METODOS ALTERNATIVOS DE OPTIMIZACION DE LA GEOMETRIA DE ESTRUCTURAS ARTICULADAS*

Luis Parras Galán
Doctor Ingeniero Agrónomo
Profesor Adjunto Interino de la Cátedra
de Construcción I.

Director de la Tesis: **Manuel Montes Tubío****
Doctor Ingeniero Agrónomo
Catedrático Numerario de la Cátedra
de Construcción I.

Codirectora: **Adela García Guzmán**
Doctor Ingeniero Agrónomo
Profesor Adjunto numerario de la Cátedra
de Estadística, Econometría
e Investigación Operativa.

406-2

Se plantea el problema de optimización de la geometría de estructuras articuladas, enfocado bajo dos aspectos diferentes. El primero supone el estudio en profundidad de los métodos numéricos de optimización, analizando su esencia y definiendo, como resultado de dicho análisis, una metodología que permite estructurar un elevado número de alternativas diferentes.

Se complementa el estudio anterior, con el de los posibles criterios de selección del método más idóneo para un problema de optimización dado.

El segundo enfoque se refiere a la aplicación de la metodología anterior a problemas constructivos reales; en él se introducen aportaciones de interés, sobre temas de análisis de esfuerzos, diseño y dimensionamiento óptimos de estructuras articuladas.

* *Tesis leída el 10 de julio de 1982 en la Escuela Superior de Ingenieros Agrónomos de Córdoba. Obtuvo la calificación de sobresaliente cum laude.*

** *Tanto el autor como los directores desarrollan la labor docente en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Córdoba.*

Desde finales del siglo pasado (MAXWELL, 1980) y principios del actual (MITCHELL, 1904) ha existido un interés creciente por la optimización estructural, habiéndose producido los mayores avances a partir de la década de los años cincuenta potenciados, en gran medida, por el desarrollo de las técnicas matemáticas de optimización y, principalmente, por el desarrollo del cálculo electrónico, que han hecho posible impulsar las técnicas iterativas de optimización, a la vez que se extendía su aplicación a problemas reales de grandes dimensiones, existiendo dos grandes líneas de investigación en este campo: la optimización de las áreas de las barras, cuyo objetivo es el dimensionamiento de los elementos que componen una estructura con las secciones mínimas para que pueda soportar las hipótesis de carga consideradas; y la optimización de la propia configuración geométrica, siendo variables de diseño además de las secciones de los elementos, la geometría de la estructura analizada. Esta segunda vía presenta una mayor complejidad con respecto a la primera, siendo la optimización presentada inicialmente un subproblema dentro del problema más general de la optimización geométrica.

La forma más general de realizar un problema matemático de optimización consiste en desarrollar un método para hallar el óptimo de una función $f(X)$, $X \varepsilon R$, siendo R:

$$R = \{X|\ g_i(X) = 0, i = 1,p;\ g_i(X) \leqslant 0, i = p+1, m\}$$

representando $g_i(X)$ el conjunto de ecuaciones de ligadura o de restricciones a las que se encuentra sometida la función objetivo $f(X)$.

Hay que definir el espacio n-dimensional de las variables de diseño $E(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y el campo de existencia de cada variable, pudiendo representar o no, el carácter de continuidad dentro del intervalo de existencia definido por los límites inferior y superior.

Independientemente de la propia optimización de la estructura objeto de estudio y ante la diversidad de los métodos existentes, es necesario realizar un estudio exhaustivo sobre la naturaleza de la función objetivo, las ecuaciones de restricción, y el número de variables de diseño utilizadas en la definición de un problema concreto de optimización, para así emplear el método más adecuado en cada caso.

En los problemas concretos de optimización estructural es de gran dificultad, cuando no imposible, la definición explícita de la función objetivo y por lo tanto no es posible calcular sus derivadas, por lo que hay que recurrir a los denominados métodos numéricos de búsqueda, que se caracterizan por utilizar técnicas iterativas de optimización, en forma progresiva, de la función objetivo.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se ha realizado un análisis de la esencia íntima de dichos métodos (FLETCHER, 1981 ; RAO, 1978), lo que ha permitido realizar una ordenación sistemática de los mismos y, lo que es más interesante, la formulación de procedimientos originales de optimización de estructuras articuladas.

Del análisis de los métodos de optimización de búsqueda, se llega a la conclusión de que un «método de optimización tipo», puede ser descompuesto en un número más o menos amplio de pasos o fases, siendo además posible el estudio de un conjunto de matices o factores que pueden presentar, cualitativa o cuantitativamente, distinta valoración.

