被覆面の理想境界及びその擬等角変形

正　岡　弘　照
石　田　　　久
辻　　　幹　雄
瀬　川　重　男[1]
西　尾　昌　治[2]

研究目的

一般に２つのリーマン面が擬等角同値であるとき，それらのリーマン面のマルチン境界は同相であるかという問題が設定される。これに関しては，T. Lyons［L］が自明でないグリーン函数が存在するリーマン面に対して，反例を与えている。しかし，自明でないグリーン函数が存在しないリーマン面に対しては未だに解決されていない。

他方，近年，著者は瀬川重男氏との共同研究により，$\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ の有限葉非有界被覆面の理想境界，特に，ミニマルマルチン境界の濃度を基底面上の原点の連結な細近傍を用いて特徴付けた。この結果により，$\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ の有限葉非有界被覆面のマルチン境界の研究の端緒が開けたように思われる。上記問題の自明でないグリーン函数が存在しないリーマン面として，$\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ の有限葉非有界被覆面の場合に，マルチン境界の同相性を議論することは１つの問題であるが，その前段階として，$\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ の有限葉非有界被覆面のミニマルマルチン境界の濃度が擬等角変形により，不変かどうかという問題が考えられる。本プロジェクトの主要な目的はこの問題を考察することである。この問題に関してはすでに，［Sh］，［M2］で議論されている。それによると，２つの $\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ の Heins 型有限葉非有界被覆面が擬等角同値であるならば，それらのミニマルマルチン境界の濃度は一致すると予想される（以下の定理２を参照）。主にこの予想を中心にご報告する。

プロジェクトによって得られた成果

［1］ H. Masaoka and S. Segawa, Quasiconformal mappings and minimal Martin boundary of p-sheeted unlimited covering surfaces of the Complex plane, to be appeared in Kodai Math. J..

［2］ H. Masaoka, Quasiconformal mappings and minimal Martin boundary of p-sheeted unlimited covering surfaces of the once punctured Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ of Heins type, to

[1]大同工業大学教養部

[2]大阪市立大学大学院理学研究科

be submitted in Advanced Studies in Pure Mathematics.

[3] H. Masaoka and S. Segawa, Hyperbolic Riemann surfaces without unbounded positive-harmonic functions, to be submitted in Advanced Studies in Pure Mathematics.

成果の概要

1．この節では，[1]，[2] で得られた結果を述べることにする。W を一般のリーマン面とする。Δ^Wを W のマルチン境界とする（マルチン境界の文献としては [Hl]，[CC] を参照せよ)。Δ^Wのミニマル点全体をΔ_1^Wと記し，W の**ミニマルマルチン境界**という。 Δ_1^Wの濃度を$\sharp\Delta_1^W$と記す。

R を $\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ の $p(>1)$ 葉非有界被覆面（[AS]，[F] を参照せよ）とする。$\pi: R\to\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ を R 上の射影とする。このとき，

命題 1 ([MS]).

$$\sharp\Delta_1^W = \inf\{\nu(M)\mid M \text{ は } \hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\} \text{ 内の領域で，} M\cup\{0\} \text{ は } 0 \text{ の細近傍である。}\}$$

ここで，$\nu(M)$ は $\pi^{-1}(M)$ の連結成分の個数を表す。

上記の細近傍に関しては，[B]，[BH]，[Fg] 等を参照してほしい。

R' を開リーマン面とする。f を R から R' の上への擬等角写像とする（[LV]，[R] を参照せよ)。このような f が存在するとき，R と R' とは**擬等角同値**であるという。以下では，特に断らない限り，R と R' とは擬等角同値であるとする。このとき，命題 1 により，$1\leq\sharp\Delta_1^R\leq p$ が従う。また，Heins–瀬川の定理（[S]）より，$1\leq\sharp\Delta_1^{R'}\leq p$ が従う。ミニマルマルチン境界の濃度の擬等角不変性としては，まず，次がなりたつ。

命題 2 ([2]，[1]). もし，$\sharp\Delta_1^R=p$ ならば，$\sharp\Delta_1^{R'}=p$.

命題 1 及び命題 2 を用いると，$p=2$，3 の場合は，次の結果がなりたつ。

定理 1 ([1]). もし，$p=2$，3 で，R' も $\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ の p 葉非有界被覆面とするならば，$\sharp\Delta_1^R=\sharp\Delta_1^{R'}$.

$\{a_n\}$ 及び $\{b_n\}$ を次の条件をみたす単調減少数列とする。

$$0<a_n<b_n<1,\ \lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

それぞれ，$I_n=[a_n, b_n]$，$I=\cup_n I_n$，$G=\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ とおく。いま，G の p 個のコピー $G_1, \cdots, G_p$ を用意する。このとき，各 $j=1, \cdots, p$ と n に対して，G_j と G_{j+1}（ただし，$G_{p+1}=G_1$）とを G_j の I_n の上縁と G_{j+1} の I_n の下縁に沿って接合してできる面をこの面を最初に導入した Heins [He] に因んで，$\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ の **Heins 型 p 葉非有界被覆面**と呼ぶことにする。R を $\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ の Heins 型 p 葉非有界被覆面に限

定すると，命題1より，次の結果をうる。

命題3（[MS]）．R を $\hat{\mathrm{C}}\setminus\{0\}$ の Heins 型 p 葉非有界被覆面とする。このとき，$\sharp\Delta_1^R=1, p.$

R 及び R' を $\hat{\mathrm{C}}\setminus\{0\}$ の Heins 型 p 葉非有界被覆面に限定すると，命題2と命題3により，$f^{-1}: R'\to R$ が擬等角写像であるので，次の結果をうる。

定理2（[2]）．R 及び R' を $\hat{\mathrm{C}}\setminus\{0\}$ の Heins 型 p 葉非有界被覆面とする。このとき，$\sharp\Delta_1^R=\sharp\Delta_1^{R'}$.

