



Análisis fractal de las catedrales góticas españolas

Fractal analysis of Spanish Gothic Cathedrals

A. Samper^(*), B. Herrera^(*)

RESUMEN

En las construcciones góticas la Geometría Euclídea, y en especial los ratios phi y pi, fue usada para dotarles de estructura, proporción y belleza; sin embargo, además de los elementos euclídeos existen otros conceptos complejos en las construcciones de las catedrales góticas: efectividad de ocupar espacio, rugosidad y escabrosidad de los detalles que constituyen sus estructuras. La mejor herramienta para describir estos conceptos la ofrece la Geometría Fractal a través del ratio llamado «dimensión fractal». Se trata de un parámetro geométrico, que da una medida de esos conceptos; y que no es atribuible únicamente a elementos euclídeos, sino que además viene generado por el resultado arquitectónico final de estas construcciones. Con el presente estudio mostramos que las Catedrales Góticas Españolas no sólo se rigen por los patrones geométricos euclídeos, sino que además poseen otro patrón característico, que viene determinado por su dimensión fractal.

Palabras clave: Gótico Español; Dimensión Fractal; Geometría y Arquitectura.

ABSTRACT

Euclidean geometry, and especially “phi” and “pi” ratios, were used in Gothic buildings to give them structure, proportion and beauty. Moreover the euclidean elements there are complex structures in Spanish Gothic Cathedrals: effectiveness to occupy space, roughness and amount of details that constitute its structures. The best tool to describe these ideas is available in Fractal geometry through the use of the so-called “fractal dimension” ratio. This is a geometric parameter, which provides a measure of these concepts. The ratio is not exclusively related with the euclidean elements, but instead it is also brought about by the final construction project of these cathedrals. In the present paper we prove that the Spanish Gothic Cathedrals do not only follow euclidean geometric patterns, but they also show another specific pattern dictated by their fractal dimension.

Keywords: Spanish Gothic; Fractal Dimension; Geometry and Architecture.

^(*) Universitat Rovira i Virgili. Tarragona (España)

Persona de contacto/Corresponding Author: samper.albert@gmail.com (A. Samper)

Cómo citar este artículo/Citation: Samper, A., Herrera, B. (2014). Análisis fractal de las catedrales góticas españolas. *Informes de la Construcción*, 66(534): e015, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.12.104>.

Licencia/License: Salvo indicación contraria, todos los contenidos de la edición electrónica de **Informes de la Construcción** se distribuyen bajo una licencia de uso y distribución Creative Commons Reconocimiento no Comercial 3.0. España (cc-by-nc).

1. INTRODUCCIÓN: GEOMETRÍA Y CONSTRUCCIÓN

1.1. Resumen histórico

Es bien sabido que las catedrales góticas constituyen una creación artística de entre las más importantes y punteras de la historia de la humanidad. Creación promovida por inquietudes religioso-transcendentales, patrones estéticos e influencias sociales; y en la cual se aglutinó un gran conocimiento científico (1) (2) (3) (4) (5).

La difusión de la arquitectura gótica en España tuvo tres vías principales de influencia:

La primera fue la arquitectura cisterciense que se extendió por todo el país y que antes del siglo XIII llevó a la construcción de los grandes conventos de la Orden reformada, precedentes del arte gótico (6). El Monasterio de Santa María la Real de Las Huelgas, fundado hacia 1180 por Alfonso VIII de Castilla, fue un claro ejemplo de edificación decisiva para la recepción del gótico francés en Castilla y referencia fundamental del arte desarrollado durante los siglos XIII y XIV (7) (8) (9) (10) (11). Existen documentos en que se nombra a un maestro Ricardo (*Ricardus*), de origen francés o inglés, que intervino en su construcción, (12). De esta forma, se entiende que Las Huelgas pudiera reunir distintos rasgos regionales del gótico francés, influencias llegadas de *Île-de-France* y de las regiones del Soissonnais y Laonnois, siendo modelo arquitectónico para el territorio Español.

La transición entre el estilo románico y el gótico (protogótico) se produjo de manera lenta en España por los recelos que despertaban las nuevas estructuras góticas, de carácter revolucionario en ese momento. El primer elemento gótico que se incorporó a la arquitectura española es la bóveda de ojiva, su aparición se efectuó hacia el año 1170, por vía de la Orden del Cister. Una manifestación de este tránsito estaba en el hecho de que algunos edificios se comenzaran a labrar de forma románica y posteriormente se continuaran bajo esquemas góticos. La combinación de ambas formas dan paso a un estilo de transición, que tiene su principal presencia en Catedrales como la de Ávila (1170) y la de Cuenca (1196) (13).

La segunda vía se produjo en el siglo XIII, durante el reinado en Castilla y León de Fernando III, donde los matrimonios de varios reyes con princesas de las casas de Anjou, Borgoña y Plantagenet motivaron la introducción del gótico francés en la zona central, dando resultado a creaciones como las catedrales de Burgos, León y Toledo (14). La repercusión mediática del *Iter Francorum*, la pujanza económica castellana y el protagonismo directo de determinados obispos con espíritu internacional (muchos de ellos formados en París) como el obispo de Toledo Ximénez de Rada y Mauricio el obispo de Burgos, favorecieron el proceso constructivo de dichas Catedrales, (15).

La tercera vía fueron las relaciones mantenidas entre el Condado de Barcelona con el Languedoc y Provenza en Francia y el contacto de los obispos catalanes con los de Narbona y Montpellier. Estas diplomacias marcaron la evolución del gótico en la franja levantina del territorio español (16). Las diferencias de climatología, sismología del territorio y configuración social marcaron el estilo gótico en esta zona con rasgos propios. Fueron construcciones de exteriores sobrios

de gran simplicidad y con escasa decoración escultórica (17). Un claro ejemplo de ello fueron las Catedrales de Barcelona, Gerona y Palma de Mallorca.

1.2. Metodología/Elección de la muestra significativa

Nuestro estudio se centra, a modo de subconjunto representativo global, en nueve catedrales españolas de estilo arquitectónico predominantemente gótico y construidas entre los siglos XII y XV (Figura 1).

- La Catedral de Ávila y la Catedral de Cuenca: construcciones levantadas a finales del siglo XII que incorporan de manera clara el lenguaje y la técnica del gótico, junto con el referente del Convento de las Huelgas, citado anteriormente. La Catedral de Vitoria, también es objeto de estudio debido a que su construcción se inició a principios del siglo XIII. A pesar de que su crucero responde a modelos de tipo cistercienses, se le atribuyen de forma general cánones estéticos de gótico clásico.
- La Catedral de Burgos, la Catedral de Toledo y la Catedral de León: construcciones modélicas franco-góticas levantadas en el siglo XIII. El ambiente de euforia política, el desarrollo urbano, la situación económica de relativo bienestar, y demás circunstancias de ese siglo determinaron la construcción de estas tres obras de gran importancia para el establecimiento del nuevo estilo y su difusión. No fueron ajenos a ello los impulsos dados por algunos personajes singulares (el obispo Rodrigo Ximénez de Rada y el obispo Mauricio) y sus notables relaciones con los reyes, los cuales concedieron ventajas económicas que favorecieron tales edificaciones.
- La Catedral de Palma de Mallorca, Catedral de Barcelona y la Catedral de Gerona: construcciones góticas representativas durante el siglo XIV en las áreas mediterráneas. Sus rasgos propios influenciados por motivos, más bien técnicos, dotan estas catedrales de una singularidad diferente al resto de territorio español (17).

Con esta muestra significativa de las catedrales, a nivel estilístico, temporal y geográfico, pretendemos analizar geométricamente la edificación resultante con nuevos parámetros hasta el momento ignorados. Este proceso no trata de comparar unas catedrales con otras, ya que la autoría y las circunstancias del proceso constructivo de cada edificación fue muy particular, sino investigar si las líneas de diseño tienen más sentido geométrico que el conocido hasta el día de hoy y si las estructuras de estas edificaciones tienen una consonancia formal con los resultados geométricos. Analizar la geometría que ordena estas catedrales es el principal objetivo.

1.3. Patrones geométricos

El maestro de obra debía dominar conocimientos matemáticos y en especial la Geometría, tal y como podemos apreciar en los cuadernos de esbozos del arquitecto Villard de Honne-courd (18). Hay que tener en cuenta que no se disponía de una escala precisa para medir las más pequeñas fracciones de una toesa o un pie y transportarlas luego con certeza a unidades más grandes; por lo tanto, era más seguro tomar un esquema geométrico como base de partida de la construcción; por ejemplo una red constituida por cuadrados, igual que sucedió en las basílicas romanas, pre-góticas y en los campamentos fortificados romanos.

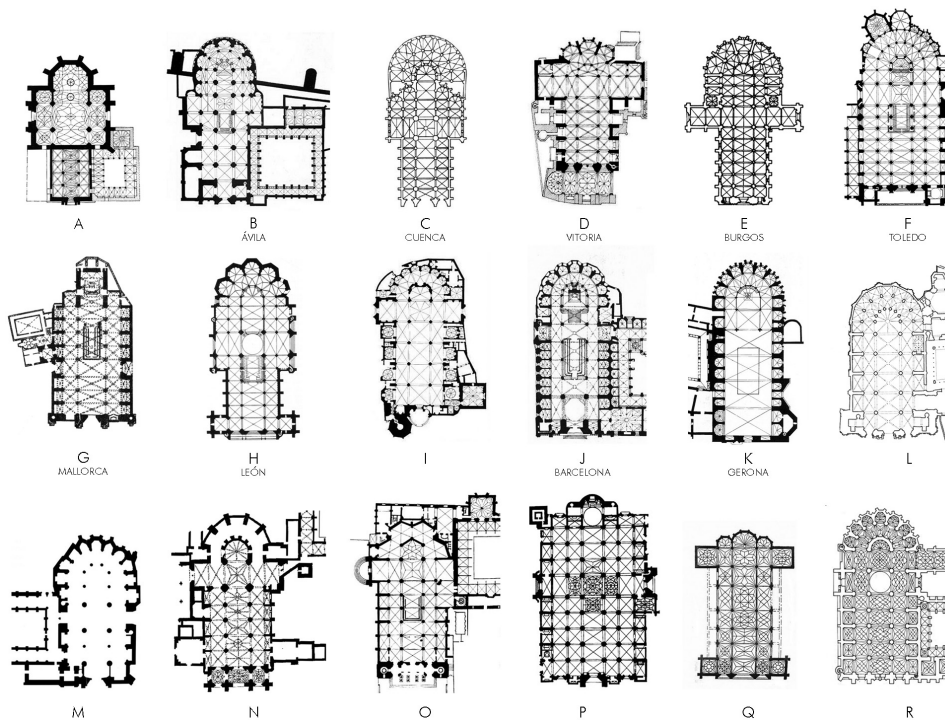


Figura 1. Esquema del marco histórico del gótico español: A) Catedral de Plasencia (s. XII), B) Catedral de Ávila (1091), C) Catedral de Cuenca (1196), D) Catedral de Vitoria (1202), E) Catedral de Burgos (1222), F) Catedral de Toledo (1224), G) Catedral de Mallorca (1229), H) Catedral de León (1230), I) Catedral de Valencia (1262), J) Catedral de Barcelona (1298), K) Catedral de Gerona (1312), L) Catedral de Tortosa (1347), M) Catedral de Bilbao (1379), N) Catedral de Oviedo (1382), O) Catedral de Pamplona (1392), P) Catedral de Sevilla (1401), Q) Catedral de Astorga (1471), R) Catedral de Segovia (1525).

Los arquitectos, además del cuadrado, utilizaron el pentágono, el hexágono, el octógono y el decágono –construibles con regla y compás– para representar, en forma de relaciones geométricas precisas, los planos y los alzados de sus construcciones (19). El cuadrado, así como el octógono, derivaban de geometrías cuyo modelo era la Jerusalén celestial. Sin embargo, la proporción más perfecta deriva del pentágono y del decágono: dando lugar a la relación armónica o «proporción áurea» (Figura 2).