Se han usado de forma análoga a como son empleados en la teoría de diseño de experimentos, los términos de factor y nivel, para definir la esencia de un método de optimización. De esta forma, si se admite la existencia de n factores como los necesarios para definir un grupo o conjunto de métodos de optimización, pudiendo cada uno de los factores ser considerados a m niveles diferentes, tendremos automáticamente establecidos $n \times m$ métodos de optimización, cuya generación se realiza de manera sistemática.

En los métodos matemáticos que se proponen, se han establecido dos fases consecutivas cuya definición es la siguiente:

— Fase primera o fase de tanteo, en la cual se realiza un conjunto de operaciones matemáticas y decisiones lógicas, con objeto de obtener una información suficiente para adoptar una política óptima en la fase siguiente.

— Fase segunda o de movimiento conjunto de variables en la cual se ejecutan las decisiones basadas en los estudios previamente realizados, pudiendo ser incluidos en ésta nuevos cálculos matemáticos o lógicos que afecten al conjunto de las variables de diseño.

Como factores y niveles más representativos, correspondientes a la primera fase de un método tipo de optimización, proponemos los siguientes:

1.° Magnitud en el cambio de estado, salto o movimiento (*): Representa el valor que toma el módulo del vector asociado a un cambio de estado. Este factor admite dos posibles niveles que representan cambios de estado realizados con magnitudes de movimiento cuyo valor es de carácter fijo o aleatorio.

2.° Valor relativo del cambio de estado asociado a las diferentes variables de diseño. Puede estudiarse a dos posibles niveles: el nievel 1 supone la adopción de magnitud igual en el movimiento adoptado para todas las variables de diseño, mientras el nivel 2 representaría valores distintos en la magnitud del movimiento asociado a cada variable por separado.

3.° Número de movimientos consecutivos referidos a cada variable. Para este factor se puede admitir un nivel en el que se produce un solo movimiento para cada variable, mientras que el segundo nivel contempla la posibilidad de varios movimientos continuados para la misma variable de diseño.

4.° Definición del estado inicial asociado a cada movimiento y ordenación realizada sobre el conjunto de las variables de diseño para ejecutar el mismo. En el primer nivel la posición de la cual parte el movimiento de las variables es la misma para todas ellas; en el segundo nivel, la posición del cambio inicial del cambio de estado de una variable es el final del movimiento de la variable anterior, habiéndose prefijado un orden para el tratamiento secuencial de las variables; el tercer nivel no mantiene la posición inicial para el movimiento de las variables, realizando éste según un orden generado aleatoriamente.

De la combinación sistemática de los cuatro factores definidos, tomados cada uno de ellos con sus posibles niveles, se obtiene automáticamente la generación de veinticuatro posibles primeras fases.

Una vez obtenida información sobre el comportamiento de la función objetivo referido a los cambios individuales de las variables de diseño en la fase de tanteo, en la presente fase se trata de realizar un movimiento conjunto, de manera tal que a partir de una solución base original $\{S_j\}$, y dentro del conjunto de soluciones posibles, seleccionemos una nueva combinación $\{S_{j+1}\}$ que optimice la función objetivo. La ecuación que presenta un cambio de estado, puede ser escrita de forma general como:

$$\{S_{j+1}\} = \{S_j\} + \lambda * \{D_j\}$$

donde $\{D_j\}$ es el vector unitario en la dirección en que se establece la optimización, y λ * es un parámetro que representa la magnitud y el sentido del vector movimiento.

Las alternativas que se proponen para la ejecución del movimiento conjunto de las variables son las siguientes:

1.—Obtención de la solución $\{S_{j+1}\}$ por combinación de las soluciones óptimas de la primera fase.

(*) La operación que realiza el cambio de una posición dada de diseño a otra que nos acerca a la posición final óptima se conoce con el nombre de cambio de estado, salto o movimiento; de esta manera, un movimiento se define mediante un cambio en las coordenadas del punto representativo del estado $\{s_j\}$ al $\{S_{j+1}\}$.

Realizadas n búsquedas según los ejes del espacio de diseño, la solución global óptima en esta segunda fase, se define mediante combinación de las anteriores citadas. El vector de la solución mejorante $\{S_{j+1}\}$ puede definirse como suma vectorial:

$$\{S_{j+1}\} = \{S_j\} + \{\lambda_i\} = \{S_j\} + \lambda\{D_j\}$$

En este caso $\{D_j\}$, que es el vector unitario obtenido por normalización del vector de movimiento conjunto λ_i, y λ el parámetro representativo de su módulo.

