

445 - 8

cálculo elemental de láminas en paraboloides hiperbólicos

Dr. A. L. PARME



Introducción

El rápido aumento del interés en una de las más modernas formas constructivas de cubiertas laminares—el paraboloides hiperbólico—se debe fundamentalmente a su económica forma de utilizar los materiales de construcción, a la sencillez de su comportamiento estructural y a su belleza intrínseca.

El paraboloides hiperbólico es uno de los tipos de construcción que utiliza eficazmente el material, confiando su resistencia más a su forma que a su masa. La doble curvatura hace posible que la carga se transfiera a los soportes enteramente por esfuerzos directos, de forma que todo el material de una sección transversal de la lámina trabaja uniformemente.

Aunque las dificultades matemáticas oscurecen el estudio del paraboloides hiperbólico durante muchos años, se demostrará, en lo que sigue, que los principios estáticos en que se basa no son difíciles de entender ni de aplicar, y que el proyecto puede ser estudiado tan fácilmente como el proyecto de otros muchos tipos de estructuras.

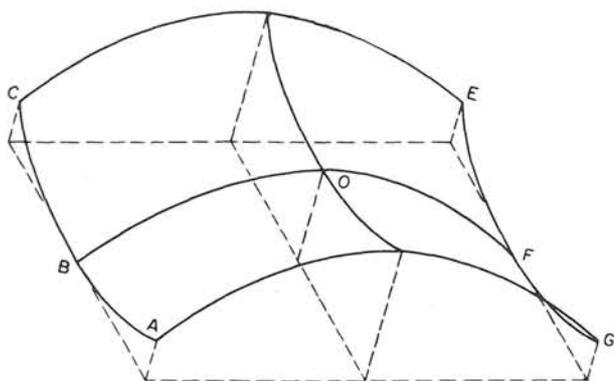


Fig. 1

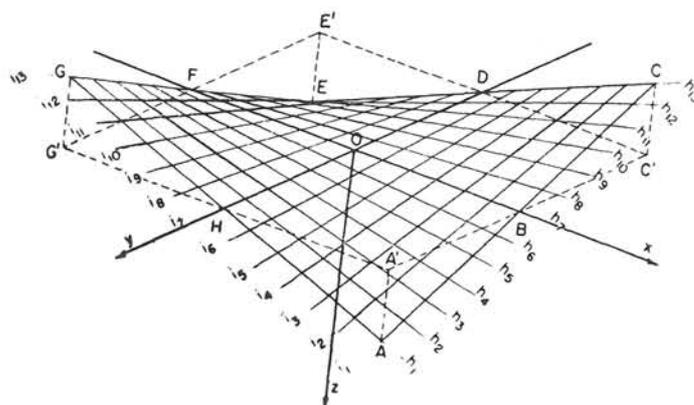


Fig. 2.—Definición de la superficie.

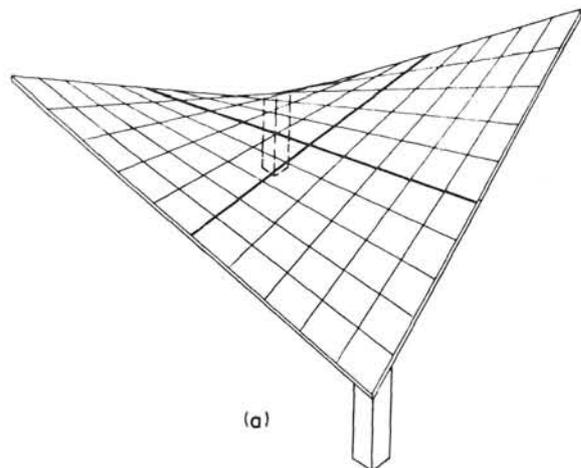
La economía en la construcción y la sencillez del proyecto del paraboloide hiperbólico permite al arquitecto apartarse de la práctica convencional que obliga a la estructura a adaptarse a redes de miembros lineales distribuidos en tres planos perpendiculares y le permite, igualmente, utilizar imaginativamente la serie de graciosas formas que puede des-

arrollarse a partir del elemento básico de paraboloide hiperbólico.

