ISSN: 0020-0883

Un estudio histórico del problema de las piezas prismáticas rectas sometidas a compresión. Parte II

A historical study of the problem of straight prismatic elements subjected to compression. Part II

Miguel A. Ortega*, José L. Romero**, Emilio de la Rosa***

RESUMEN

Se complementa la primera parte de este trabajo con un breve repaso histórico de algunos de los modelos teóricos y métodos numéricos empleados en la resolución de los problemas planteados en el artículo anterior, cuando no ha sido posible su descripción analítica.

En un primer apartado se mencionan algunos de los métodos que se han utilizado para abordar las ecuaciones que rigen los modelos: analíticos con soluciones cerradas, aproximados, matriciales, elementos finitos y splines generalizados. En un segundo apartado se enumeran distintas técnicas numéricas empleadas para la determinación de los aspectos que describen los problemas en relación con las vigas-columna: deformadas, esfuerzos, trayectorias, puntos límite y críticos, etc.

400-41

Palabras clave: elementos finitos, métodos numéricos, pandeo, pilares, splines generalizados.

SUMMARY

The first part of this article is complemented with a short historical revision of some of the theoretical models and numerical methods employed in the resolution of the outlined problems when its analytical description has not been possible.

Some of the positions that they have been used to approach the equations that govern the models are mentioned in a first paragraph: analytical methods with closed solutions, approximate methods, matrix methods, finite elements and generalized splines. A second paragraph lists different numerical techniques employed for the determination of the deformed, section forces, paths, limit and critical points.

Keywords: *beam-colums, buckling, finite elements, generalized splines, numerical methods.*

*Dr. Ingeniero de Caminos. Empresarios Agrupados. Departamento Civil, España
**Dr. Ingeniero de Caminos. Facultad de Informática. UPM, Madrid, España
***Dr. Ingeniero de Caminos. E. T. S. de Ingenieros de Caminos. UPM, Madrid, España

Persona de contacto/*Corresponding author*: mon@empre.es (Miguel A. Ortega)

Fecha de recepción: 25-VII-07
Fecha de aceptación: 01-X-07

1. MODELOS DE ANÁLISIS

En la primera parte de este artículo se han recogido distintos fenómenos básicos que a lo largo del tiempo han permitido conocer el comportamiento de los pilares. Su análisis ha supuesto un esfuerzo mediante el que se han establecido los elementos teóricos para su estudio. Además ha sido posible extender el análisis de los pilares considerando nuevos fenómenos y situaciones: comportamiento plástico, grandes desplazamientos, problemas tridimensionales, daño, fractura, etc.

Por otra parte, junto al estudio de la pieza aislada aparece la necesidad de incorporar estos modelos en el cálculo general de estructuras. El resultado final ha sido la formulación de una gran variedad de problemas que requieren de forma paralela el desarrollo de métodos para su resolución.

En este artículo se mencionan algunos de los métodos, técnicas y estrategias que se han propuesto para resolver las ecuaciones o sistemas que representan a los distintos modelos y los métodos numéricos de cálculo.

1.1. Cargas críticas de pandeo

En el caso de problemas lineales, junto a los métodos clásicos de autovalores para la determinación de cargas críticas de pandeo aparecieron los métodos de Soutwell y Timoshenko que buscan puntos de bifurcación o límites de estabilidad para un tipo de deformación dado, el método de Engesser-Vianello para la determinación de deformadas post-pandeo, el método de Kayser (1918) para la determinación de cargas de pandeo incluso para pilares de sección no uniforme. Por otra parte son conocidos los métodos para los problemas lineales basados en desarrollos en serie (Timoshenko) o los métodos energéticos de Rayleigh-Ritz y Stodola-Vianello.

Para el caso de pilares con materiales con comportamiento no lineal, Von Karmán (1910) (22) propuso un método general para determinar la carga de pandeo de pilares con carga excéntrica. Dicho método se basa en la integración numérica de las pendientes de la deformada a lo largo de la pieza con ajuste iterativo de las condiciones de contorno utilizando las relaciones tensión-deformación del material y la hipótesis de Bernoulli-Euler. La validez de la Teoría de Karmán fue probada por Chwalla (11) mediante ensayos con pilares metálicos articulados. Ros y Brunner (34) simplificaron el método de Karmán suponiendo que la deformada era una semionda de la función senoidal. Westergaard y Osgood (43) propusieron usar como deformada una porción de la función coseno ya que la función seno es inconsistente con las condiciones de contorno cuando hay momentos en los extremos pero mantuvieron una rigidez (EI) constante.

1.2. Cálculo plástico de vigas-columna post-pandeo

En la obra de W. F. Chen y T. Atsuta (9), se recogen diversos métodos que se comentan brevemente a continuación.

1.2.1. Soluciones exactas-cerradas

Jezek (1936) fue el primero en obtener una solución analítica y cerrada de una columna excéntricamente cargada para una sección rectangular con tensiones en régimen plástico. Por su parte Horne (1956) fue el primero en derivar las relación M-P-χ (momento-axil-curvatura) para secciones rectangulares de un material elástico-plástico perfecto. Demostró que la solución se podía obtener sin recurrir a métodos numéricos. Para el caso de Jezek obtuvo soluciones usando funciones elementales.

Hauck y Lee (1963) obtuvieron relaciones M-P-χ explícitas para secciones cajón y en H. Combinando estos resultados con los de Horne obtuvieron soluciones analíticas de la deformada de pilares elastoplásticos en todos los estados de plastificación.