2.—Obtención de la solución $\{S_{j+1}\}$ mediante un procedimiento unidireccional de optimización a partir de las soluciones óptimas individuales de la primera fase. En este caso las expresiones generales representativas del proceso de optimización vienen dadas por las dos alternativas siguientes:

a) $\{S_{j+1}\}^* = \{S_{j+1}\} + \lambda^*\{D_j\}$, con

$$\{S_{j+1}\} = \{S_j\} + \lambda\{D_j\}$$

b) $\{S_{j+1}\}^* = \{S_j\} + \lambda^*\{D_j\}$

Siendo $\{D_j\}$ el «vector gradiente» de la función objetivo calculado a partir de la información obtenida en la fase de tanteo, y λ^* el módulo del vector movimiento que se obtiene por aplicación de las técnicas de optimización unidireccional.

Con los problemas que se han ensayado estas alternativas y de los resultados obtenidos parece aconsejable adoptar la alternativa a), por tener mayor eficacia en el proceso de convergencia.

3.—Obtención de la solución $\{S_{j+1}\}$ mediante un proceso de optimización sobre dos direcciones perpendiculares. Se trata de hallar el óptimo de la función objetivo según una búsqueda unidireccional en dos direcciones perpendiculares $\{D_j\}_1$ y $\{D_j\}_2$

$$\{S_{j+1}\}' = \{S_{j+1}\} + \lambda^*_1\{D_j\}_1$$

$$\{S_{j+1}\}'' = \{S_{j+1}\}' + \lambda^*_2\{D_j\}_2$$

siendo:

$$\{S_{j+1}\} = \{S_j\} + \lambda_1\{D_1\}_1$$

La dirección $\{D_1\}$ y la posición $\{S_{j+1}\}$ corresponde al movimiento conjunto de las variables según los criterios de la alternativa primera. La solución $\{S_{j+1}\}$ se obtiene mediante búsqueda unidireccional en la dirección $\{D_j\}_1$, según la alternativa segunda, y $\{S_{j+1}\}''$ es la solución óptima alcanzada en la búsqueda unidireccional según la dirección $\{D_j\}_2$ perpendicular a la primera y que se obtiene como suma vectorial de los vectores contenidos en el hiperplano π, cuyo origen es el estado $\{S_{j+1}\}'$, y cuyos extremos son los puntos de intersección entre el citado hiperplano y los ejes del espacio de optimización. El hiperplano π pasa por el punto $\{S_{j+1}\}'$ y tiene como vector caracteristico el unitario de dirección $\{D_j\}_1$.

La búsqueda en dos direcciones perpendiculares puede estar indicada en los casos, usuales en la práctica, en los que la función objetivo presente un gran número de extremos relativos; la búsqueda según una única dirección, en estos casos, puede conducir a soluciones que están dentro de zonas de máximos o mínimos relativos, y la dirección $\{D_j\}_2$ ofrece la posibilidad de lograr una salida de las mismas, obteniendo por tanto una solución final de diseño, más acorde con los extremos absolutos de la función.

4.—Obtención de la solución $\{S_{j+1}\}$, mediante un proceso de optimización en n direcciones mutuamente perpendiculares. La optimización se realiza en este caso, mediante un procedimiento secuencial de búsqueda en n direcciones ortonormales, cuya representación simbólica es la siguiente:

$$\{S_{j+1}\} = \{S_j\} + \lambda_1\{D_j\}_1 \qquad \text{(c)}$$

$$\{S_{j+1}\}^n = \{S_j\} + \lambda_1\{D_j\}_1 + \sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i^*\{D_j\}_i \qquad \text{(d)}$$

Las n direcciones perpendiculares entre sí se generan mediante el procedimiento de Gram-Schmidt. El método de búsqueda comienza por una búsqueda unidireccional en la primera fase, ecuación (c), y se continúa mediante una secuencia de procesos de optimización según las n direcciones $\{D_j\}_i$; en cada caso se toma como solución inicial de las sucesivas etapas de la optimización unidireccional la final de la etapa precedente.