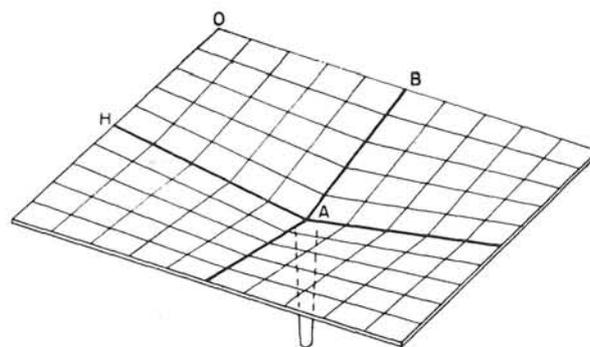
Definición de la superficie

La superficie doblemente curvada del paraboloide hiperbólico puede definirse de dos formas: o

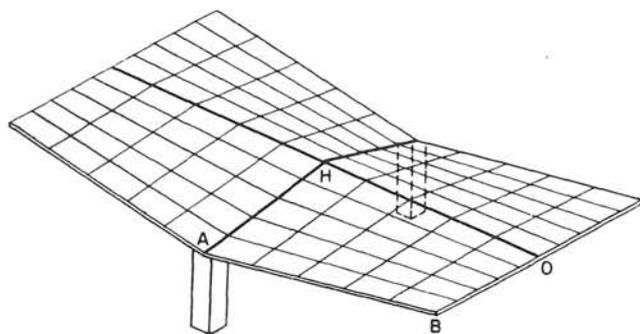
Fig. 3.—(Las vigas de borde y las tirantes no son visibles.)



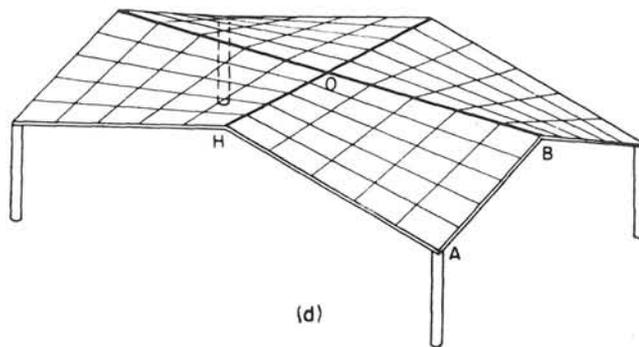
(a)



(b)



(c)



(d)

bien como una superficie de traslación o bien como un paralelogramo alabeado. En el primer caso, la superficie se engendra trasladando o moviendo una parábola vertical que tenga su convexidad dirigida hacia arriba sobre otra parábola que tiene su convexidad dirigida hacia abajo y obligando a la parábola que se mueve, a permanecer en un plano perpendicular al plano que contiene a la parábola fija y que se conserva paralelo a sí mismo. Todo esto aparece gráficamente en la figura 1, en la que la superficie, en forma de silla de montar, está engendrada moviéndose la parábola ABC sobre la parábola BOF.

La superficie del paraboloides hiperbólico puede también ser engendrada como se ve en la figura 2, moviendo sobre el eje Y una línea recta que se conserva paralela a XZ, pero que gira al mismo tiempo que se desliza a lo largo de la línea ABC. La superficie resultante se representa en la figura 2 por la red de líneas rectas h_n e i_n , y cada punto de esta superficie puede ser considerado como la intersección de dos de estas líneas contenidas en la misma. Puede imaginarse la superficie considerando el plano horizontal A'C'E'C' al que se alabea, obligando a descender verticalmente a las esquinas A' y E', hasta sus nuevas posiciones A y E. Las líneas rectas h_n e i_n son, desde luego, más largas en la superficie alabeada que en la superficie horizontal proyectada, condición necesaria para que una intersección tal como A pueda permanecer directamente sobre A'.

Formas estructurales

Puede desarrollarse una gran variedad de formas de cubiertas, o bien utilizando la superficie total alabeada o combinando partes de ella de diversas formas. En la figura 3 aparecen dibujadas algunas de estas posibilidades.

La superficie dibujada en la figura 3a se ha utilizado con éxito para dar un aspecto llamativo a estructuras tan diversas como iglesias, bancos y restaurantes. Se trata de la superficie alabeada completa, idéntica a la que aparece en la figura 2.

Las superficies de las figuras 3b, 3c y 3d están formadas combinando de diversas formas un cuadrante de la superficie de la figura 2. Por ejemplo, considérese el cuadrante ABOH, en el cual las líneas BO y OH son horizontales, coincidiendo con los ejes OX y OY. En la figura 3b se han unido cuatro de estos cuadrantes con los bordes horizontales de de cada uno de ellos al exterior de la cubierta y todas las esquinas que son puntos bajos sobre la única columna central. A esta forma se le llama comúnmente «paraguas invertido».