1.2.2. Métodos aproximados

A partir de la ecuación de equilibrio de la pieza [(9), Vol. 1, p. 351-352], teniendo en cuenta la Figura 1

$$g\,(\chi, P) = M\,(x) - Pu\,(x) \qquad [1]$$

$g(\chi, P)$ = relación constitutiva por la superficie mecánica
$u(x)$ = desplazamiento

se pueden plantear tres métodos para la resolución de la ecuación del problema en condiciones de no linealidad del material dependiendo de la variable independiente que se emplee (u, χ, M) (desplazamiento, curvatura, momento).

1. Método de la columna equivalente

Una viga simplemente apoyada sometida únicamente a una carga axil P sin excentricidades en los extremos es una columna equivalente de forma que una viga-columna con las mismas características resistentes y el mismo axil P y momentos en los extremos será una porción de una viga-columna equivalente original. A la deformada de la curva equivalente se la denomina curva de deformación de la columna (Column Deformed Curve, CDC).

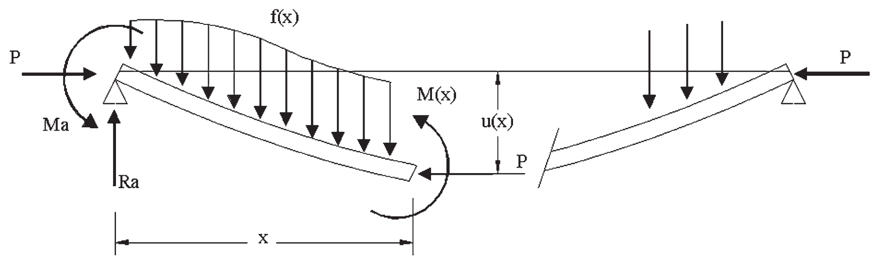

Figura 1. Métodos aproximados.

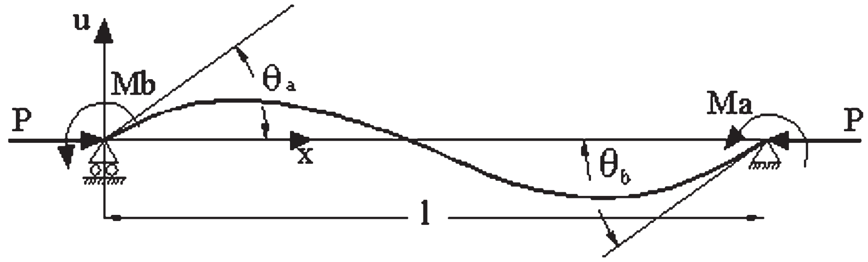

Figura 2. Viga-columna simplemente apoyada en los extremos.

En relación con esta idea, Von Karmán (1910) (22) fue el primero en reconocer el hecho de que la deformada de una columna podía ser representada mediante una porción de curva deformada de otra (CDC). Sobre la base de la CDC, los resultados correspondientes a varias columnas para diferentes condiciones de carga y formas de la sección fueron representadas por Chwalla (1928, 1934) facilitando la resolución gráfica.

Curvas de deformación de la columna

Como señala Chen (9), otros autores que han ampliado la utilización del método CDC han sido: Horne 1956, Ellis 1958, Ojalvo 1960, Nel y Mansell 1963, Lu y Kamalvand 1968, Ellis, Jury y Kirk 1964 (soluciones tridimensionales para columnas cargadas biaxialmente y columnas con secciones en cajón de pared delgada).

De forma análoga a Chwalla, para una misma relación $\chi = g^{-1}(M, P)$ y carga axil P, se puede representar una familia de columnas equivalentes o CDC que permiten resolver distintos tipos de problemas gráficamente como hace Ojalvo (1960) y Ojalvo y Fukumoto (1962).

Método CDC modificado

Es una ampliación del método CDC cuando existen cargas perpendiculares a la directriz que fue presentado por Lu y Kamalvand (1968). Igual que antes se pueden construir nomogramas con los que resolver gráficamente distintos tipos de problemas.

2. Método de la curvatura (9)

En este caso se emplea como variable independiente la curvatura:

$$\frac{d^2}{dx^2}\,[g\,(u'',\,P)] + Pu'' = f \qquad [2]$$

Esta ecuación se puede integrar numéricamente o en el caso de que se empleen unas relaciones momento curvatura simplificadas es posible integrar la ecuación diferencial en términos de la curvatura (9).

El objetivo del método es establecer distintas relaciones entre la carga crítica y otras variables del problema, consiguiéndose una simplificación y reducción de los cálculos.

3. Método del momento

En este caso se emplea el momento como variable independiente.

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + Pu'' = f \qquad [3]$$

Utilizando este método, Cheing Siat Moy (8) determina la distribución de momentos en las zonas plásticas.

1.3. Estructuras, entramados y pórticos

1. Análisis elástico en segundo orden (15)

En el caso de análisis de segundo orden cuando las cargas se refieren a la posición deformada se suele utilizar el método P-δ. Además este método puede recoger la consideración de la verdadera curvatura considerando el efecto pieza.

Cuando además se recoge la translacionalidad de la estructura se dice que el análisis P-δ recoge el efecto pórtico. Como es conocido, el método requiere un proceso iterativo.

2. Análisis elasto-plástico de primer orden. (13) (7)

Cálculo incremental de cargas que trata de seguir la historia de formación de rótulas mediante un análisis de primer orden teniendo en cuenta la deformabilidad de los elementos frente a los métodos de formación de mecanismos con rótulas plásticas. En este proceso se pueden tener en cuenta los efectos de segundo orden dando lugar a un cálculo no lineal (10).