Dado que gran parte de este trabajo ha consistido en la elaboración y puesta a punto de diferentes modelos de optimización, cabe plantear la cuestión de cuál o cuáles de ellos pueden ser los más indicados para ser utilizados en un problema de optimización del campo de la ingeniería de diseño. Referente al problema de optimización estructural son varios los criterios que se proponen para la evaluación del método óptimo para un problema dado.

a) Medida del tiempo de cálculo invertido en la ejecución del programa de ordenador.

b) Incremento obtenido sobre la función objetivo desde la solución original a la final optimizada, bien medido en términos absolutos o relativos.

c) Criterios económicos, en los cuales se introduce el concepto de coste total en ingeniería, considerado como suma del coste de diseño y de producción del proyecto tecnológico, valorando por una parte el coste que representa la puesta a punto y ejecución del modelo de optimización y, por otra, el beneficio consiguiente a la obtención de una solución mejorante.

d) Criterios estadísticos, como por ejemplo el análisis de la varianza explicada por los distintos «factores» que definen un modelo de optimización.

Aplicación de los métodos propuestos al diseño óptimo de estructuras articuladas

Las estructuras articuladas constituyen un grupo de interés para los proyectos de ingeniería agronómica, pues presentan un elevado porcentaje de los esquemas estructurales resistentes que se adoptan dentro de los mismos, por lo cual se han seleccionado este tipo de estructuras como objeto de estudio para aplicar sobre ellas los modelos de optimización que se proponen en el presente trabajo.

Como se ha indicado anteriormente, ante los dos posibles enfoques del diseño óptimo estructural, se ha seguido la vía de la optimización con geometría variable, pues se considera más amplia en su planteamiento y que, además de ser de un mayor interés práctico, conduce a soluciones claramente superiores respecto a la simple optimización estática (VANDERPLAATS y MOSES, 1972), representando un acercamiento más completo del diseño automático en ingeniería.

Los modelos de optimización propuestos se han contrastado con estructuras articuladas de cubierta (cerchas), ya que éstas son utilizadas frecuentemente en los proyectos agronómicos que se realizan en el mundo rural.

Se han considerado dos naves agroindustriales con luces de 10 y 12 m respectivamente, que se cubrirán con dos estructuras de diferente topología: la cercha inglesa y la de Polanceau doble.

La función objetivo escogida es el peso de la estructura, expresada como la suma de pesos de los distintos elementos que la componen:

$$P = \lambda \sum_{i=1}^{m} A_i L_i$$

siendo m, el número de barras de la estructura, λ , el peso específico del acero, A_i, el área de la sección transversal recta del elemento i, L_i, la longitud de dicho elemento.

La elección de la función objetivo como la función peso de la estructura, ha sido considerada por la inmensa mayoría de autores en la bibliografía consultada; igualmente hubiese sido posible plantear como función objetivo, una función coste de la estructura, en la que entren en juego parámetros tales como coste del material, dificultad de montaje, coste de ejecución de los diferentes puntos de enlace entre elementos, proceso de fabricación, etc. Aunque es necesario resaltar que la metodología propuesta es aplicable a cualquier tipo de función objetivo elegida.

El espacio de diseño $E(X_1)$, viene definido por los parámetros que se han seleccionado como variables de diseño: las coordenadas de los nudos y las áreas de las secciones de los elementos. Los nudos móviles en la cercha inglesa son el 3, 6 y 8 (fig. 1) y en la Polanceau el 3, 5, 6, 9, 10, 12 (fig. 2). En cuanto a las áreas óptimas son aquellas que conducen a estructuras totalmente tensionadas.

Se han impuesto restricciones de comportamiento y de tamaño. Con respecto a las primeras:

— Se considera como espacio de diseño posible el comprendido entre los pares y los tirantes, puesto que parece aconsejable que, en la mayoría de los casos y por razones tanto constructivas como estéticas, todos los pares de una vertiente permanezcan alineados.

— A los tirantes se les impide su desplazamiento por debajo de la horizontal de los apoyos.

— El movimiento de los nudos no debe dar lugar al cruce de barras, por razones constructivas.

En cuanto a las restricciones de tamaño, se ha impuesto la simetría como condición de diseño de las estructuras estudiadas, en el sentido de dimensionar los elementos simétricos con las mismas áreas.