Saber dónde situar el compás para hacer derivar del círculo cierta forma, o realizar el procedimiento inverso, era para los constructores de la Edad Media el *súmmum* del arte. Esta técnica no podía aplicarse de manera esquemática, sino que debía adaptarse en cada caso a las variaciones de las condiciones materiales y geográficas, con discernimiento y sobre la base de una idea creadora. La plena posesión de esta técnica era una prueba irrefutable de maestría. La sensibilidad artística y el conocimiento intuitivo debían unirse.

A principios del siglo XIII se constató que el equilibrio de un cuerpo resultaba de la anulación recíproca de dos fuerzas antagónicas (20). Este descubrimiento sin duda fue determinante en las decisiones de construcción de las catedrales góticas, en particular para la utilización de contrafuertes y arbotantes. De lo que podemos estar seguros es que el maestro de obras gótico hacía de la unidad geométrica una exigencia no sólo de armonía sino también de estabilidad. El arquitecto Jean Mignot (21), al lanzar su célebre fórmula a los arquitectos de la Catedral de Milán: *ars sine scientia nihil est* (el arte sin la ciencia no es nada), les alertaba del peligro de apartarse de las proporciones regidas por geometrías perfectas y el riesgo de ver derrumbarse el edificio. Los italianos, para quienes el gótico era en definitiva algo ajeno, replicaron que

un elemento de construcción colocado a plomo no podía caer; no obstante, por seguridad y para asegurarse de desmentir la teoría de Mignot, reforzaron sus pilares con piezas de hierro.

Los patrones clásicos de la Geometría Euclídea, como los coeficientes *phi* y *pi*, eran utilizados en las construcciones góticas para dotarles proporción y belleza (Figura 2); sin embargo, además de los elementos euclídeos existen otros conceptos complejos en las construcciones de las catedrales góticas: efectividad de ocupar espacio, rugosidad y escabrosidad de los detalles que constituyen sus estructuras. La mejor herramienta para describir estos conceptos la ofrece la Geometría Fractal a través del ratio llamado «dimensión fractal». Se trata de un parámetro geométrico, que da una medida de esos conceptos; y que no es atribuible únicamente a elementos euclídeos, sino que además viene generado por el resultado arquitectónico final de estas construcciones.

El objetivo de esta investigación es analizar la geometría fractal de cada una de las catedrales Españolas que hemos considerado como buena muestra representativa de estilo predominantemente gótico. A parte de aportar una descripción geométrica nueva y diferente para cada uno de los casos, queremos comprobar si los resultados pueden llegar a tener una relación en sus estructuras, composiciones o geografía. No compararemos los procesos constructivos entre ellas ni la voluntad de los distintos maestros de obra en ejecutar sus diseños. Calcularemos la geometría de sus composiciones aportando ese nuevo valor y tratando de averiguar qué sentido formal pueda tener a nivel individual y colectivo.

Así: ¿es cierto que las construcciones de las Catedrales Góticas Españolas poseen un patrón fractal?

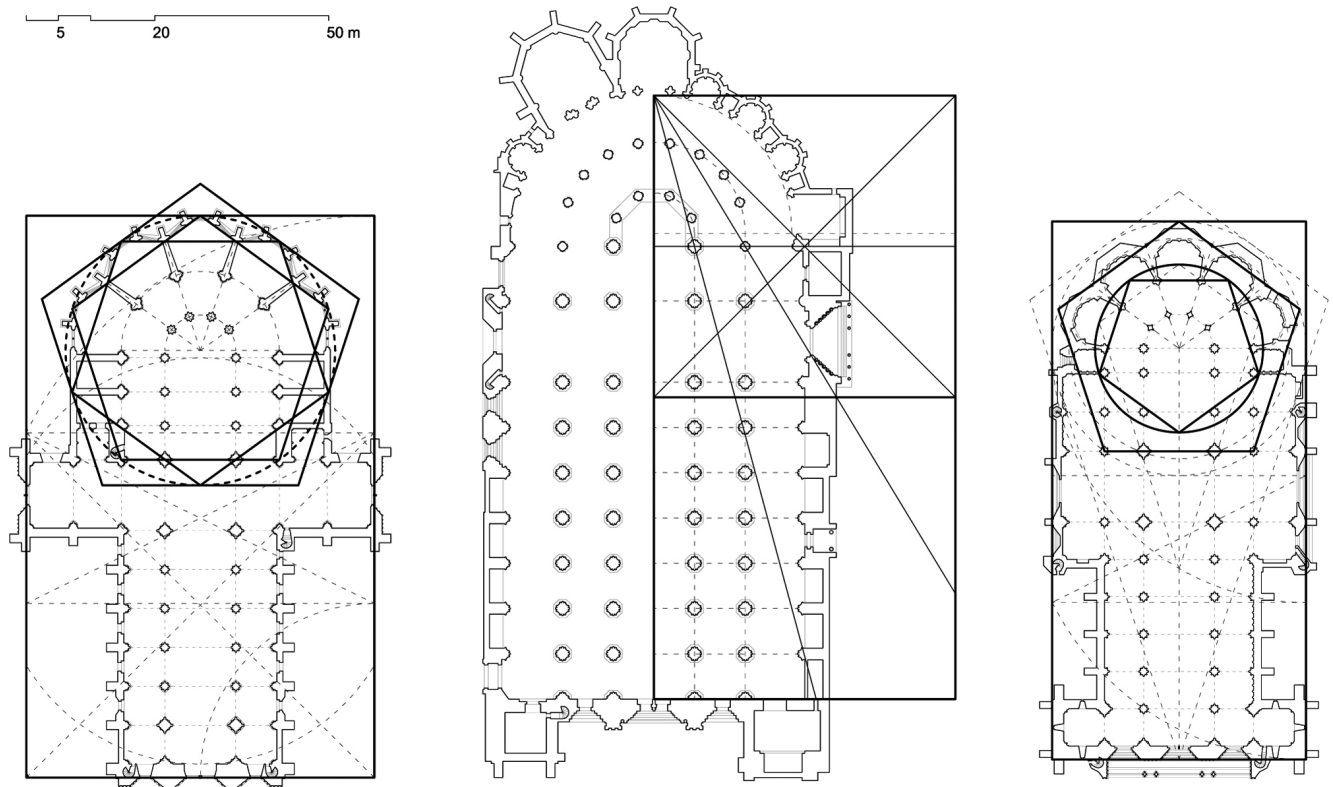


Figura 2. Esquema geométrico del desarrollo en planta de la Catedral de Burgos (a la izquierda), la Catedral de Toledo (al centro) y la Catedral de León (a la derecha).

2. DIMENSIÓN FRACTAL Y MÉTODO

Dado que el presente trabajo está dirigido a profesionales que no tienen porqué ser especialistas en Fractales, esta sección está dedicada a tales profesionales; y consiste en una breve descripción de los elementos necesarios para entender y calcular la dimensión fractal.

2.1. Dimensión fractal

Aquí fijaremos algunos conceptos clásicos y básicos, los cuáles pueden ser encontrados en todos los libros y enciclopedias en línea sobre Fractales. Si el lector desea ver referencias matemáticas especializadas y profundas sobre el tema puede acudir a (22) (23) (24).

En Geometría fractal podemos considerar un par de objetos (M, N) de tal forma que:

$$M = h_r(N) \text{ y } M = \cup_{i=1}^{i=n} g_i(N) \quad [1]$$

(o sea, M es homotético a N por una homotecia h_r de radio r) donde $g_i(N)$ es un desplazamiento de N –en [1] la unión es disjunta–. Entonces se dice que M posee estructura homotética, que es auto-similar, y su dimensión homotética consiste en [2].

$$H(M) = \log_2(n) \quad [2]$$

En realidad los objetos homotéticos son casos particulares de los denominados auto-similares, los cuales son la unión de semejanzas contractivas, con ratios no necesariamente iguales, del objeto global. Ahora bien, dado que nuestros objetos de estudio –imágenes arquitectónicas– no son objetos homotéticos, aquí no insistimos en este tema.

Además, el objeto M posee su dimensión topológica $T(M)$; donde $T(M)=1, 2$ o 3 si M una línea, una superficie o un cuerpo tridimensional, respectivamente.

Aunque el objeto M posea estructura homotética, si $H(M)=T(M)$ entonces se dice que M es objeto homotético no fractal. Por ejemplo: si M es un segmento entonces $H(M)=T(M)=1$ con $n=r$; si M es el interior de un cuadrado entonces $H(M)=T(M)=2$ con $n=4$ y $r=2$; si M es el interior de un cubo entonces $H(M)=T(M)=3$ con $n=8$ y $r=2$. Pero, cuando M posee estructura homotética y además $H(M) \neq T(M)$ se dice que el objeto homotético M es fractal. Por ejemplo: si M es la línea de Koch entonces se tiene que $H(M)=1,26 \neq 1=T(M)$ con $n=4$ y $r=3$; si M es el triángulo de Sierpinski entonces $H(M)=1,58 \neq 1=T(M)$ con $n=3$ y $r=2$; si M es el tetraedro de Sierpinski entonces resulta que $H(M)=2,32 \neq 1=T(M)$ con $n=5$ y $r=2$ (Figura 3). El lector puede encontrar estos ejemplos clásicos fácilmente en línea (25) y en los libros (22) y (26).

Sin embargo, en general los objetos M no tienen estructura homotética (ni auto-similar), y por consiguiente no poseen dimensión homotética. A pesar de esta consideración, existe una generalización de la dimensión homotética. Esta generalización $D(M)$ es la llamada dimensión de Hausdorff-Besicovich de M. Y si M, con o sin estructura homotética, verifica que $D(M) \neq T(M)$ entonces a M se le llama objeto fractal.

La definición de $D(M)$ usa conceptos matemáticos que están fuera del ánimo y objetivo del presente trabajo. Así, el cálculo de $D(M)$ lo substituiremos por otro cálculo (M) el cual se trata de una cota superior de $D(M)$. Esta cota, $(M) \geq D(M)$, es a veces llamada dimensión de Minkowski-Bouligand de M, pero en general es llamada dimensión fractal superior de M.

El objeto M puede ser fractal o no; pero, independientemente de esta condición, resulta que (M) ofrece una medida de su irregularidad, capacidad de ocupar espacio y escabrosidad.

Para entender este trabajo, no es necesario que el lector conozca concretamente en qué consiste el cálculo que se ha de realizar para determinar (M); sin embargo, a fin de dotar de completitud este artículo explicamos que: al calcular (M) se consideran mallas del espacio formadas por cuadrados, la dimensión de la arista de los mismos es $=2^{-n}$; después, al ir variando las mallas con la dimensión de la arista, se procede al cálculo del límite [3], el cual es la dimensión fractal superior, donde es el número de cuadrados intersecados en cada malla por M.

$$\bar{F}(M) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(s_n)}{\ln(2^n)} \quad [3]$$

En este estudio M será siempre una imagen pixelada, objeto no fractal, al cual le aplicaremos el concepto de medida de escabrosidad. Esta medida la conseguiremos, como veremos más adelante, extrapolando el cálculo teórico [3] sobre la imagen. A esta medida de escabrosidad de las imágenes M la llamaremos simplemente dimensión fractal de M, F(M). Aquellas imágenes M que posean dimensión fractal tal que $1,1 \leq F(M) \leq 1,5$ mostrarán poca capacidad de ocupar espacio, mientras que las que la posean tal que $1,5 \leq F(M) \leq 1,9$ exhibirán alta capacidad. La diferencia de escabrosidad entre imágenes no es distinguible a simple vista si por ejemplo las dimensiones de las mismas se encuentran en un intervalo pequeño como $1,21 \leq F(M) \leq 1,25$ o como $1,81 \leq F(M) \leq 1,86$ –pocas centésimas de separación–. Sin embargo, a simple vista con cierto entrenamiento, sí pueden distinguirse imágenes que tengan dimensiones fractales 1,1, 1,2, 1,3, ..., 1,8 y 1,9, reparadamente –décimas de separación–. Una F(M) cercana a 1,5 confirma que la capacidad de ocupar espacio de la imagen es media.

