cabida a estos problemas implica dar cabida a aritméticas no diofantinas.

POSIBLES REPERCUSIONES EN LA FORMACIÓN DEL ALUMNO

En esta sección intentaremos justificar la inclusión de este tipo de temas.

En primer lugar, dado los ejemplos que puede modelizar, resultaría fácil despertar la curiosidad de nuestros alumnos. Es una materia que se puede introducir de forma amena, en particular, la motivación y el acercamiento a una de las materias que peor fama tiene entre los alumnos, aumentaría.

Por otro lado, mostrarían la Matemática como una parte de la Ciencia, abierta y en continuo crecimiento. Además permite obtener conexiones con otras ramas de la Ciencia, lo cual resulta de un gran interés didáctico.

Finalmente, se haría hincapié al sentido autocrítico, no dando como verdad absoluta los postulados por muy clásicos que éstos sean.

CONCLUSIÓN

Como conclusión, y dando respuesta a la pregunta inicial, podemos afirmar que cuando les decimos a nuestros hijos que 1+1 son 2, les estamos ocultando cierta información con la que deberán enfrentarse en sus quehaceres diarios.

Terminaremos planteando una nueva pregunta:

"*Si el Guernica de Pablo Ruiz Picasso (1881-1973) estuviera valorado en 30 millones de euros, ¿Cuánto costarían dos Guernicas?*"

AGRADECIMIENTO: Quisiera mostrar mi agradecimiento a los comentarios realizados por los evaluadores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BURGIN M. (1977). *Non-Classical Models of Natural Numbers,* Russian Mathematical Surveys, 32 (6), pp. 209-210.

BURGIN M. (1997). *Non-Diophantine Arithmetics*, Ukrainian Academy of Information Sciences, Kiev.

BURGIN M. (2001). *Diophantine and Non-Diophantine Aritmetics: Operations with Numbers in Science and Everyday Life*, LANL, Preprint Mathematics GM/0108149, p. 27. En línea en http://arXiv.org.

KLINE, M. (1967). *Mathematics for Nonmathematicians*, Dover Publ., New York.

KOLMOGOROV, A.N. (1961). *Automata and Life*, in *Knowledge is Power, 10*, p. 11.

LITTLEWOOD, J.E. (1953), *Miscellany*, Methuen, London.

RASHEVSKY, P.K. (1973), *On the axioms of natural numbers,* Russian Mathematical surveys, 28 (4), pp. 243-246.

ROTMAN, B. (1997), *The Truth about Counting*, The Sciences, 11, pp. 34-39.