1.4. Cálculo matricial

El carácter intrínseco de los modelos de piezas comprimidas tiene su aplicación en el cálculo matricial de estructuras que surge por el tratamiento algebraico y matricial de los sistemas de ecuaciones lineales que aparecen en los problemas de resistencia de materiales y estructuras. Por otra parte, los trabajos de Gabriel Kron (1939) sobre "análisis tensorial de redes" en los que relacionaba algebraicamente distintos componentes individuales fue utilizado posteriormente en el cálculo de estructuras.

Durante los años cincuenta del siglo pasado en el campo de la industria aeronáutica se usaron "métodos matriciales" ensamblando elementos barra para proporcionar rigidez a elementos estructurales de las aeronaves. El principal impulsor de esta metodología fue Levy (1953) que introdujo el método de rigidez directa.

Con el desarrollo de las técnicas matriciales para el cálculo de estructuras a lo largo del siglo XX es posible ampliar los estudios del pandeo a estructuras más generales como los entramados planos, pórticos y celosías. Con esta técnica se determinan las matrices de rigidez de piezas prismáticas sometidas a compresión (James (1935), Goldberg (1954) y Livesley y Chandler (1956)) (5):

$$\begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} s & sc \\ sc & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} \qquad [4]$$

con

$$s = \frac{\lambda(\operatorname{sen}\lambda - \lambda\cos\lambda)}{2 - 2\cos\lambda - \lambda\operatorname{sen}\lambda}$$

$$c = \frac{\lambda - \operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{sen}\lambda - \lambda\cos\lambda}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{P}{EI}}\,l = \pi\sqrt{\frac{P}{P_E}}$$

EI = rigidez de la sección
l = longitud de la pieza
P_E = carga de pandeo de Euler

La matriz de flexibilidad inversa de la anterior fue introducida por Mises y Ratzersdorfer (1926).

$$\begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} = \frac{l}{EI} \begin{bmatrix} \psi_s & -\phi_c \\ -\phi_c & \psi_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix} \qquad [5]$$

con

$$\psi_s = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\tan\mathrm{gh}\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\phi_s = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\operatorname{senh}\lambda}\right)$$

que son las denominadas funciones de estabilidad. Por su parte, las funciones de estabilidad para columnas con deformación por cortante son deducidas por Absi (1967), Bazant y Cristensen (1972).

$$s = \frac{\lambda\,(sen\,\lambda - \lambda^2\,\beta\,cos\,\lambda)}{2 - 2\,cos\,\lambda - \lambda\,\beta\,sen\,\lambda}$$

$$c = \frac{\lambda\,\beta - sen\,\lambda}{sen\,\lambda - \lambda\,\beta\,cos\,\lambda} \qquad [6]$$

$$\beta = 1 - \frac{P}{GA_0}$$

G = módulo de rigidez transversal
A_0 = área de la sección

1.5. Elementos Finitos

Siguiendo la línea de trabajo paralela al cálculo matricial se suele fijar la fecha de nacimiento de los Elementos Finitos como tal, en la publicación de Turner, Clugh, Martin y Topp (1956) en la que se llevaron a cabo aproximaciones locales para la resolución de ciertos problemas estructurales elásticos. Posteriormente Clough (1960) mejora las anteriores aportaciones denominando a la nueva técnica como "Método de los Elementos Finitos".

A mediados de los años sesenta a partir de los trabajos de Melos (1963) sobre criterios de convergencia en los que utiliza principios variacionales tiene lugar la generalización y formalización del método que permite su fundamentación matemática. Sus posibilidades y la gran aceptación del método se deben a que confluyen una serie de ideas claves de carácter metodológico:

- La discretización del dominio y la aproximación de la solución en cada subdominio de la discretización, idea inspirada en las técnicas de Hernikoff (1941).

- El hecho de que la aproximación se lleva a cabo mediante una combinación lineal de una base de funciones siguiendo la metodología de Rayleigh-Ritz-Galerkin o Courant (1941).

- Y, finalmente, la utilización de métodos variacionales o en su lugar el método de los trabajos virtuales a partir de una formulación integral extendida a todo el dominio en la línea de los métodos directos rehabilitados por Hilbert (1900) y completados con los trabajos de Ritz (1909), Lebesgue (1910), Courant (1912), Friedrich (1927), Rellich (1930) que han permitido elaborar un cuerpo de doctrina en el que se sustentan los métodos actuales de cálculo bien organizado para los problemas lineales e incompleto, en la actualidad, para los problemas no lineales.

Una de las propiedades del método es la utilización de funciones aproximantes de tipo polinómico que interpolan en cada nodo de la discretización ciertas variables del problema consideradas como incógnitas. Para el caso de la viga columna regida por la ecuación [2], tomando como incógnitas del problema los desplazamientos y giros en los extremos y una base de interpolación de Hermite en el elemento, para problemas lineales se obtiene como matriz de rigidez para el elemento i:

$$K_i = \underbrace{\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & 6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e} - P\underbrace{\begin{bmatrix} 6/5l & -1/10 & -6/5l & -1/10 \\ -1/10 & 2l/15 & 1/10l & -l/30 \\ -6/5l & 1/10 & 6/5l & 1/10 \\ -1/10 & -l/30 & 1/10l & 2l/15 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_g}$$

La primera matriz $\mathbf{K_e}$, es la matriz de rigidez estática y $\mathbf{K_g}$ es la denominada matriz de rigidez geométrica. La matriz de rigidez del elemento permite plantear la ecuación de equilibrio del elemento:

$$K_i u_i = F_i + Q_i$$

u_i = vector de desplazamientos nodales del elemento

F_i = fuerzas nodales equivalentes

Q_i = fuerzas nodales de equilibrio.