2.2. Método de cálculo

Insistimos que el lector no requiere, para comprender el presente trabajo, conocer el proceso del cálculo de la dimensión fractal –quien no esté interesado puede saltarse esta sección sin perder el hilo del trabajo–. De todas formas, plasmamos aquí el método de cálculo para no dejar incompleto el artículo, y para aquellos lectores interesados en el mismo. Así, pasamos a hacer un breve resumen destinado a los lectores interesados no especialistas y aplicado a un ejemplo arquitectónico. El ejemplo se muestra en la Figura 4 y consiste en la sección de la columna de la Catedral de Chartres (es objeto no fractal pero que posee su dimensión fractal –ver sección 2.1–).

Es claro que las imágenes, pixeladas o no, no tienen estructura homotética ni son fractales, y no se les puede hacer el cálculo matemático-teórico del límite [3] anteriormente descrito de la dimensión fractal (M), pues se requeriría un proceso de cálculo infinito. Nuestros objetos de estudio M son imágenes pixeladas, veamos entonces como generamos su medida de escabrosidad.

A fin de garantizar un buen control de los cálculos y resultados correctos, conviene crear un programa propio el cual poder controlar totalmente y poder modificar para conseguir la garantía de corrección; cosa que nosotros hemos hecho.

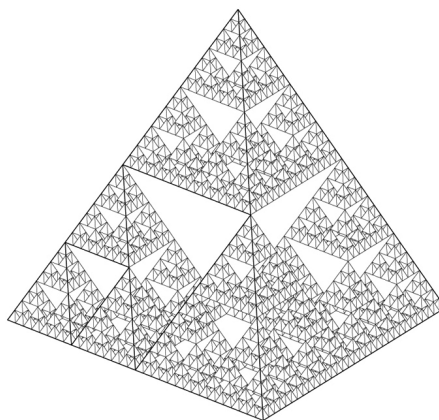
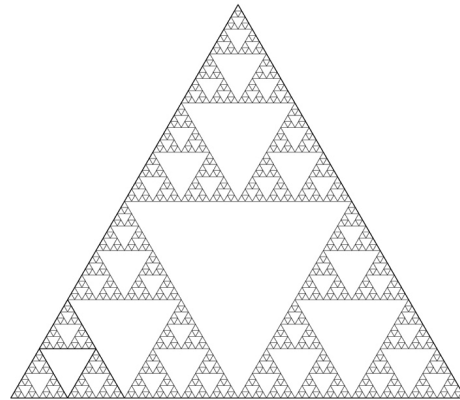
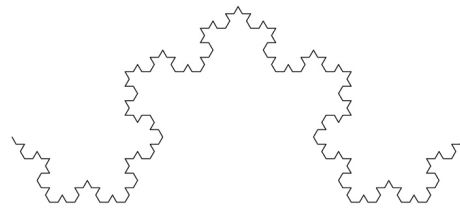


Figura 3. El dibujo superior corresponde a la línea de Koch ($H(M) = 1,26 \neq 1 = T(M)$ con $n=4$ y $r=3$); el dibujo del medio corresponde al triángulo de Sierpinski ($H(M) = 1,58 \neq 1 = T(M)$ con $n=3$ y $r=2$); y finalmente el tetraedro de Sierpinski ($H(M) = 2,32 \neq 1 = T(M)$ con $n=5$ y $r=2$).

Seguidamente, dada una imagen M, describimos qué proceso ha de generar ese programa informático –como hemos dicho el lector puede saltarse esta sección–.

Dada la imagen M, primero se procede a convertir la imagen en un fichero de imagen digital de blanco y negro en formato que el programa pueda leer y trabajar con él. Este fichero posee un tamaño de $1024 \times v$, o sea 1024 píxeles en horizontal y la cantidad de v píxeles en vertical. Entonces (Figura 4), se procede a generar una malla de cuadrados, que hemos llamado g_5 con $32 \times h_5$ cajas cuadradas cuya dimensión de asista es $a_5 = 1024 \times 2^{-5} = 32$ píxeles ($32 \times 32 = 1024$ píxeles), y se aplica tal malla sobre la imagen. Se calcula entonces el logaritmo neperiano $\ln(s_5)$ donde s_5 es el número de cajas de g_5 con píxeles negros. En la Figura 4 mostramos un ejemplo con la proyección vertical de la columna de Chartres. Seguidamente se repite varias veces el proceso con otras mallas cuadradas g_6 , g_7 y g_8 sobre la imagen con $64 \times h_6$, $128 \times h_7$, $256 \times h_8$ cajas cuadradas, respectivamente. La dimensión de las aristas es

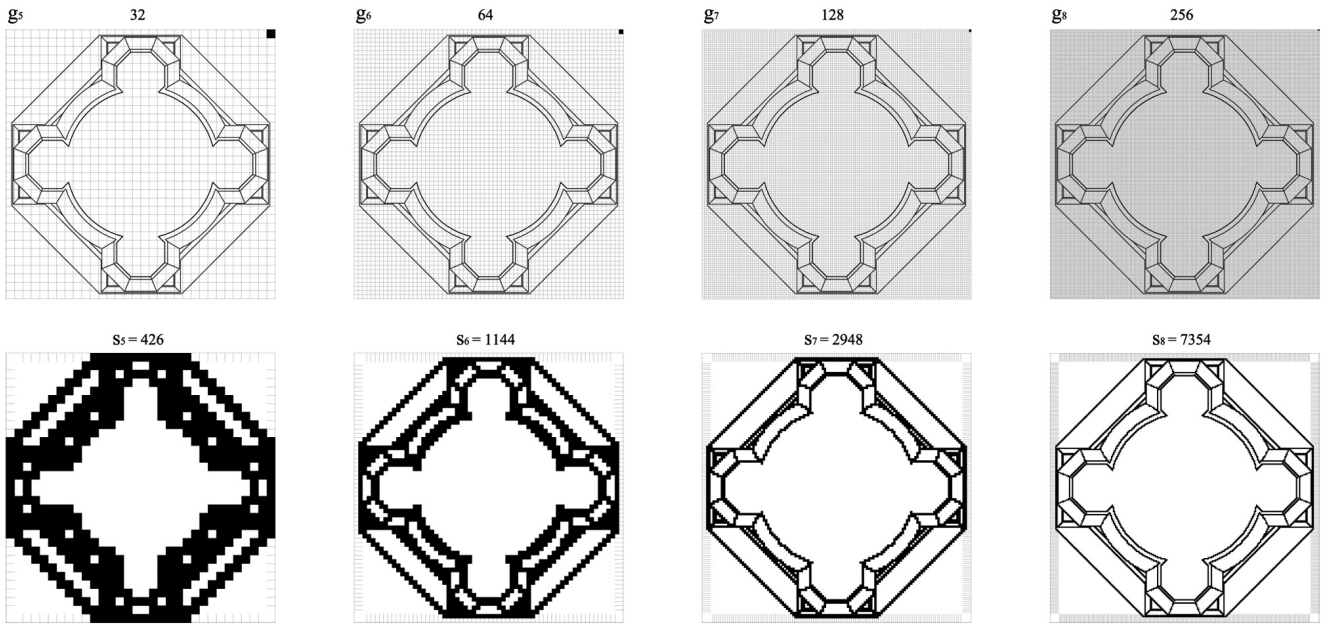


Figura 4. Mallas cuadradas g_5, g_6, g_7, g_8 y vectores $(h_5, h_6, h_7, h_8) = (31, 63, 127, 254)$, $(s_5, s_6, s_7, s_8) = (426, 1144, 2948, 7354)$ en el cálculo de la dimensión fractal para la sección de la columna de la Catedral de Chartres.

$a_6=1024 \times 2^{-6}=16$ ($64 \times 16 = 1024$ píxeles), $a_7=1024 \times 2^{-7}=8$ ($186 \times 8 = 1024$ píxeles) y $a_8=1024 \times 2^{-8}=4$ ($256 \times 4 = 1024$ píxeles), respectivamente (Figura 4). El uso de estas cuatro mallas es un procedimiento habitual para el cálculo en imágenes pixeladas, ya que: la malla g_8 es la más fina posible, correspondiente a [3], teniendo sus cajas puntos de frontera y puntos interiores; y cuatro mallas será suficiente, como veremos en [5], para alcanzar una buena medida de la escabrosidad de M. A continuación se procede al cálculo $\ln(s_5)$, $\ln(s_6)$ y $\ln(s_8)$ donde s_5, s_6, s_8 son las cantidades de cajas con píxeles negros en cada malla g_5, g_6 y g_8 , respectivamente. Por ejemplo, en la Tabla 1 hemos colocado los datos de la Figura 4 Y: $(h_5, h_6, h_7, h_8)=(31, 63, 127, 254)$, $(s_5, s_6, s_7, s_8)=(426, 1144, 2948, 7354)$. Tabla 1.

Como resultado del proceso anterior se obtienen cuatro puntos de coordenadas $(\ln(2^5), \ln(s_5))$, $(\ln(2^6), \ln(s_6))$, $(\ln(2^7), \ln(s_7))$, $(\ln(2^8), \ln(s_8))$ de una gráfica logarítmica $\ln-\ln$. Podemos visualizar en la Figura 5, los cuatro puntos de la gráfica $\ln-\ln$ que se obtienen a partir de la Tabla 1.

Seguidamente, el programa ha de proceder a calcular la pendiente de la gráfica continua $\ln-\ln$ en el punto $(\ln(2^8), \ln(s_8))$, la cual es la medida deseada de $F(M)$; para ver que esta afirmación es cierta puede considerarse [4] y usarse la regla de l'Hôpital. A fin de proceder al cálculo de esa pendiente, el programa implementa la fórmula clásica de cuatro puntos [5], donde, en [5], $h=\ln 2$ y $y_i=\ln(s_{5+i})$. Entonces, el resultado final dado por el programa es una buena medida de $F(M)$. En el ejemplo de la dimensión fractal de la Figura 4 se obtiene, usando [5] y la Tabla 1, que $F(M) \approx 1,30$.

$$\ln(2^n) = x, \ln(S_n) = f(x), \frac{\ln(S_n)}{\ln(2^n)} = \frac{f(x)}{x} \quad [4]$$

$$y'_3 \approx \frac{1}{6h} (-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) = f \quad [5]$$

2.3. MÉTODO DE TRABAJO

El primer paso de nuestra investigación ha sido recopilar la máxima documentación gráfica de las distintas catedrales de estudio. Las principales fuentes de información han sido: cada una de las Archidiócesis de las respectivas catedrales -damos las gracias a las mismas-, que nos han ofrecido la posibilidad de tener en nuestras manos una especial documentación gráfica clara y exacta; además el contacto cercano de alguna compañía de edificación -damos las gracias a CPA Conservación del Patrimonio Artístico- que ha realizado trabajos de rehabilitación y conservación de algunas catedrales que centramos nuestro estudio; a los arquitectos que se encargan de la conservación de la Catedral de Cuenca (Dr. Joaquín Ibáñez Montoya y Maryan Álvarez-Builla); el Archivo del Colegio de Arquitectos de Catalunya; y la Biblioteca de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona de la que hemos obtenido monografías de gran interés ilustrativo que han permitido completar el estudio.

Toda la documentación obtenida durante el periodo de búsqueda la hemos redibujado con el programa AutoCad con criterios gráficos de representación homogéneos con el fin de dotar el estudio de objetividad. Esto ha sido ineludible porque la información se encuentra con estilos diferentes y ge-

Tabla 1.

g_n	a_n	h_n	s_n	$\ln(2^n)$	$\ln(s_n)$
g^5	32	31	426	$\ln(2^5)$	$\ln(426)$
g^6	16	63	1144	$\ln(2^6)$	$\ln(1144)$
g^7	8	127	2948	$\ln(2^7)$	$\ln(2948)$
g^8	4	254	7354	$\ln(2^8)$	$\ln(7354)$

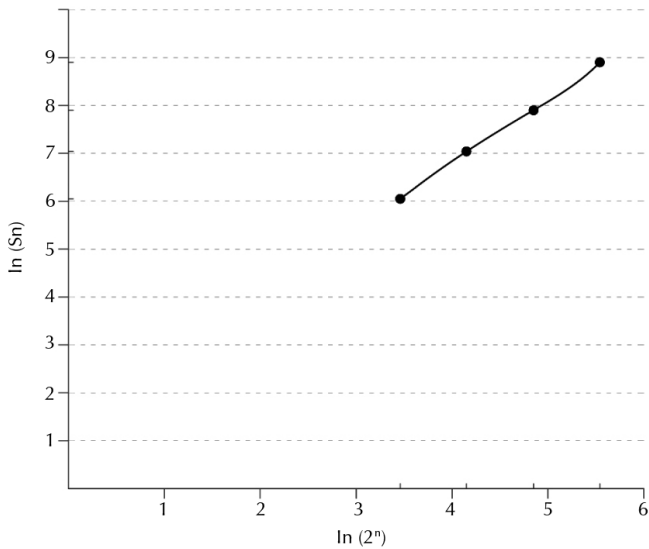


Figura 5. Gráfica continua ln-ln obtenida a partir de la Tabla 1 para el ejemplo de la sección de la columna de Chartres.

neralmente con muy baja y poco óptima resolución necesaria para poder aplicarle los cálculos con relevancia.