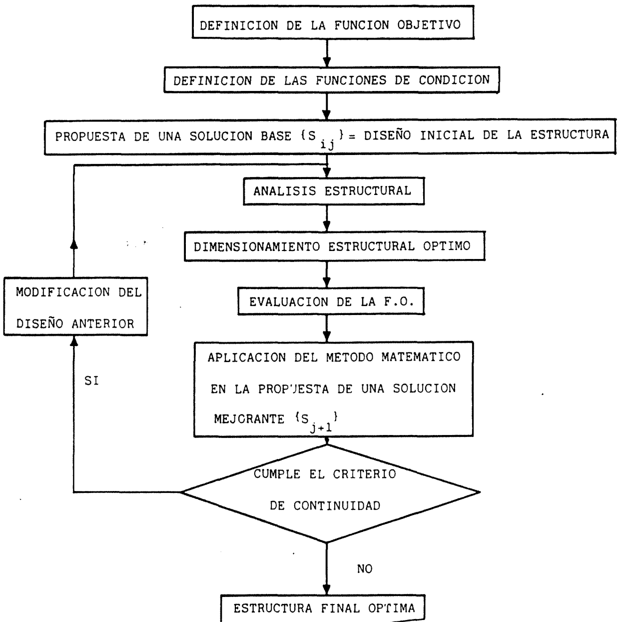
Los métodos de análisis de estructuras articuladas presentan dos requisitos imprescindibles en su implementación en el cálculo electrónico. Por un lado presentan unos requerimientos de reserva de memoria central, para almacenamiento de las distintas matrices que forman parte de los modelos matemáticos empleados (MEEK, 1971; RUBINSTEIN, 1966). Por otro lado la formulación de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas de la estructura, requiere la solución del sistema lineal formado, que conlleva un cierto tiempo de computación que, aunque no muy grande en sí mismo para un análisis aislado, puede resultar excesivo cuando este programa se utiliza como módulo interno de un problema de optimización dentro del cual es ejecutado un número elevado de veces.

Las anteriores razones han conducido a la propuesta de un nuevo método de análisis de estructuras articuladas, que presenta la ventaja de eludir los dos problemas apuntados: no precisa una elevada capacidad de memoria en el equipo de cálculo, aun para estructuras de un gran número de nudos y elementos, y al no tener que formar el sistema de ecuaciones lineales para toda la estructura, no es necesario el empleo de ninguna subrutina para la obtención de la solución del citado sistema.

La base física del mismo es la empleada en el método de seccionamiento de los nudos; la diferencia fundamental con respecto al procedimiento matricial tradicional, radica en que las ecuaciones de equilibrio se escriben para cada uno de los nudos de la estructura, resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones de equilibrio planteadas antes de pasar a la formulación de equilibrio de un nuevo nudo. Es decir, son analizados secuencialmente, uno a uno, los distintos nudos de la estructura de acuerdo a un orden establecido previamente por el propio analista; el orden debe ser fijado de forma que la numeración de los nudos que componen la estructura se acomode a la condición de que en cada momento el número de incógnitas asociadas a la ecuación de equilibrios de cada nudo no sea superior a dos, ya que dos son las ecuaciones de equilibrio que se pueden establecer en una estructura articulada plana.

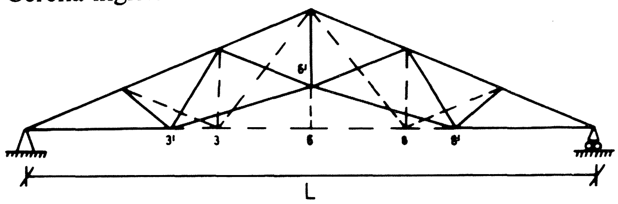
Para el dimensionamiento de los elementos de las estructuras metálicas se ha seguido la normativa que al respecto está vigente en España, es decir, las Normas Básicas MV-101/1962, MV-103/1972 y MV-102/1975, utilizando una serie continua de perfiles redondos de acero A-42-B, puesto que dicha serie permite una mejor evaluación de la bondad de los métodos de optimización propuestos.

En el organigrama siguiente se muestra la secuencia de un método general de optimización estructural.



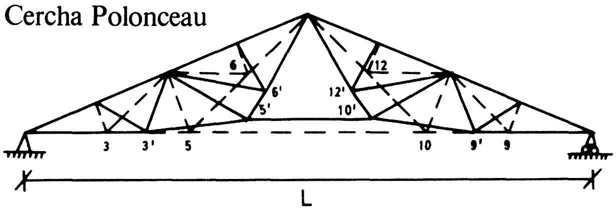
De la aplicación de la metodología propuesta, se han obtenido los diseños óptimos de las estructuras analizadas.