El ensamblado de las matrices de los elementos y la imposición de las condiciones de contorno lleva a establecer la ecuación de equilibrio global del problema:

$$F = Ku = (K_e - PK_g)u$$

Que para $F = 0$ da lugar a un problema de autovalores que permite determinar las cargas críticas de pandeo.

Como se indica en (2): en los últimos años se han producido numerosos esfuerzos para mejorar la exactitud de los elementos finitos basados en el método de los desplazamientos para el análisis de vigas-columna cuando se considera la no linealidad geométrica y del material. Estos desarrollos se han centrado predominantemente en dos aproximaciones: implementacion de los elementos finitos incorporando matrices de rigidez geométrica o tratando de obtener funciones de estabilidad mediante la resolución de la ecuación diferencial del equilibrio.

La primera aproximación utiliza la formulación en desplazamientos, en la cual se emplean funciones polinómicas cúbicas y lineales para los desplazamientos transversales de flexión y longitudinales debidos a los esfuerzos axiles, respectivamente. Estos campos de desplazamientos conducen a la limitación de que los elementos sólo son capaces de representar curvaturas con variación lineal o campos de deformación axial constante. En particular, la variación de la curvatura a lo largo de la longitud de la pieza no se modeliza con exactitud. En este sentido se emplean frecuentemente polinomios de mayor grado asociados a grados de libertad internos al elemento para resolver estos problemas.

En el segundo tipo de aproximación, la derivación de las funciones de estabilidad y su implementación en los programas de estructuras existentes presentan varios inconvenientes: las funciones de estabilidad son exponenciales por lo que se requieren distintos tipos de funciones de acuerdo con el signo del esfuerzo axil, además, la derivación de las formas incrementales en el caso de materiales con relaciones constitutivas no lineales requieren un tratamiento especial.

Este tipo de aproximaciones ha demostrado un elevado grado de aproximación incluso utilizando un solo elemento. En paralelo a los desarrollos anteriores, como se recoge en (2), distintos estudios han demostrado la obtención de buenos resultados utilizando soluciones basadas en los métodos de flexibilidad o mixtos con elementos finitos.

El método de flexibilidad se basa en la interpolación de las fuerzas internas dentro del elemento, de forma que el equilibrio se consigue estrictamente a lo largo del elemento para problemas geométricamente lineales, en contraste con el método de los desplazamientos en los que el equilibrio se satisface solamente en un sentido integral ponderado mediante pesos.

El método mixto es una extensión del método de flexibilidad en el que las fuerzas internas y los desplazamientos se interpolan de forma separada. Ambas formulaciones superan la limitación fundamental de los elementos en desplazamientos convencionales: la imposibilidad de recoger la distribución no lineal de curvaturas a lo largo de la longitud del elemento.

Otras aportaciones recogidas en (2) hacen referencia a los trabajos de distintos autores. Spacone *et al.* (1996), Petrangeli y Ciampi (1997) han desarrollado varios elementos finitos geométricamente lineales para vigas-columna basados en la hipótesis de campos de desplazamientos. Neuenhofer y Filippou (1997) han propuesto un elemento geométricamente lineal basado en funciones de flexibilidad en el cual el campo de fuerzas es utilizado como variables primarias de estado. Para tener en cuenta los efectos de no linealidad geométrica, Neuenhofer y Filippou (1998) adoptan unas funciones de interpolación de desplazamientos para satisfacer el equilibrio en la configuración deformada en el caso de grandes desplazamientos.

Nukala (1997) y Nukala y White (2004) han presentado un elemento viga-columna tridimensional no lineal basado en una formulación mixta en la cual se interpolan los campos de esfuerzos axiales, momentos, torsores y bimomentos. Asímismo Alemdar (2001) ha desarrollado varios elementos mixtos para el análisis de la estabilidad de pórticos planos y tridimensionales.

Finalmente en (5) se hace referencia a la modelización de los fenómenos de fractura y daño mediante la teoría de la plasticidad, que ha supuesto la adaptación del método dando lugar a distintas líneas de trabajo: tamaño de los elementos y mallado para la localización del daño, la utilización de modelos de daño que ocupan una zona de tamaño característico (modelos de banda fisurada propuesto por Bazant y Planas en 1998, utilización del concepto de continuo no local introducido por Eringen en 1965, modelo de daño no local aparecido en 1987, etc.).

La extensión del método de los elementos finitos ha dado lugar a nuevas líneas de trabajo, dos de las cuales se comentan a continuación.

1.6. Aproximaciones mediante elementos línea

Jennings (20), propuso en su modelo de entramados planos para tener en cuenta no linealidades geométricas, modificar la rigidez del elemento frente a cargas axiales.

En la aproximación directa mediante elementos línea (1) (denominados por algunos autores en castellano como elementos capa) se discretiza la estructura y sus componentes en numerosos elementos viga a axil-flexión. La propiedad de cada elemento es usualmente uniforme y dependiente de una sección elegida en el elemento que es modelizada dividiéndola en capas que contemplan los distintos materiales. De forma que la rigidez del elemento línea se forma directamente de las propiedades de las capas de unas pocas secciones en el elemento (39) (23).

Un enfoque diferente con elementos denominado segmentados fue usado por Wong, Yeo y Warner en 1988 (45). Las propiedades de los segmentos son utilizadas para formar la matriz de rigidez del elemento permitiendo una reducción de la memoria y tiempo de uso. Sin embargo, aunque este método mejora la eficiencia de cálculo empeora la exactitud de la modelización geométrica.

Ambos elementos línea de Aas-Jakobsen *et al*. (1) y Wong *et al*. (45), fallan al intentar modelizar las no linealidades geométricas obligando a utilizar un número grande de elementos.