Así, para establecer la dimensión fractal de la Arquitectura Gótica Española establecemos los tres cortes básicos de la estructura de las catedrales eliminando ornamentación: la planta, el alzado principal y la sección transversal de uno de los módulos de la nave central. Y sobre estos cortes procedemos a realizar los correspondientes cálculos matemáticos; en la Figura 6 mostramos el nivel de detalle del redibujado que hemos realizado de estas secciones básicas, y después mostraremos de forma general, en reducido tamaño para no exceder el artículo, los redibujados creados de estas secciones básicas.

Hemos seguido estrictamente unos trazos de dibujo concretos, destacando las líneas de planta, fachada y sección que mejor representan la geometría de estas partes del edificio. Este redibujado, como hemos dicho, es ineludible puesto que la documentación obtenida siempre está formada por dibujos o fotografías con sombras, manchas, colores, defectos, trazos a mano alzada, etc; o sea todos los documentos gráficos que pueden encontrarse muestran «ruido» que obliga necesariamente a rehacer todos y cada uno de los dibujos presentados en este artículo.

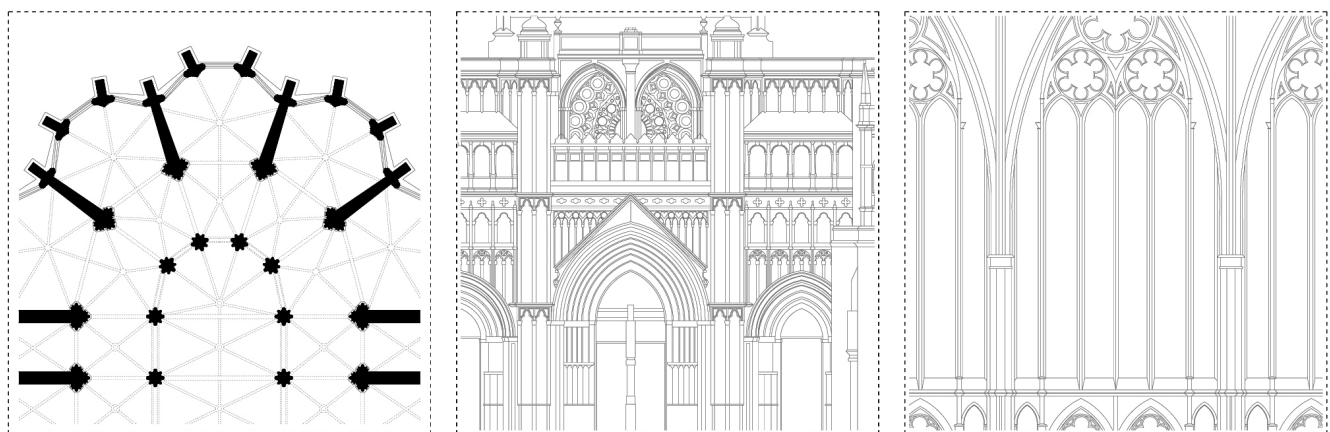


Figura 6. Nivel de detalle del redibujado. Planta correspondiente al deambulatorio de la Catedral de Burgos. Detalle del alzado central correspondiente a la fachada principal de la Catedral de Toledo. Detalle derecho correspondiente a la sección transversal de la nave de la Catedral de León.

Hemos de resaltar tres aspectos: por una parte, en el caso de la Catedral de Palma de Mallorca sólo introducimos en el análisis su planta y su sección, ya que la fachada actual es de un estilo neogótico que no sigue la filosofía y espíritu del gótico original y distorsionaría el cálculo con el resto de documentos góticos. Por otra parte, en la Catedral de Barcelona, la fachada principal sufrió varios cambios a lo largo de su historia hasta que en 1882 se decidió realizar un concurso para definir la fachada. La propuesta ganadora fue del arquitecto Josep Oriol Mestres que siguió los trazos originales de diseño. En este caso sí que hemos tenido en cuenta este documento ya que sí conserva el espíritu gótico original y no alterará la uniformidad en el cálculo gótico. Finalmente, sucede algo similar en la fachada de la Catedral de Cuenca. A pesar de ser una fachada neogótica el arquitecto Vicente Lampérez y Romea restauró el conjunto pensando cómo tendría que ser la fachada original siguiendo las teorías de Viollet-le-Duc, dado que sólo se disponía de un dibujo general de la ciudad de Cuenca del año 1565 realizado por Antón Van den Wyngaerde donde sobresale por encima del resto de edificaciones las líneas generales de la fachada primitiva. Por estos motivos, al igual que la fachada de Barcelona, consideramos que el diseño de la fachada de la Catedral de Cuenca es adecuada para realizar los cálculos.

Entonces, hemos introducido los 26 documentos gráficos en el programa diseñado para calcular la dimensión fractal, y aplicamos el cálculo.

3. DIBUJO, DESCRIPCIÓN Y CÁLCULO

3.1. Catedral de Ávila (27) (28) (29) (30) (31)

Cronología: 1091-1107. (27)

Autoría: Casandro, Florín de Pituerga y Alvar García. Pero lo cierto es que la primitiva traza del templo no parece anterior a los últimos años del siglo XII o principios del XIII, atribuyéndose su levantamiento a un maestro llamado Fruchel del que no se sabe apenas nada. (27)

RESULTADOS DEL CÁLCULO:

En la Figura 7 mostramos las imágenes de la planta, el alzado y la sección central. Los vectores (s_5, s_6, s_7, s_8) que obtenemos en el cálculo son:

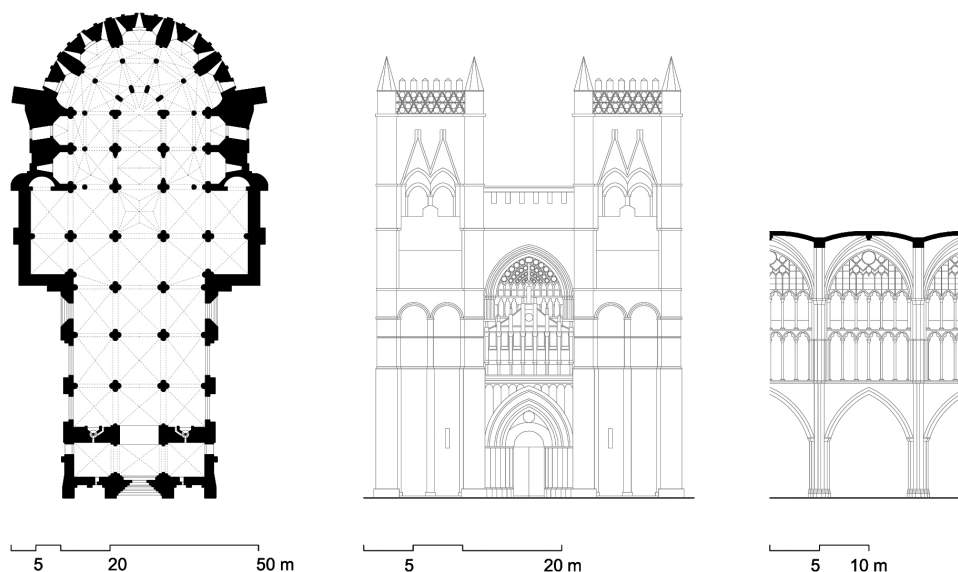


Figura 7. Planta, alzado principal y sección transversal de uno de los módulos de la nave principal de la Catedral de Ávila.

- Planta: (926, 2973, 8933, 26716).
- Alzado: (374, 1042, 3006, 8267).
- Sección central: (904, 2963, 8639, 23855).

En consecuencia, al finalizar el cálculo se obtienen las dimensiones fractales, las cuales expresadas en aproximación a dos dígitos decimales son las siguientes: Planta: 1,61 ; Alzado: 1,52 ; Sección central: 1,46.

3.2. Catedral de Cuenca (12) (13) (32) (33)

- Cronología: La primera mención documental de las obras data del año 1194. (13)
- Autoría: Autor anónimo. (13)

RESULTADOS DEL CÁLCULO:

En la Figura 8 mostramos las imágenes de la planta, el alzado y la sección central. Los vectores (s_5, s_6, s_7, s_8) que obtenemos en el cálculo son:

- Planta: (1215, 4228, 12991, 38829).
- Alzado: (222, 815, 2834, 9612).
- Sección central: (646, 2101, 6563, 19387).

En consecuencia, al finalizar el cálculo se obtienen las dimensiones fractales, las cuales expresadas en aproximación a dos dígitos decimales son las siguientes: Planta: 1,61; Alzado: 1,76; Sección central: 1,51.

3.3. Catedral de vitoria (34) (35) (36)

- Cronología: Principios del siglo XIII.
- Autoría: Autor anónimo.

RESULTADOS DEL CÁLCULO:

En la Figura 9 mostramos las imágenes de la planta, el alzado y la sección central. Los vectores (s_5, s_6, s_7, s_8) que obtenemos en el cálculo son:

- Planta: (527, 1712, 5056, 15307).

- Alzado: (144, 458, 1381, 4174).
- Sección central: (423, 1416, 4490, 12907).

En consecuencia, al finalizar el cálculo se obtienen las dimensiones fractales, las cuales expresadas en aproximación a dos dígitos decimales son las siguientes: Planta: 1,67; Alzado: 1,62; Sección central: 1,43.

3.4. Catedral de Burgos (9) (10) (37) (38) (39)

- Cronología: 1222-1260.
- Autoría: Autor/es anónimos, Maestro Enrique y Juan Pérez. (13).

RESULTADOS DEL CÁLCULO:

En la Figura 10 mostramos las imágenes de la planta, el alzado y la sección central. Los vectores (s_5, s_6, s_7, s_8) que obtenemos en el cálculo son:

- Planta: (957, 2971, 8304, 23896).
- Alzado: (481, 1651, 5413, 17035).
- Sección central: (624, 2121, 6121, 16041).

En consecuencia, al finalizar el cálculo se obtienen las dimensiones fractales, las cuales expresadas en aproximación a dos dígitos decimales son las siguientes: Planta: 1,6; Alzado: 1,63; Sección central: 1,34.

3.5. Catedral de Toledo (40) (41) (42)

- Cronología: 1224-1493.
- Autoría: Maestro cantero Martín trabajó desde 1224 hasta 1234 y Pedro Pérez hasta el 1291. Los estudios del historiador Guido Conrad señalan a otro maestro más entre ellos, aunque su nombre es desconocido. (40)

RESULTADOS DEL CÁLCULO:

En la Figura 11 mostramos las imágenes de la planta, el alzado y la sección central. Los vectores (s_5, s_6, s_7, s_8) que obtenemos en el cálculo son:

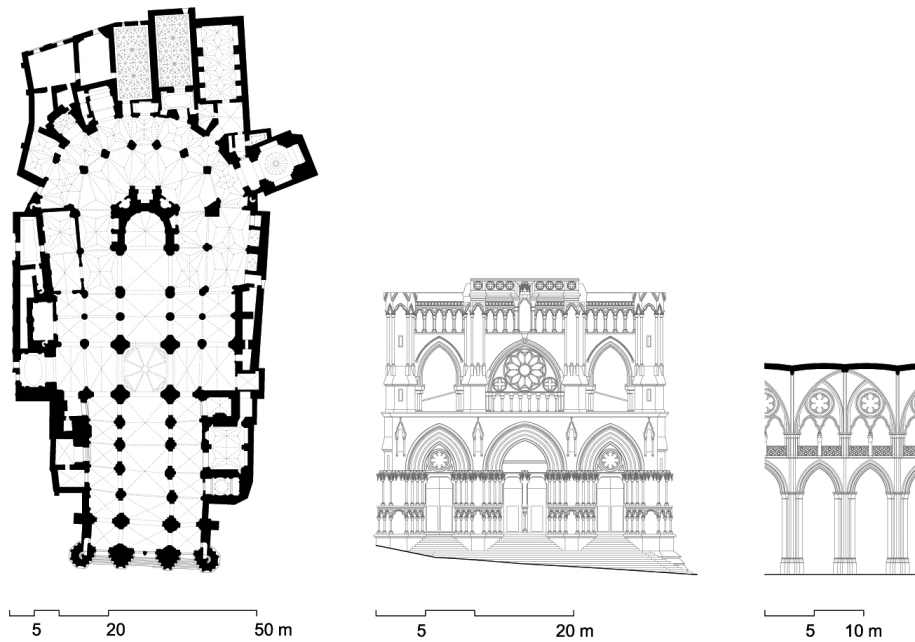


Figura 8. Planta, alzado principal y sección transversal de uno de los módulos de la nave principal de la Catedral de Cuenca.