Cercha inglesa



	COORDENADAS MOVILES (cm)			
L = 10 m	X_3	Y_3	Y_6	Peso (kp)
Diseño inicial	333,33	0,00	0,00	205,5
Diseño final	248,63	0,00	27,09	178,99
L = 12 m	X_3	Y_3	Y_6	Peso (kp)
Diseño inicial	400,00	0,00	0,00	338,79
Diseño final	316,03	0,00	81,88	286,89

Cercha Polonceau



	COORDENADAS MOVILES (cm)						
L = 10 m	X_3	Y_3	X_5	Y_5	X_6	Y_6	Peso (kp)
Diseño inicial	141,55	0,00	283,11	0,00	391,55	90,99	170,38
Diseño final	178,89	0,00	366,64	13,66	425,16	62,94	137,64
L = 12 m	X_3	Y_3	X_5	Y_5	X_5	Y_5	Peso (kp)
Diseño inicial	169,87	0,00	339,74	0,00	469,87	109,19	276,12
Diseño final	218,95	0,00	438,79	17,07	504,36	85,16	221,95

Resultados y discusión

— Puesta a punto de una metodología lógica que ha permitido la estructuración de un elevado número de métodos de optimización de posible aplicación a cualquier trabajo de investigación que, sobre este tema, se realice en ingeniería.

— Propuesta de un método de análisis de esfuerzos para estructuras articuladas, que permite realizar el análisis de grandes estructuras; aun en ordenadores de pequeña capacidad de memoria cabe destacar que en un ordenador de 32 Kbytes, de capacidad de memoria, se puede analizar una estructura de 70 barras si se realiza el análisis por medio de los métodos matriciales tradicionales, elevándose la cantidad anterior a un total de más de 800 elementos en el caso de aplicar el método propuesto. Por otra parte el tiempo de cálculo se reduce de forma considerable, ya que se pasa de la resolución de un sistema de m ecuaciones (tantas como barras que componen la estructura), a la resolución de $(m+3)/2-1$ sistemas de dos ecuaciones.

— Análisis de las posibles funciones objetivo y de restricción de comportamiento y tamaño, en el problema de optimización geométrica de estructuras articuladas, presentando dichas funciones la característica de no linealidad y presentando la función-objetivo un elevado número de valores extremos (máximos o mínimos) relativos, lo que dificulta la obtención del óptimo real (máximo o mínimo absoluto), siendo en este caso preferible la utilización de los métodos de optimización numéricos de búsqueda.

— La metodología propuesta se ha aplicado a las estructuras objeto de estudio, obteniéndose un gran volumen de información a la cual se le han aplicado técnicas estadísticas y de detección del mejor método de optimización (criterios económicos), del resultado de dichos análisis se deduce lo siguiente:

Los métodos seleccionados como más eficientes para la optimización de estructuras articuladas presentan las características comunes que para tiempos reducidos y, por lo que respecta a la primera fase, incluyen una búsqueda unidireccional para cada una de las variables de diseño; sin embargo, para tiempos de cálculo elevados es preferible un solo movimiento y que su magnitud tenga carácter aleatorio.

Referente a la segunda fase se observa que para tiempos cortos la alternativa más eficiente de las posibles es la primera; para tiempos largos aumenta la importancia en una búsqueda en n direcciones que permite un mayor refinamiento de la solución final.

Como conclusión general se puede indicar que para la optimización de estructuras en las que el coste unitario del material, el número de unidades de obra, o ambos, sea muy elevado, es lógico que se obtengan, como más aconsejables, aquellos que conducen a soluciones más afinadas, aun a costa de un mayor tiempo de optimización.

BIBLIOGRAFIA

1. FLETCHER, R. 1981. Practical Methods of Optimization. (2 vol). John Wiley & Sons. New York.

2. MAXWELL, J.C. 1890. On the calculation of the equilibrium and stiffnes of frames. The scientific-papers of James Clerck Maxwell. Cambridge University Press.

3. MITCHELL, A.G. 1904. The limits of economy of material in frame structures. **Philosophical magazine.** Vol. 8, N.° 47. Noviembre.

4. MEEK, J.L. 1971. Matrix structural analysis. McGraw-Hill. Nueva York.

5. RAO, S.S., 1978. Optimization: theory and applications. Wiley Eastern.

6. RUBINSTEIN, M.F., 1966. Matrix computer analysis of structures. Prentice-Hall. New Jersey.

7. VANDERPLAATS, G.N. y MOSES, F. 1972. Automated design of trusses for optimum geometry. **Journal of the structural division.** Marzo, 671-691.