Finalmente, en el cuadro 1 debido a (44) se recoge un resumen de los distintos métodos aplicados por diversos investigadores a diferentes tipos de problemas.

1.7. Splines generalizados

Una forma alternativa de abordar problemas elásticos no lineales debido al comportamiento no lineal de la relación constitutiva de los materiales se puede conseguir mediante la utilización del concepto de pilar lineal equivalente (véase el esquema de la figura 3) que modeliza piezas no lineales debido al material mediante una discretización de elementos prismáticos lineales por lo que el problema general se resuelve en base a una serie de problemas lineales (31).

La aplicación de esta metodología conlleva los siguiente pasos:

- Linealización del problema. Como se ha indicado el problema elástico no lineal se resuelve mediante problemas lineales a través de la utilización del concepto de pilar lineal equivalente.
- La discretización de la relación (M,χ) en tramos de recta lo cual supone una discretización del pilar lineal equivalente.
- El problema linealizado se complementa con la utilización de la teoria de splines generalizados.

Para este tipo de problemas lineales a través de los cuales se resuelve el problema no

Cuadro 1

AUTOR	FECHA DE PUBLICACIÓN	NO LINEALIDAD	PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN	TIPO DE ELEMENTO
Aas-Jakobson y Grenacher	1974	Geométrica y material	Control de carga y desplazamiento (deformada)	Elemento línea
Crisfiel	1983	Geométrica y material	Carga combinada y control de desplazamiento (arco-longitud)	Elemento finito
Bazant, Pan y Pijaudier-Cabot	1987	Material	Control de desplazamiento	Elemento finito
Wong, Yeo y Warner	1988	Geométrica y material	Control de desplazamiento (curvatura)	Elemento línea segmentada
Sun, Bradford y Gilbert	1992,1994	Geométrica y material	Carga combinada y control de desplazamiento (arco-longitud)	Elemento finito
Kawano y Warner	1995	Geométrica y material	Control de carga y desplazamiento	Elemento finito
Wong y Warner	1997	Geométrica y material	Carga combinada y control de desplazamiento (arco-longitud)	Elemento línea

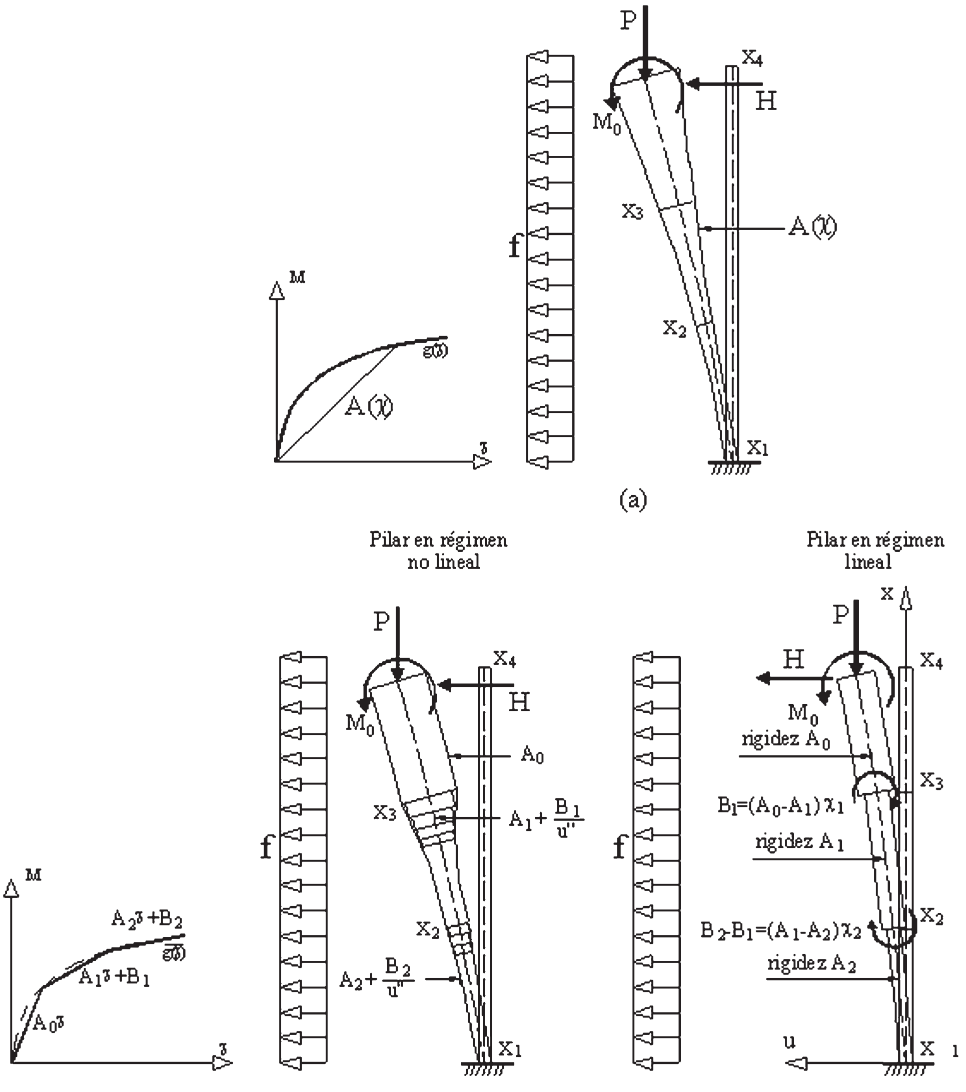

Figura 3. Pilar lineal equivalente.

lineal, los Splines Generalizados (37) permiten obtener soluciones nodalmente exactas para cada uno de los problemas lineales. De forma que si la ley momentos curvaturas es poligonal, la solución obtenida por el método podría ser la exacta en los nodos y aproximada en el interior de los tramos. Si existen acciones repartidas en los mismos y se utiliza el concepto de acción repartida equivalente (36) y (35), se puede obtener una aproximación óptima en cada tramo. En el caso de que no existieran cargas repartidas en los distintos tramos estaríamos en el caso de un problema de splines generalizados estrictamente hablando por lo que la solución sería exacta en el conjunto del pilar.