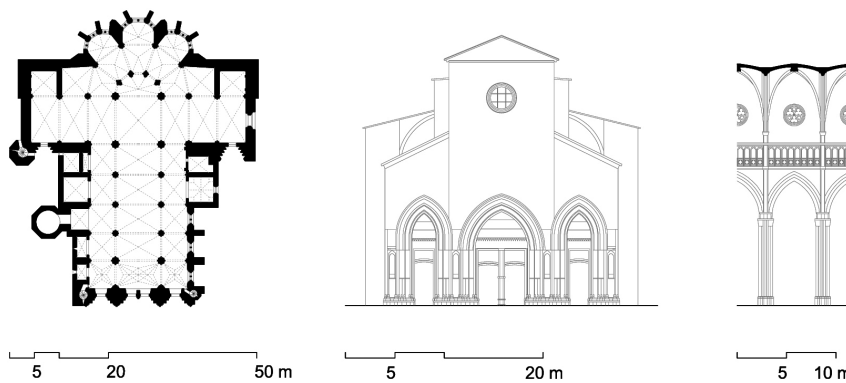


Figura 9. Planta, alzado principal y sección transversal de uno de los módulos de la nave principal de la Catedral de Vitoria.

- Planta: (1714, 5503, 15452, 43819).
- Alzado: (610, 2141, 7229, 22812).
- Sección central: (914, 2831, 7731, 21087).

En consecuencia, al finalizar el cálculo se obtienen las dimensiones fractales, las cuales expresadas en aproximación a dos dígitos decimales son las siguientes: Planta: 1,58; Alzado: 1,59; Sección central: 1,51.

3.6. Catedral de Palma de Mallorca (17) (43) (44) (45)

- Cronología: 1229-1346.
- Autoría: El primer arquitecto del proyecto fue Ponç des Coll, posteriormente le siguió en el cargo Jaime Fabre.

RESULTADOS DEL CÁLCULO:

En la Figura 12 mostramos la fachada primitiva no considerada para incorporar en el estudio. En la Figura 13 mostramos las imágenes de la planta y la sección central. Los vectores (s_5, s_6, s_7, s_8) que obtenemos en el cálculo son:

- Planta: (1362, 4384, 12924, 36624).
- Sección central: (1060, 2842, 7180, 18622).

En consecuencia, al finalizar el cálculo se obtienen las dimensiones fractales, las cuales expresadas en aproximación a dos dígitos decimales son las siguientes: Planta: 1,48; Sección central: 1,43.

3.7. Catedral de León (13) (46) (47) (48) (49) (50)

- Cronología: ca.1230. (46) (47)
- Autoría: Maestro Simón, posteriormente sabemos que trabajó allí el Maestro Enrique y finalmente el Maestro Pedro Pérez.

RESULTADOS DEL CÁLCULO:

En la Figura 14 mostramos las imágenes de la planta, el alzado y la sección central. Los vectores (s_5, s_6, s_7, s_8) que obtenemos en el cálculo son:

- Planta: (891, 2728, 7791, 23397).
- Alzado: (619, 2030, 6219, 17869).
- Sección central: (872, 2783, 8775, 25462).

En consecuencia, al finalizar el cálculo se obtienen las dimensiones fractales, las cuales expresadas en aproximación a dos

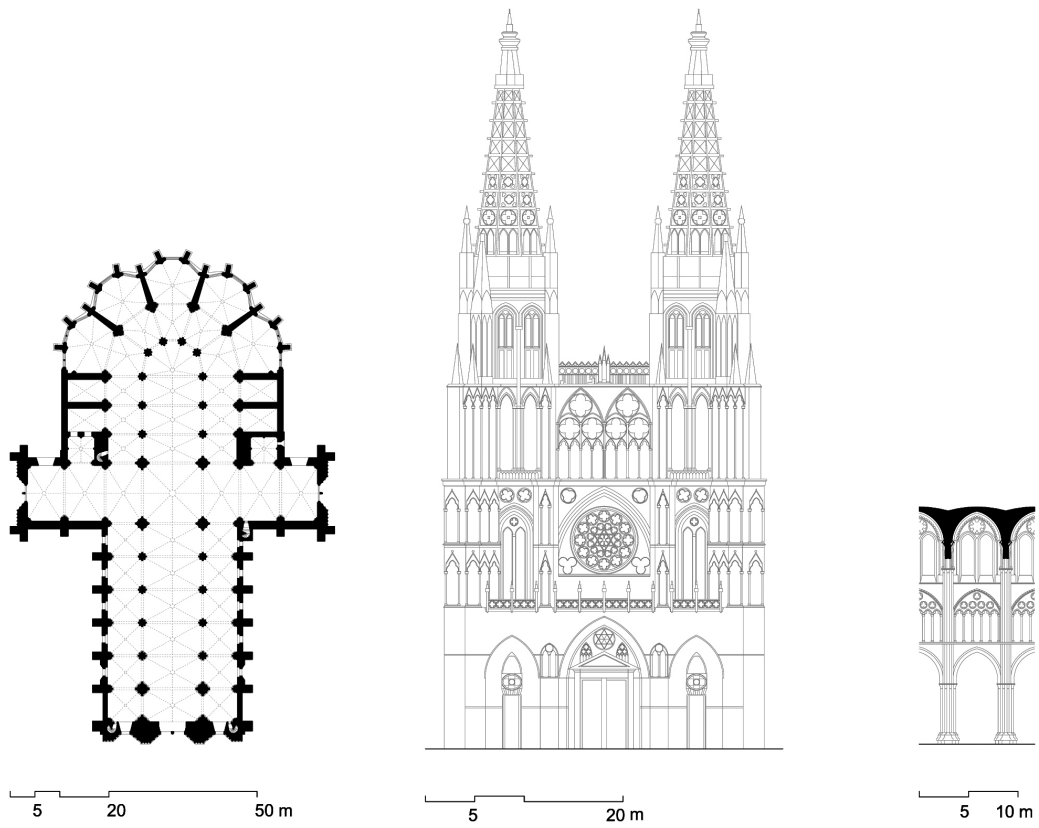


Figura 10. Planta, alzado principal y sección transversal de uno de los módulos de la nave principal de la Catedral de Burgos.

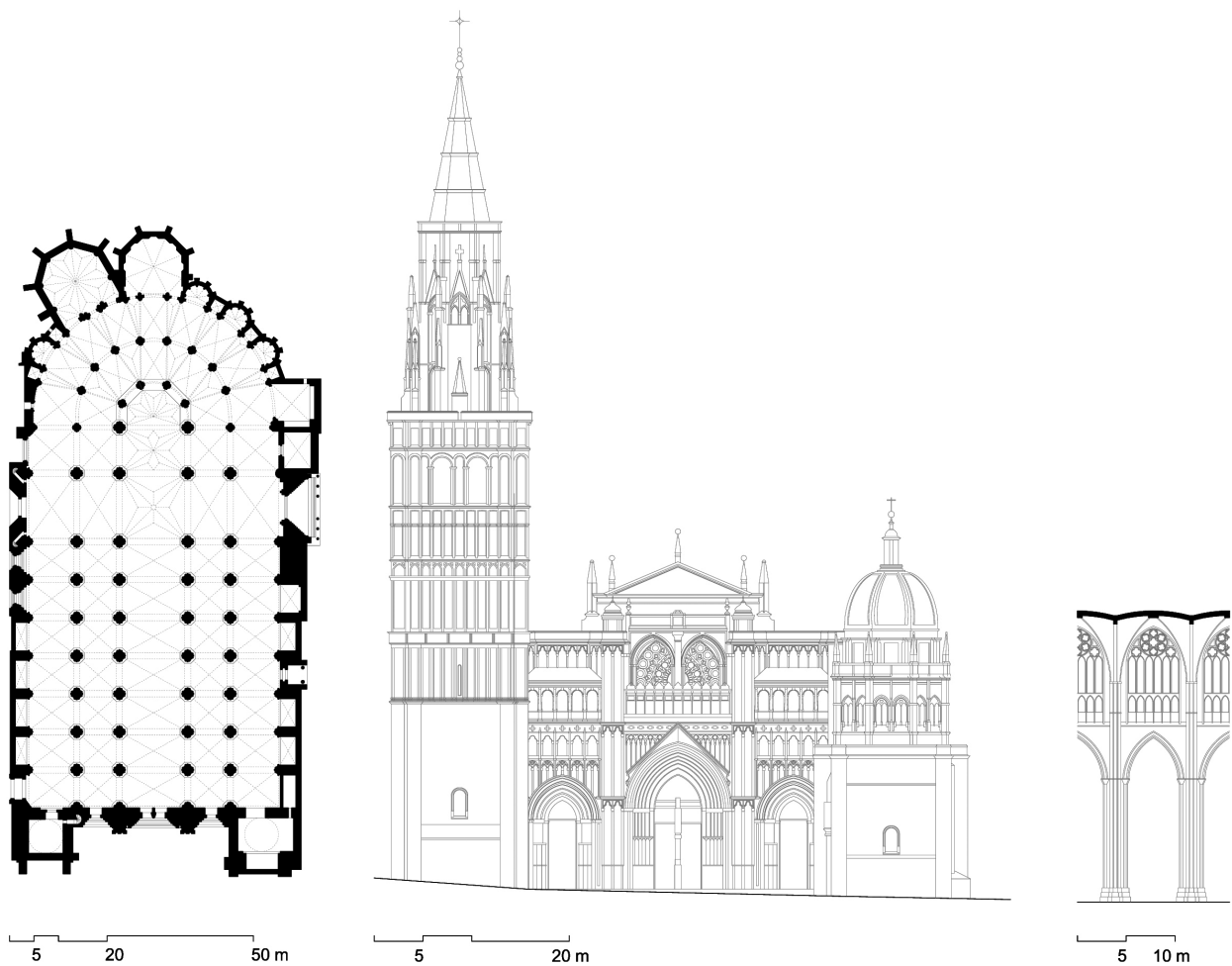


Figura 11. Planta, alzado principal y sección transversal de uno de los módulos de la nave principal de la Catedral de Toledo.