R のみを $\hat{\mathrm{C}}\setminus\{0\}$ の Heins 型2葉非有界被覆面に限定するときは，次の結果をうる。

定理3（[2]）．R を $\hat{\mathrm{C}}\setminus\{0\}$ の Heins 型2葉非有界被覆面とする。このとき，もし，$b_n-b_{n+1}\approx 2^{-n}$，すなわち，$n$ に無関係な定数 $\kappa(>1)$ がとれて，$\kappa^{-1}2^{-n}<b_n-b_{n+1}<\kappa 2^{-n}$ をみたすならば，$\sharp\Delta_1^R=\sharp\Delta_1^{R'}$.

証明としては $\sharp\Delta_1^R=2$ のときは命題2より従う。$\sharp\Delta_1^R=1$ のときは［LSW］や［He］で用いられた手法が本質的役割を演じる。その際，［M1］で証明された容量（[Hl]を参照）に関する補題も使用される。詳しくは，［2］を参照されたい。

2．この節では，［3］で得られた結果について，述べることにする。この結果はプロジェクトの目的から，逸脱する内容であるが，プロジェクトを推進している間に，瀬川氏と議論しているときに生まれたものであり，本学の助成の賜物であるので，ここに掲載することにした。W を自明でないグリーン函数をもつリーマン面とする。Δ^W，Δ_1^W をそれぞれ，1で述べたものと同じものとする。Δ_1^W の濃度を $\sharp\Delta_1^W$ と記す。Δ^W 上には，自然に調和測度 $\mu_z(z\in W)$ が導入される。$HP(W)$ を W 上の正値調和函数の全体とし，$HB_+(W)$ を W 上の有界正値調和函数の全体とする。一般に $HB_+(W)\subset HP(W)$ となる。$HP(W)\subset HB_+(W)$ がなりたつ W の条件を考察する。このとき，次の結果をうる。

定理4（[3]）．次は必要十分条件である。

(1) $HP(W)=HB_+(W)$;

(2) $\sharp\Delta_1^W<\infty$ で，Δ_1^W の各点 ζ に対して，集合 $\{\zeta\}$ の調和測度 $\mu_z(\{\zeta\})$ は $z(\in W)$ に無関係に正である。

談話会等

このプロジェクトの今後の発展のために，以下の情報知識の提供をお願いした。

整函数の立場（値分布論）からＣの被覆面を研究している韓国 Yonsei 大学教授 Haseo Ki 氏に以下の２回の講演をして頂き，被覆面の知見を深めた。

１．数学科・数理科学科談話会

日時：2004年10月13日（水）15時30分～17時

講師：Haseo Ki 氏（Yonsei 大学）

題目：de Bruijn's question on the zeros of Fourier transforms

場所：京都産業大学２号館会議室

２．第47回函数論シンポジウム（2004年11月24日（水）～11月26日（金）に京都産業大学神山ホールで開催）

日時：2004年11月25日（木）16時45分～17時45分

講師：Haseo Ki 氏（Yonsei 大学）

題目：Approaches to the Riemann hypothesis

場所：京都産業大学神山ホール

参考文献

[AS] L. V. Ahlfors and L. Sario: *Riemann Surfaces,* Princeton, 1960.

[B] M. Brelot: *On Topologies and Boundaries in Potential Theory,* Lecture Notes in Math., 175 (1971), Springer.

[BH] J. Bliedtner and W. Hansen: *Potential Theory,* Springer, 1986.

[CC] C. Constantinescu and A. Cornea: *Ideale Ränder Riemanncher Flächen,* Springer, 1969.

[F] O. Forster: *Lectures on Riemann Surfaces,* GTM 81, Springer.

[Fg] B. Fuglede: *Finely Harmonic Functions,* Lecture Notes in Math., 289 (1970), Springer.

[He] M. Heins: *Riemann surfaces of infinite genus,* Ann. of Math., 55 (1952), 296–317.

[Hl] L. Helms: *Introduction to Potential Theory,* Wiley–Interscience, 1969.

[L] T. Lyons: *Instability of the Liouville property for quasi–isometric Riemannian manifolds and reversible Markov chains,* J. Differential Geometry, 26 (1987), 33–66.

[LSW] W. Littman, G. Stampacchia and H. F. Weinberger: *Regular points for elliptic equations with discontinuous coeffcients,* 17 (1963), Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 45–79.

[LV] O. Lehto and K. I. Virtanen: *Quasiconformal Mappings in the Plane,* Springer, 1973.

[M1] H. Masaoka: *Criterion of Wiener type for minimal thinness on covering surfaces,* Proc. Jap. Acad., 72 (1996), 154–156.

[M2] H. Masaoka: *Quasiregular mappings and d–thinness,* Osaka J. Math., 34 (1997), 223–231.

[MS] H. Masaoka and S. Segawa: *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood,* Osaka J. Math., 34 (1997), 659–672.

[R] S. Rickman: *Quasiregular Mappings,* Springer, 1991.

[S] S. Segawa: *A duality relation for harmonic dimensions and its applications,* Kodai Math. J., Vol. 4 (1981), 508–514.

［Sh］ H. Shiga : *Quasiconformal mappings and potentials,* XVIth Rolf Nevalinna Colloquium, Walter de Gruyter & Co., 1996, 215–222.