La idea de pilar lineal equivalente ha permitido crear dos técnicas para la resolución de piezas lineales sometidas a compresión: el primer método se denomina algebraico que es de utilidad para casos sencillos de geometría y carga, y un segundo método para condiciones generales de geometría y carga (31).

El método algebraico resulta ser una generalización de lo que ya se había hecho en análisis estructural en relación con la deducción de la ecuación de los tres momentos por Bertot en 1855 y Clapeyron en 1857. Aquí en definitiva lo que se plantea es un problema no lineal al ser las incógnitas las longitudes de los subintervalos, mientras que en los problemas lineales de splines generalizados dichas longitudes son datos y las incógnitas son, precisamente, las curvaturas. Por otra parte, el método general puede considerarse una variante del Método de los Elementos Finitos que se basa en la asignación de rigideces a los elementos de la discretización a través de un proceso de homotopía.

2. MÉTODOS NUMÉRICOS

En el apartado anterior se han indicado diversos métodos con los que resolver los distintos problemas que se plantean en el estudio de pilares. En general, las soluciones analíticas cerradas se reducen a casos particulares predominando los resultados numéricos y, por tanto, el carácter aproximado de las soluciones.

Entre la variedad de métodos numéricos habría que distinguir entre aquéllos que se aplican de forma particular a un determinado tipo de problemas como puede ser el método de la columna equivalente, de aquellos otros, de propósito general, caracterizados por una estrategia única que permite abordar una gran variedad de problemas como es el caso de los elementos finitos o elementos de contorno

En general, en el estudio de problemas no lineales se puede hablar de la existencia de dos líneas de trabajo: una ,en el área de la matemática, en la que se han aplicado métodos que tienen una cierta tradición como son los métodos de continuación o de homotopía. Y otra, en el campo de la técnica y, en especial, en el campo de los medios continuos y de las estructuras, en la que de una forma natural se empezaron estudiando problemas con una formulación lineal que dieron lugar a una serie de técnicas y formas de resolución: métodos matriciales, métodos de desplazamientos, compatibilidad, etc.

Su extensión a problemas no lineales ya venía de alguna manera marcada por los métodos utilizados en los problemas lineales. De esta forma los primeros métodos en el campo no lineal fueron los incrementales -utilizando el concepto de matriz de rigidez tangente- que fueron evolucionando por la línea de los métodos de Newton-Raphson, los cuales se vieron complementados por distintas técnicas de control para evitar situaciones de no convergencia o acumulación de errores.

Con la consideración de los métodos de continuación en el campo de la técnica quizás se pueda hablar finalmente de un acercamiento de métodos a la hora de tratar de resolver problemas no lineales.

En la literatura matemática el concepto de continuación u homotopía se puede encontrar en los años treinta. El uso de los métodos de continuación desde un enfoque numérico se atribuye a Davidenco (12) según Felippa (14).

Por su parte los métodos de continuación basados en el concepto de longitud de arco son atribuidos a Haselgovre (18) y Klopfenstein (24), aunque estas aportaciones permanecen olvidadas hasta finales de los años setenta.

También en la década citada el interés se dirige hacia algoritmos para el cálculo de "ramas-trayectorias generales". Los primeros trabajos sobre puntos límite se deben a Sharifi y Popov (40) y Sabir y Lock (38).

Al aplicar los métodos de continuación aparecen dificultades cuando se trata de encontrar los puntos críticos, asimismo las necesidades de analizar situaciones de post-pandeo y post-colapso han dado lugar a nuevos perfeccionamientos como la utilización de procedimientos con control de desplazamientos o cargas, en particular se aplican las técnicas de "longitud de arco" que introducen Riks (32) (33) y Wempner (42).

A diferencia de los matemáticos, los ingenieros, guiados por necesidades prácticas desarrollaron una serie de metodologías numéricas tratando de obtener resultados fiables dando lugar al desarrollo de diversas técnicas que, en el campo de las estructuras y de los medios continuos, se recoge en las líneas siguientes.

Los primeros trabajos sobre no linealidad geométrica aparecen en los años sesenta del siglo XX con las aportaciones de Holand y Moan (19), Kapur y Hart (21), Gallager *et al*. (17) (16). Los métodos incrementales fueron utilizados inicialmente por Turner *et al*. (41) y Argyris (3) (4). Estos métodos se extendieron al estudio de problemas con no linealidad del material (26) (46).

El uso de los métodos incrementales puso de relieve que se producía una acumulación de errores inadmisible por lo que se pasó a utilizar el método de Newton-Raphson tal y como hicieron Mallet y Marcal (25) y Oden (29). Sin embargo, el método de Newton-Raphson en su versión pura tiene un costo alto en cada iteración por lo que se utiliza el método de Newton Raphson modificado, cuasi-Newton y gradiente conjugado. El uso del método de Newton-Raphson modificado fue aconsejado por Oden (30) y Zienckiewicz (46).