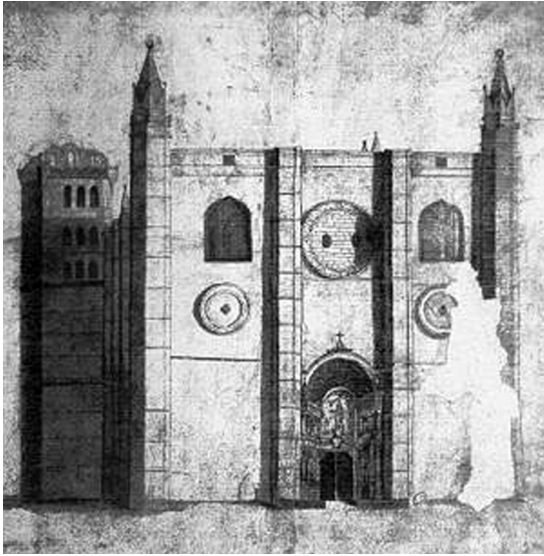


Figura 12. La fachada primitiva derrumbada por el terremoto de 1851. Elevación con cuatro torres octogonales al igual que seguían el alineamiento de las columnas de las naves. Estas torres no tenían agujas y terminaban horizontalmente como las torres de la fachada de la Catedral de Barcelona. Esta composición formaba un gran rectángulo dividido por dos impostas paralelas. La estructura primitiva, inspirada en la Llotja de Sagrera, fue imitada por muchas iglesias parroquiales –como la de Santo Nicolau– y conventos de todo la isla de Mallorca durante el s. XVI. Este documento no ha sido redibujado ya que se trata de un dibujo a carboncillo de la fachada primitiva y no dotaría al estudio de la misma precisión que ofrecen el resto de dibujos.

dígitos decimales son las siguientes: Planta: 1,68; Alzado: 1,49; Sección central: 1,44.

3.8. Catedral de Barcelona (17) (51) (52) (53) (54)

- Cronología: 1298-1420.
- Autoría: Maestro J.Fabre entre 1338-1358. Continuó Bernat Roca. Acontinuación Pere Viader hasta el 1397. Arnau

Bargués hasta el 1407. Jaume Solá hasta el 1412. Siguió Andrés Escuder hasta el 1463. La fachada la trazó Carles Galtés de Ruan en 1408.

RESULTADOS DEL CÁLCULO:

En la Figura 15 mostramos las imágenes de la planta, el alzado y la sección central. Los vectores (s_5, s_6, s_7, s_8) que obtenemos en el cálculo son:

- Planta: (873, 2847, 8520, 24181).
- Alzado: (421, 1549, 5641, 18850).
- Sección central: (666, 2087, 5558, 1411).

En consecuencia, al finalizar el cálculo se obtienen las dimensiones fractales, las cuales expresadas en aproximación a dos dígitos decimales son las siguientes: Planta: 1,48; Alzado: 1,64; Sección central: 1,36.

3.9. Catedral de Gerona (17) (44) (45) (55) (56) (57)

- Cronología: 1312 - siglo XVI
- Autoría: Enrique de Narbona se encargó de la cabecera y las capillas. El relevo fue para Jaime Faverán, Guillermo Cors, Francisco Saplana y Pedro Sacoma que dio fin a la cabecera en 1347. El arquitecto Guillermo Monry siguió el tramo del coro. Lo sucedió Guillermo Bofill para la construcción de la nave central. El último tramo se edificó a cargo del maestro José Ferrer.

RESULTADOS DEL CÁLCULO:

En la Figura 16 mostramos las imágenes de la planta, el alzado y la sección central. Los vectores (s_5, s_6, s_7, s_8) que obtenemos en el cálculo son:

- Planta: (636, 2093, 6452, 18686).
- Alzado: (425, 1334, 4021, 11168).
- Sección central: (958, 3048, 9202, 25504).

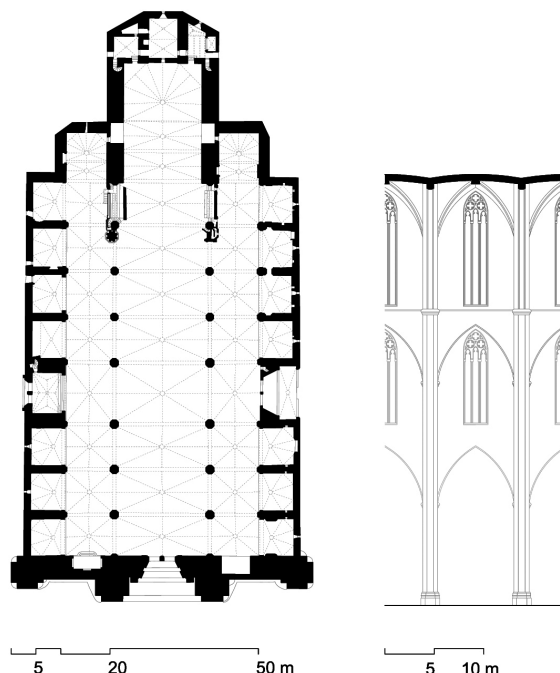


Figura 13. Planta y sección transversal de la nave principal de la Catedral de Palma de Mallorca.

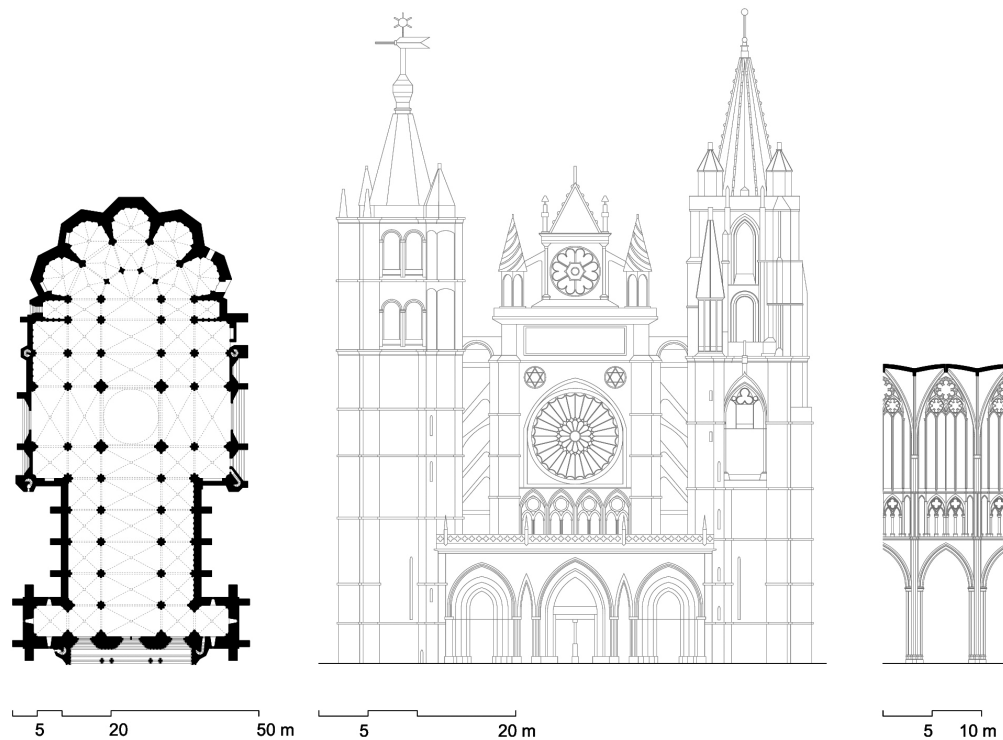


Figura 14. Planta, alzado principal y sección transversal de uno de los módulos de la nave principal de la Catedral de León.

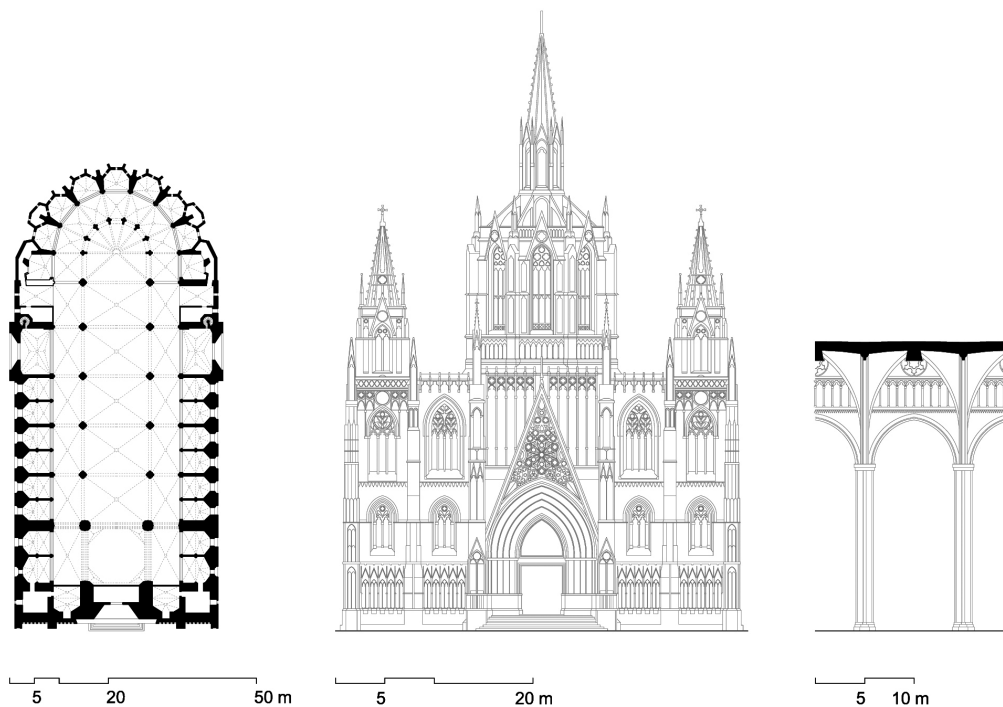


Figura 15. Planta, alzado principal y sección transversal de uno de los módulos de la nave principal de la Catedral de Barcelona.

En consecuencia, al finalizar el cálculo se obtienen las dimensiones fractales, las cuales expresadas en aproximación a dos dígitos decimales son las siguientes: Planta: 1,49; Alzado: 1,39; Sección central: 1,39.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Con el estudio anteriormente descrito del presente trabajo, hemos generado una medida de escabrosidad –que llamamos dimensión fractal–, y con ella podemos encontrar las medias

de las dimensiones fractales planas de las Catedrales de Ávila, Cuenca, Vitoria, Burgos, Toledo, Mallorca, León, Gerona y Barcelona a través de sus tres secciones básicas de estructura: planta, alzado y sección central; así como las medias de las nueve plantas, ocho alzados y nueve secciones centrales. Presentamos los resultados de tales medias, expresados con aproximación decimal de dos dígitos, en la Tabla 2. Se ha descartado la media de Mallorca al no disponer de sus tres secciones del gótico original, pero sí usamos sus datos para las medias de la planta y la sección central.

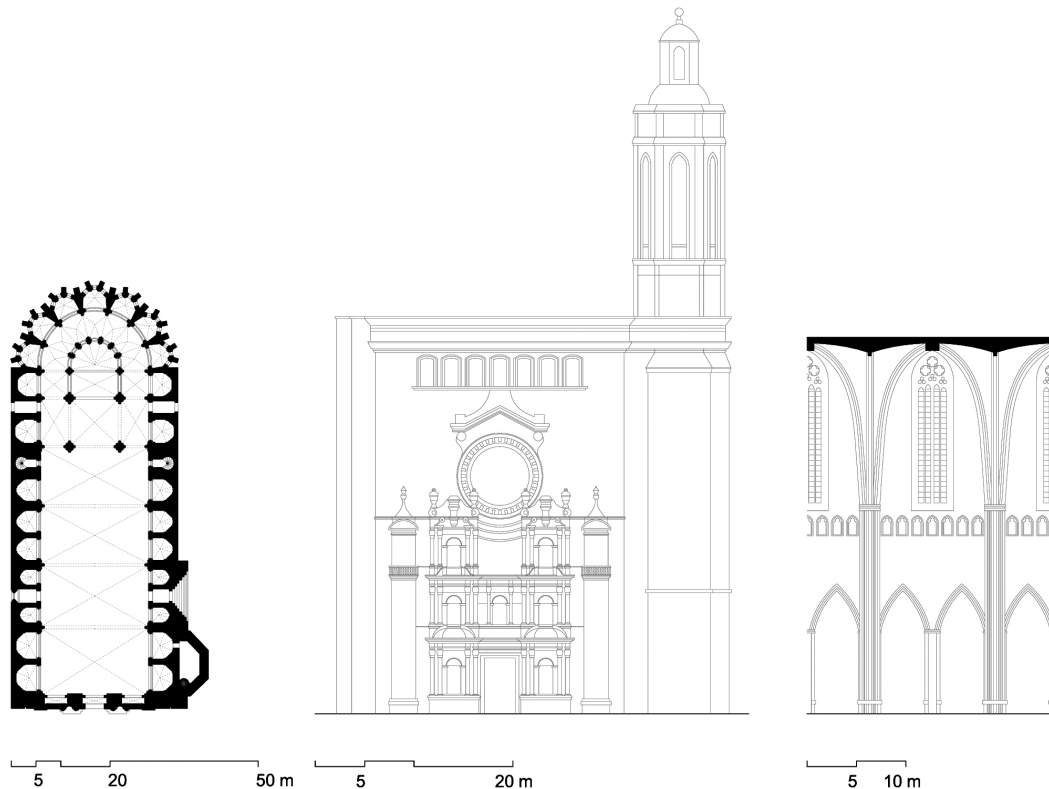


Figura 16. Planta, alzado principal y sección transversal de uno de los módulos de la nave principal de la Catedral de Gerona.