Los métodos basados en la técnica cuasi-Newton se relacionan como ponen de relieve Nayak y Zienckiewicz (28) con los procedimientos de aceleración. Asimismo la utilización de métodos incrementales (predictor) e iterativos (corrector) se debe a Brebbia y Connor (6) mientras que Murray y Wilson (27) por su parte introducen los métodos de continuación en el campo de la ingeniería con el propósito de describir las trayectorias de estados de equilibrio.

3. CONCLUSIONES

A lo largo del tiempo se han propuesto distintos modelos y procedimientos numéricos con los que se trata de cuantificar algunos aspectos como la deformada, leyes de esfuerzos, trayectorias carga-deformación, determinación de puntos límite o críticos, etc. para resolver los problemas recogidos en la primera parte del presente trabajo. En el caso de problemas de carácter lineal se han logrado importantes resultados analíticos y se han propuesto distintos modelos y técnicas numéricas (Soutwell, Timoshenko, Engesser-Vianello, etc.), alcanzando un grado aceptable de desarrollo.

En el caso de problemas no lineales, bien sea debido al comportamiento del material o a las condiciones cinemáticas y geométricas han surgido diversas situaciones, algunas de las cuales se han mencionado en el presente trabajo

Aparte de la resolución exacta para algunos problemas particulares como las soluciones obtenidas por Jezek, Horne, Hauck y Lee. Otros autores proponen métodos aproximados como el de la columna equivalente (Von Karman), la deformada senoidal (Jezek), métodos de tiro (Newman), etc. Por otro lado, las técnicas de resolución basadas en la discretización adquieren gran difusión cuando se combina con el cálculo matricial de estructuras a partir del primer tercio del siglo XX (G. Korn (1939), Livesley (1956)). Desde mediados del siglo XX, el Método de los Elementos Finitos adquiere gran relevancia no solamente por su carácter sistemático sino por su fundamentación teórica en el campo de los métodos variacionales en la linea de Rayleigh-Ritz. Su extensión ha dado lugar a distintas variantes: junto a los elementos línea indicados en el apartado 1.6 se han mencionado dos métodos basados en la teoría de splines generalizados, los elementos finitos y la teoría del pilar equivalente (apartado 1.7).

Los distintos métodos utilizados para abordar los problemas no lineales van acompañados por la aplicación de técnicas numéricas: métodos de Newton-Raphson, métodos de continuación u homotopía, longitud de arco, etc., algunos de los cuales se mencionan en el apartado 2.

En el presente trabajo se han recogido los aspectos más destacados del análisis de elementos prismáticos con cargas axiles a compresión, poniéndose de relieve que la historia sobre su comportamiento se puede considerar que forma parte de la evolución de la mecánica de los medios continuos, incorporando los distintos fenómenos, sus métodos de análisis y las técnicas de resolución numérica. Ello ha enriquecido los conceptos de bifurcación y estabilidad en torno a los cuales gira la teoría de las piezas prismáticas sometidas a compresión.

BIBLIOGRAFIA

(1) AAS-JAKOBSEN, K. and GRENACHER, M.: "Analysis of Slender Reinforced Concrete Frames". IABSE, Publications. 1974.
(2) ALEMDAR, B. N. And WHITE, D. W.: "Displacement, Flexibility, and Mixed Beam-Column Finite Element Formulations for Distributed Plasticity Analysis". Journal of Structural Engineering. ASCE. December 2005.

(3) ARGYRIS, J. H.: ´´Recent Advances in Matrix Methods of Structureal Analysis´´. Pergamon Press. 1964.
(4) ARGYRIS, J. H.: "Continua and discontinua". Proc. Onf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech. Wright Patterson Air Force Base, Ohio. 1965.
(5) BAZANT, Z. P. and CEDOLIN, L.: ´´Stability of Structures´´. Oxford University Press, 1991
(6) BREBBIA, C. and CONNOR, J.: "Geometrically non-linear finite element analysis" Proc. ASCE J. Engng Mech. Div., Proc. 1969.
(7) CHEN, W. F., GOTO, Y. and LIEW, J. Y. R.: "Stability design of Semi-Rigid Frames". John Wiley and Sons. 1996.
(8) CHEONG SIAT MOY, F.:"General Analysis of Laterally Loaded Beams Columns" Journa of the Structural Division. ASCE, Vol. 100 No ST6 Proc Paper 10625 (1975).
(9) CHEN, W. F. and ATSUTA, T.: ´´Theory of Beam-Columns´´. Vols.1, 2, McGraw-Hill, 1976.
(10) CHEN, W. F. and THOMAS, S.: ´´Advanced Analysis of Steel Frames´´. CRC Press,1994.
(11) CHWALLA, E: "Theorie de aussermittig gedrückten Stabes aus Bausthal". Der Stahlbau. 1934.
(12) DAVIDENCO, D. F.: "On a New Method of Numerical Solution or Systems of Nonlinear Equations". Dokl. Akad. Nauk. USSR, 88, 601-602. 1953.
(13) DISQUE, R. O.: ´´Applied Plastic Design in Steel´´. Van Nostrand Reinhold Co. 1971.
(14) FELIPPA, C. A.: ´Introduction to the analysis of nonlinear elastic structures by the Finite Element Method´´. University of Colorado at Boulder.
(15) GALAMBOS, T. V.: ´´Structural Members and Frames.´´ Prentice-Hall, Inc. 1968.
(16) GALLAGER, R. J. and PADLOG, J.: "Discrete element approach to structural stability". Am. Inst. Aero.& Astro. J. 1(6), 1437-1439.1966.
(17) GALLAGER, R. J., GELLATLY, R. A. PADLOG, J. and MALLET, R. H.: "A discrete element procedure for thin shell instability analysis". Am. Inst Aero. & Astro. J., 5 (19), 138-145. 1967.
(18) HASELGROVE, C. B.: "The solution of Nonlinear Equations and of Differential Equations with Two-Points Boundary Conditions". Computer J., 4. 255-259. 1961.
(19) HOLAND, I. and MOAN, T.: "The finite element in plate bukling". Finite Element Method. In Stress Analisys, ed. I. Holand *et al*., Tapir. 1969.
(20) JENNINGS, A.: "Frame analysis Including Change of Geometry", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94. Pp. 627-644. 1968
(21) KAPUR, W. W. and HARTZ, B. J.: "Stability of plates using the finite element method", Proc. ASCE, J. Engng. Mech, 92, EM2, 177-195 1966.
(22) KARMÁN, T. V.: "Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gabiete des Ingenieurwesens". 1910
(23) KAWANO, A. and WARNER, R. F.: "Nonlinear Analisys of the Time Dependent Behaviour of Reinforced Concrete Frames". Research Report Nº R125, Dep. of Civil and Environemental Engineering, The University of Adelaide. 1995.
(24) KLOPFESTEIN, R. W.: "Zeros of Nonlinear Functions". J. ACM, 8. 366-373.1961.
(25) MALLET, R. H. and MARCAL, P. V.: "Finite element Analysis of non-linear structures". Proc.ASCE, J. Engng. Mech.94, ST9, 2081-2105. 1968.
(26) MARCAL, P. V.: "Finite element Analysis with material non-lineearities-theory and practise". Recent Advances in Matrix Methods of structural Analysis and Design, ed. R. H. Gallager et al. The University of Alabama Press pp. 257-282. 1971.
(27) MURRAY, E. W. and WILSON, E. L.: "An approximate non-linear analysis of thin-plates". Proc. Air Force 2nd Conf. On Matrix Meth. In Struct. Mech., Srigth-Patterson Air Force Base, Ohio. 1968.
(28) NAYAK, G. C. and ZIENCKIEWICZ, O. C.: "Note on the "alpha-constant" stiffness method of the analysis of non-linear problems". Int. J. Num. Meth. In Engng., 4, 579-582. 1972.
(29) ODEN, J. T.: "Numérical formulation of non-linear elasticity problems". Proc. ASCE, J. Struct. Div. 93, ST3, paper 5290. 1967.
(30) ODEN, J. T.: "Finite element aplications in non-linear structural analysis", Proc. Conf. On Finite Element aplications in non-linear structural analysis". Proc. Conf. On Finite element Meth. Vanderbilt University Tennessee. 1969.
(31) ORTEGA, M. A.: ´´Análisis del pandeo de pilares en régimen no lineal mediante splines generalizados.´´ Tesis Doctoral, E. T. S. Ingenieros de Caminos, UPM. 2004.
(32) RIKS, E.: "The Application of Newton´s Method to the Problem of Elastic Stability". Trans. ASME, J. Appl. Mech. (1972).
(33) RIKS, E.: "An incremental approach to the solution of snapping and bukling problems". Int. J. Solids and structs. 15, 529-551. 1979.
(34) ROS, M. and BRUNNER, J.: "Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl". Eidg. Materialprüfungsanstalt an der E.T.H.. 1926
(35) ROMERO, J. L., ORTEGA, M. A. y CORRALES, J. M.: "Estudio y resolución del modelo de viga de Timoshenko. Algoritmo de acciones equivalentes". V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería. Madrid, 3-6 de Junio de 2002
(36) ROMERO, J. L. y ORTEGA, M. A.: "Acciones equivalentes y solución en desplazamientos interpolada en la viga de Bernoulli-Euler". Informes de la Construcción, Vol. 49. N0 454, pp. 5-27,1998.
(37) ROMERO, J. L. y ORTEGA, M. A.: "Splines generalizados y solución nodal exacta en el método de elementos finitos", Informes de la Construcción, Vol. 51. Nº 464, pp. 41-85, 1999.
(38) SABIR, A. B. and LOCK, A. C.: "The application of finite elements to the larger-deflection geometrically non-lineart behaviour of cylindrical shells". Proc. Int. Conf on Var. Meth in Engng., Southampton Univ., Session VII, 67-76 1972
(39) SUN, C. H., BRADFORD, M. A. and GILBERT, R. I.: "A Reliable Numerical Method for Simulating the Post-Failure Behaviour of Concrete Frame Structures". Computers and Structures. 1994.
(40) SHARIFI, P. and POPOV, E. P.: "Non linear buckling analysis of sandwich arches". Proc. Asce, J. Engng Mech. Div, 97. 1397-1411. 1971.

(41) TURNNER, M. J., DILL, E. H., MARTIN H. C. and MELOSH, R. J.: "Large deflection analysis of complex structures subjected to heating and external loads". J. Aerospace Sci., 27. 1960.
(42) WEMPNER, G. A.: "Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids". Int. J. Structures. (1971).
(43) WESTERGAARD, H. M. and OSGOOD, W. R.: "Strength of Steel Columns". Trac. Of the Amer. Soc. of Mech. Engineers. 1928.
(44) WONG, K. W. and WARNER, R. F.:"Non-linear analysis of concrete frames using direct stifness line element approach". Research Report Nº R-158. Department of Civil and Environmental Engineering. University of Adelaide. 1997.
(45) WONG, K. W., YEO, M. F. and WARNER, R. F.: "Non-linear Behaviour of Reinforced Concrete Frames". Civil Engineering Transctions, Institution of Engineers, Australia. 1988.
(46) ZIENCKIEWICZ, O. C.: ´´El método de los Elementos finitos´´. Reverte. 1982

* * *