Tabla 2.

ÁVILA	CUENCA	VITORIA	BURGOS	TOLEDO	LEÓN	BARCELONA	GERONA	PLANTA	ALZADO	SECCIÓN
1.53	1.63	1.58	1.52	1.56	1.53	1.50	1.43	1.58	1.58	1.43

Obtenemos entonces la Media Total m , de las once medias m_i de la Tabla 2, la cual es $m \approx 1.53$.

Y se tiene que:

- 1) La desviación típica σ y variancia σ^2 de las once medias m_i , es [6] y su variancia $\sigma^2 \approx 0,003$.

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=11} \frac{(m_i - m)^2}{11}} \approx 0,05 \quad [6]$$

- 2) El coeficiente de variación de Pearson (σ/m), de las once medias, es del 4%.
- 3) Desviación típica y coeficiente de variación de Pearson de las medias de las Catedrales: 0,05 y 3% respectivamente.

En consecuencia, concluimos que las medias están altamente concentradas alrededor de la Media Total.

Examinando los resultados comprobamos que los valores de la planta pueden ser concentrados en dos grupos. Un primer grupo que recoge las catedrales situadas en la zona de levante de la Península Ibérica (Mallorca, Barcelona, Gerona; concentrada la dimensión fractal de planta entorno a la media 1,48) y un segundo grupo que engloba las edificaciones localizadas en el antiguo reino de Castilla (Burgos, Toledo, León, Ávila, Vitoria y Cuenca; concentrada la dimensión fractal de planta entorno a la media 1,63). Analizando la situación geográfica de estos dos grupos y considerando que los sismos históricos influyeron de forma radical en la construcción de

las catedrales españolas, llegamos a la consideración de que la dimensión fractal no sólo aporta una descripción geométrica si no que mantiene una estrecha relación estructural y constructiva con estas edificaciones.

Tal y como indicó Cassinello (17) la localización, según el mapa de riesgo sísmico, de cada una de las catedrales góticas españolas evidencian diferencias estructurales y constructivas –por lo tanto compositivas– dependiendo la intensidad sísmica de la zona donde están levantadas.

Según datos procedentes del Instituto Andaluz de Geofísica, entre los siglos XII-XV y a lo largo de la costa mediterránea del territorio español hubieron varios terremotos de gran intensidad sísmica. En especial en Gerona y Barcelona la intensidad, según la escala MSK, alcanzó a 9 en varias ocasiones. Este hecho explica que las circunstancias geográficas tuvieron una concordancia con los sistemas constructivos utilizados. Valorando la dimensión fractal de las catedrales de Mallorca, Barcelona y Gerona, observamos que tiene una analogía con el sistema estructural escogido para su construcción. A diferencia de las estructuras góticas situadas en zonas de bajo riesgo sísmico, como ocurre con las catedrales francesas, se tratan de unas construcciones murarias, con pocas oberturas en los muros perimetrales y donde los empujes procedentes de la nave central se contrarrestan con las capillas laterales haciendo incrementar la inercia de los muros. Mientras que las estructuras góticas francesas a nivel geométrico tienen más capacidad de ocupar espacio y repercuten en el cálculo fractal aumen-

tando su dimensión, pues siguen otros sistemas estructurales afines a las características geológicas de sus emplazamientos.

Afirmamos que la Media Total m no es un resultado aleatorio. Contrastaremos esta afirmación usando un bien conocido test, el test χ^2 de Pearson, y 8 dígitos decimales para mostrar con claridad la magnitud real de la probabilidad de que tal Media Total sea un resultado no aleatorio. Para ello, primero consideramos las 100 posibilidades de resultados de números de dos dígitos decimales entre 1 y 2, y las separamos en 20 agrupaciones de 5 en 5. Dicho de otra forma, consideramos los 20 intervalos: $I_1=[1,01; 1,05]$, $I_2=[1,06; 1,10]$,..., $I_{19}=[1,91; 1,95]$, $I_{20}=[1,96; 2]$. Aplicamos entonces el test χ^2 de Pearson con 19 grados de libertad a la siguiente Tabla 3 de contingencia.

Entonces $f_{1,i}=0$, $f_{2,i}=11$ son las frecuencias obtenidas excepto $f_{1,9}=2$, $f_{1,10}=f_{1,13}=1$, $f_{1,11}=3$, $f_{1,12}=4$, $f_{2,9}=9$, $f_{2,10}=f_{2,13}=10$, $f_{2,11}=8$, $f_{2,12}=7$; y $F_{1,i}=\frac{121}{220}$, $F_{2,i}=\frac{2299}{220}$ son las frecuencias esperadas. Con 19 grados de libertad [7] y [8], se tiene $\Gamma=119292,46199461$ y $\chi^2=47,751196$; así la probabilidad P de que la Tabla 3 sea una tabla no aleatoria es $P=0,99972137$ con [9].

$$\Gamma\left(\frac{19}{2}\right)=\int_0^\infty t^{\left(\frac{19}{2}-1\right)} e^{-t} dt = \Gamma \tag{7}$$

$$\chi^2 = \sum_{j,i=1}^{20} \frac{(F_{j,i} - f_{j,i})^2}{F_{j,i}} \tag{8}$$

$$\int_0^{\chi^2} \frac{1}{2} \Gamma^{-\frac{19}{2}} x^{\left(\frac{19}{2}-1\right)} e^{-x/2} dx = P \tag{9}$$

Hemos optado por agrupaciones de 5 en 5 ya que: a) Es una agrupación cercana a la agrupación de 1 en 1, pero alejada suficientemente para que así tenga sentido el estudio aleatorio de contingencia; b) es una agrupación muy alejada del total de 100 en 100, pues cuanto más grande es el número de agrupación entonces más grande, en el caso de la Tabla 3, es la probabilidad de ser no aleatoria; c) podríamos haber agrupado de 3 en 3 (sin llegar aún a que no tenga sentido el estudio aleatorio) y la probabilidad de no ser aleatoria es también mayor. Por ello, con b) y c), hemos optado por agrupar de 5 en 5 ya que si aumentáramos o disminuyéramos se podría criticar que buscamos el resultado no aleatorio más impactante. No se pretende impactar, sólo pretendemos mostrar la no aleatoriedad de la Tabla 2 de resultados.

Por tanto (con la secciones «Dimensión fractal y método», «Dibujo, descripción y cálculo» y «Resultados y discusión») los resultados son obtenidos con un mecanismo matemático y objetivo. Además, estos resultados están altamente concentrados alrededor del parámetro central de medida de escabrosidad que hemos generado –le hemos llamado Media Total $m=1,53-$, y la probabilidad de que se traten de resultados aleatorios es despreciable. En consecuencia, afirmamos que el parámetro Media Total obtenido así como la separación por zonas sísmicas son características no aleatorias de estas Catedrales.

4.1. Observación

Quisiéramos resaltar que los parámetros fractales capturan la diferencia de estilos a la par que ofrecen una medida de tal diferencia. Así en la Tabla 4 ofrecemos los resultados de los parámetros de planta, alzado y sección que se obtienen de tres construcciones singulares románicas (Iglesia de la Mare de Déu de Taüll, Iglesia de Sant Climent de Taüll, Iglesia de San Martín en Palencia), las cuales mostramos en la Figura 17.

Se observa en la tabla que:

- 1) En planta hay una diferencia del -20% del románico al gótico.
- 2) En alzado hay una diferencia del +26% del románico al gótico.
- 3) En sección hay una diferencia del +40% del románico al gótico.
- 4) Los parámetros fractales captan la diferencia constructiva en el paso de un estilo al otro.
- 5) La captura es coherente ya que: el gótico es más ornamentado (parámetros de alzado y sección) y más estilizado (parámetro de planta) que el románico.

5. CONCLUSIÓN

En las construcciones góticas la Geometría Euclídea, y en especial los ratios ϕ y π , fue usada para dotarles de estructura, proporción y belleza; sin embargo, además de los elementos euclídeos existen otras características complejas en las construcciones de las catedrales góticas: efectividad de ocupar espacio, rugosidad y escabrosidad de los detalles que constituyen sus estructuras. La mejor herramienta para describir las ofrece la Geometría Fractal a través del ratio

Tabla 3.

	I_1	...	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	...	I_{20}	Total
Media $\in I_i$	0	...	0	2	1	3	4	1	0	...	0	11
Media no $\in I_i$	11	...	11	9	10	8	7	10	11	...	11	209
Total	11	...	11	11	11	11	11	11	11	...	111	220

Tabla 4.

	Mare de Déu De Taüll	Sant Climent de Taüll	San Martín en Palencia	Media
Planta	1.88	1.77	1.70	1.78
Alzado	1.25	1.39	1.32	1.32
Sección	1.00	1.00	1.08	1.03
Media	1.38	1.39	1.37	1.38

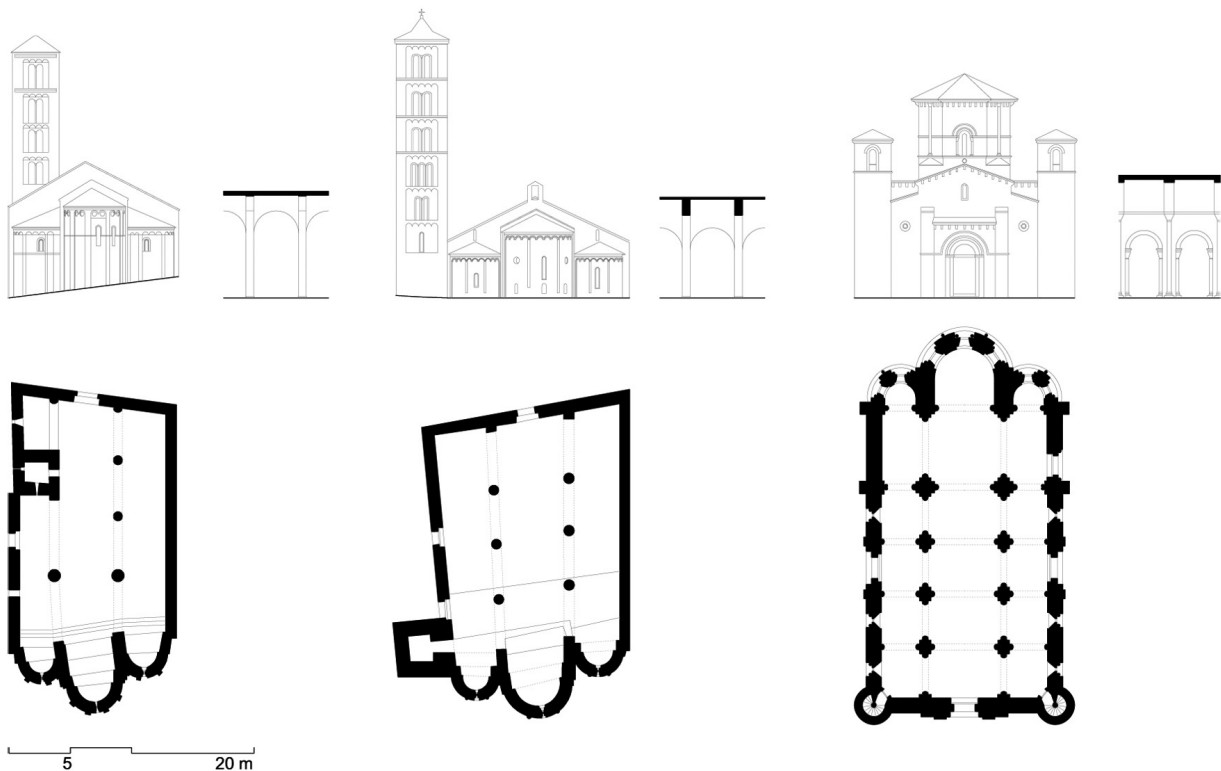


Figura 17. A la izquierda documentación gráfica referente a la Iglesia de la Mare de Déu de Taüll; en el centro documentación gráfica referente a la Iglesia de Sant Climent de Taüll; y a la derecha documentación gráfica de la Iglesia de San Martín en Palencia.

llamado «dimensión fractal». Aquí aplicamos tal concepto para generar un parámetro que sea una medida de escabrosidad de las imágenes arquitectónicas. Se trata de un parámetro geométrico, que da una proporción de este concepto; y que no es atribuible únicamente a elementos euclídeos, sino que además viene generado por el resultado arquitectónico final de estas construcciones. El parámetro de medida de escabrosidad lo generamos a partir de las secciones principales constructivas; y en especial el resultado obtenido en la sección de las plantas se observa que está relacionado con las zonas sísmicas, ello indica una relación entre el parámetro y la efectividad de la construcción.

Las nueve catedrales de estudio configuran una muestra altamente significativa del gótico español, y por tanto con ella se evitan arbitrariedades. Con esta muestra analizamos geométricamente la edificación resultante con nuevos parámetros, hasta el momento ignorados. Este proceso no trata de comparar unas catedrales con otras, ya que la autoría y las circunstancias del proceso constructivo de cada edificación fue muy particular, sino que investiga si las líneas de diseño tienen

más sentido geométrico que el conocido hasta el día de hoy y si las estructuras de estas edificaciones tienen una consonancia formal con los resultados geométricos. Analizar la geometría que ordena estas catedrales es el principal objetivo.

La geometría fractal ha sido usada para estudiar ciertos elementos de arquitectura (58) (59) (60) (61). Nunca hasta este trabajo, ha sido usada para encontrar nuevos patrones geométricos y relaciones de los mismos con la efectividad de la construcción en una de sus creaciones más relevantes.

Con el presente estudio mostramos que las Catedrales Góticas Españolas no sólo se rigen por los patrones geométricos euclídeos, sino que además poseen otro patrón característico, viene determinado por su dimensión fractal. Concluimos, con el trabajo mostrado anteriormente, que existe un patrón fractal general en las Catedrales Góticas Españolas; e igualmente hemos visto que los parámetros fractales tienen relación –además de con la estética y resultado visual final– con la efectividad de la construcción de la obra, como es la distribución en planta según las zona sísmica donde se encuentra.

REFERENCIAS

- (1) Baldellou, M. (1995). *Catedrales de Europa*. Madrid: Espasa Calpe.
- (2) Prache, A. (2000). *Cathedrals of Europe*. United States: Cornell University Press.
- (3) Schütz, B. (2008). *L'art des grandes Cathédrales*. París: Editorial Hazan.
- (4) Toman, R. (1998). *El gótico - Arquitectura, escultura y pintura*. París: Editorial Konemann.
- (5) Wilson, C. (1990). *The Gothic Cathedral*. Londres: Thames and Hudson Ltd.
- (6) H, Karge. (1999). *Die königliche Zisterzienserinnen abtei Las Huelgas de Burgos und die Aüfande der gotischen Architektur in Spanien*. Madrid: Freigang Editorial.
- (7) Lambert, É. (1990). *El arte gótico en España en los siglos XII y XIII*. Madrid: Editorial Cátedra.
- (8) Garrido, J.M. (1983). Documentación de la Catedral de Burgos. En *Fuentes medievales castellano-leonesas*, (pp.804-1183). Burgos: Ed. J.M. Garrido.

- (9) Garrido, J.M. (1983) Documentación de la Catedral de Burgos. En *Fuentes medievales castellano-leonesas*, (1184-1222). Burgos: Ed. J.M. Garrido.
- (10) Julio, G. (1947). Un arquitecto de las Huelgas de Burgos. *Revista de archivos, Bibliotecas y Museos*, pp. 47-50.
- (11) Julio, G. Reinado y diplomas de Fernando III. *Colección estudios y documentos*, 3: 1980-1986. Córdoba.
- (12) Karge, H. (1995). *La Catedral de Burgos y la arquitectura del siglo XIII en Francia y España*. Junta de Castilla y León - Consejería de Cultura y Turismo.
- (13) Palomo, G.F. (2002). *La catedral de Cuenca en el contexto de las grandes canterías catedralicias castellanas de la Baja Edad Media*. Cuenca: Diputación Provincial de Cuenca.
- (14) Franco, M. Á. (1994, 4-6 de febrero). La catedral de Toledo: Entre la tradición local y la modernidad foránea. En *Gotische Architektur in Spanien: Akten del Kolloquiums der Carl Justi-Vereinigung und des Kunstgeschicht-lichen Seminars der Universität Göttingen*, pp. 84.
- (15) Abella, P. (2011). Opus francigenum en el Iter francorum. El fecundo siglo XIII y la nueva arquitectura de Castilla (comarca Odra-Pisuerga, Burgos). *Porticum Revista d'estudis medievals*, 1(1): 72.
- (16) Alexandre, C. (1973). *Arquitectura gótica catalana*. Barcelona: Editorial Lumen.
- (17) Cassinello, M. J. (2005). Influencia de los terremotos históricos en la construcción de las Catedrales Góticas españolas. *Annali di Architettura*, 17(1): 9-20.
- (18) Bechmann, R. (1985). *Villard de Honnecourt. La pensée technique au XIIIe siècle et sa communication*. París: Picard Éditeur.
- (19) Simon, O. (1985). *La Catedral gótica*. Madrid: Alianza Editorial.
- (20) Duhem, P. (1905). *Les Origines de la Statique*. París: Bibliothèque Nationale de France.
- (21) Ackerman, J. (1949). «Ars Sine Scientia Nihil Est» Gothic Theory of Architecture at the Cathedral of Milan. *The Art Bulletin*, 31(2): 84- 111, doi: <http://dx.doi.org/10.2307/3047224>.
- (22) Falconer, K. J. (1990). *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. Chichester: Willey.
- (23) Falconer, K. J. (1997). *Techniques in Fractal Geometry*. Chichester: Willey.
- (24) Edgar, G. (1998). *Integral, probability, and fractal measures*. New York: Springer-Verlag.
- (25) Weisstein, E.W. *Sierpinski Sieve, from MathWorld-A Wolfram*. <http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieve.html>.
- (26) Feder, J. (1988). *Fractals*. New York: Plenum Press.
- (27) Alonso-Álvarez, M., Cámara-Gomez, A., Álvarez-Alonso, M. (1991). Levantamiento planimétrico de la catedral de Ávila. *Informes de la construcción*, 43(416): 19-37, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.1991.v43.i416.1361>.
- (28) Garma, D. (1998). *Rutas del románico en la provincia de Ávila*. Valladolid: Castilla Ediciones.
- (29) Ariz, L. (1607): *Historia de las grandezas de la ciudad de Ávila*. Alcalá de Henares: Castilla Ediciones.
- (30) Heras, F. H. (1967). *La Catedral de Ávila: desarrollo histórico artístico*. Ávila.
- (31) López, J.R. (1966). *Un cabildo catedral de la Vieja Castilla. Ávila: su estructura jurídica*. Madrid.
- (32) León, F. M. (2006). *Apuntes sobre el gótico de Cuenca en su Catedral*. Madrid: Antonio Pareja Editor.
- (33) Simon, O. (2007). *La Catedral Gótica: Los orígenes de la arquitectura gótica y el concepto medieval de orden*. Madrid: Alianza Editorial.
- (34) Diputación Foral de Álava. (2000, 20-23 de mayo). La Catedral de Santa María de Vitoria- Gasteiz. En *I Congreso Europeo sobre Restauración de Catedrales Góticas*. Vitoria: Diputación Foral de Álava - Servicio de Publicaciones.
- (35) Villimer, S. L. (1977). *Documenta Alavae Latina*. Vitoria-Gasteiz: Ed. Universidad de Valladolid - Colegio Universitario de Álava.
- (36) Enciso, E. V. (1968). *Catálogo Monumental - Diócesis de Vitoria*. Vitoria: Publicaciones del Obispado de Vitoria y de La Obra Cultural de la Caja de Ahorros Municipal de Vitoria.
- (37) Mansilla, D. (1956). *Breve guía y descripción de sus fondos*. Burgos: Archivo Capitul de la Catedral de Burgos.
- (38) Piquero, A. (1992). *Las Catedrales Góticas Castellanas*. Salamanca: Publicaciones del Colegio de España.
- (39) Pérez, I. (2008). *Del gótico al renacimiento. Artistas burgaleses entre 1450 y 1600*. Burgos: Editorial Cajacírculo.
- (40) De las Casas, I. G. (1992). El conocimiento de la arquitectura en la Catedral de Toledo (Tesis). Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.
- (41) Chueca, F. (1975). *La catedral de Toledo*. León: Editorial Everest.
- (42) Polo, B. (1980). *El arte en España: Catedral de Toledo*. Barcelona: Patronato Nacional de Turismo y Editorial H de J.
- (43) Alomar, E. (1970). *La arquitectura gótica del siglo XV*. Barcelona: Publicaciones del Colegio de Arquitectos de Cataluña y Baleares, Ed. Blume.
- (44) Durliat, M. (1964). *L'art al Regne de Mallorca*. Mallorca: Edicions Moll.
- (45) Cirici, A. (1968). *Arquitectura gòtica catalana*. Barcelona: Editorial Lumen.
- (46) Herráez, M.V. (2004). La construcción del templo gótico. En *Congreso Internacional de León «La Catedral de León en la Edad Media»*, (pp. 145-176). Universidad de León-Servicio de publicaciones.
- (47) Karge, H. (2004). La arquitectura de la catedral de León en el contexto del gótico europeo. En *Congreso Internacional de León «La Catedral de León en la Edad Media»*, (pp. 113-144). Universidad de León-Servicio de publicaciones.
- (48) Luis, A. (1970). *La Catedral de León*. León: Editorial Everest.
- (49) Puente, R. (1975). *La Catedral de Santa María de León*. León: Imprenta Moderna.
- (50) Valdés, M. (1994). *Una historia arquitectónica de la Catedral de León*. León: Santiago García Editor.
- (51) Barral, X. (1994). *Les Catedrals de Catalunya*. Barcelona: Edicions 62.
- (52) Bonet, M. (1957). *La Catedral de Barcelona*. Barcelona. Escudo de Oro SA y Archivo Diocesano de Barcelona.
- (53) Ramos, M. (2005). *Catedrals monestirs i grans edificis religiosos*. Barcelona: SGIT Geoestel SA.
- (54) Cirici, A. (1979). *L'Art Gòtic Català - L'arquitectura dels segles XV i XVI*. Barcelona: Edicions 62.
- (55) Barral, X. (2000). *Vitralls Medievals de Catalunya*. Barcelona: Lunwerg Editores.

- (56) Nadal, J. F. (2002). *La Catedral de Girona*. Girona: Lunweg Editores.
- (57) Ramos, L. (2005). *Catedrals, monestirs i grans edificis religiosos*. Barcelona: SGIT Geoestel SA.
- (58) Bovill, C. (2008). The doric order as a fractal. *Nexus Network Journal*, 10(2): 283-290, doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s00004-007-0070-x>.
- (59) Crompton, A. (2002). Fractals and picturesque composition. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 29(3): 451-459, doi: <http://dx.doi.org/10.1068/b12822>.
- (60) Rian, I.M., Park, J.H., Ahn, H.U., Chang, D. (2007). Fractal geometry as the synthesis of Hindu cosmology in Kandariya Mahadev temple, Khajuraho. *Building and Environment*, 42(12): 4093-4107, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.buildenv.2007.01.028>.
- (61) Sala, N. (2006). Fractal geometry and architecture: some interesting connections. *WIT Trans. Built. Environ.*, 86: 163-173, doi: <http://dx.doi.org/10.2495/ARCO60171>.

* * *