En la figura 3c los bordes HO y OB de los cuadrantes adyacentes son horizontales, mientras que los puntos bajos A están sobre una de las dos co-

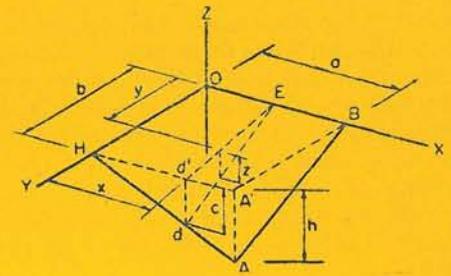


Fig. 4

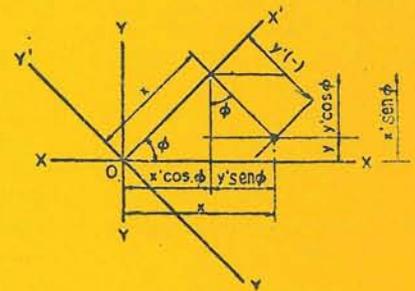


Fig. 5

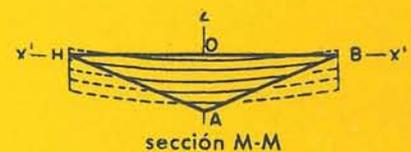
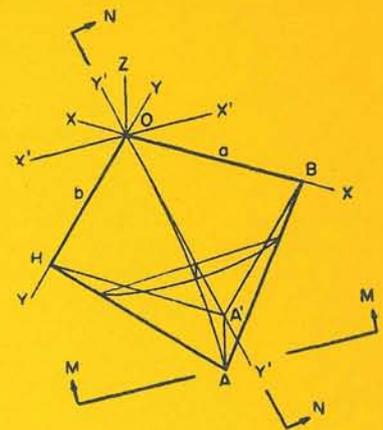


Fig. 6

lumnas. Una disposición análoga de las otras tres partes de la cubierta da como resultado una limatesa horizontal y dos bordes horizontales exteriores. En contraste con la figura 3c, las dos limatesas de la figura 3d son horizontales, estando inclinado el techo hacia cada una de las cuatro columnas de las esquinas. Los tipos de cubiertas de las figuras 3b, 3c y 3d son muy apropiados para cubrir las grandes áreas rectangulares, corrientes en las plantas industriales.

Construcción

Una de las principales economías del paraboloides hiperbólico consiste en que su encofrado es muy sencillo, a pesar de que la superficie de doble curvatura tiene el aspecto de presentar un complicado problema al encofrar. Debido a que la superficie está definida por dos sistemas de líneas rectas que se cortan, el encofrado necesita solamente vigas rectas de madera como generatrices. La superficie alabeada continua puede obtenerse simplemente al cubrir estas vigas con hojas de tablero contrachapado flexible.

Las tensiones en la cubierta del paraboloides hiperbólico son bajas y necesitan solamente un espesor mínimo de hormigón. De hecho, la cubierta del «Pabellón de Rayos Cósmicos», en la Universidad de Méjico, tiene un espesor de 5/8 de pulgada. Sin embargo, en general, el espesor de la lámina está limitado por el recubrimiento exigido por la armadura, siendo tres pulgadas una cifra media.

Geometría

El estudio del paraboloides hiperbólico puede reducirse al cuadrante básico ABOH de la superficie señalada en la figura 2. Refiriéndonos a la figura 4, cualquier punto de la superficie puede definirse en función de x , y y z , siendo z igual al producto de las coordenadas x e y por una constante h/ab . Por ejemplo, en el triángulo HA'A, por triángulos semejantes:

$$\frac{c}{h} = \frac{x}{a} \quad \text{ó} \quad c = \frac{xh}{a}$$

Igualmente en el triángulo Ed'd,

$$\frac{z}{c} = \frac{y}{b}$$

de donde:

$$z = \frac{yc}{b} = \left(\frac{y}{b}\right) \left(\frac{xh}{a}\right) = xy \left(\frac{h}{ab}\right)$$

Haciendo $k = \frac{h}{ab}$:

$$z = kxy \quad [1]$$

Por comodidad en el estudio, los ejes OX y OY, tal como aparecen en la figura 4 se giran un ángulo $\Phi = 45^\circ$, de forma que el eje OY' quede en el mismo plano vertical de OA. Utilizando las fórmulas analíticas para la transformación de coordenadas por rotación y haciendo $\Phi = 45^\circ$ en la figura 5, tenemos:

$$x = x' \cos \Phi - y' \sin \Phi = 0,707 (x' - y') \quad [2a]$$

y

$$y = y' \cos \Phi + x' \sin \Phi = 0,707 (x' + y') \quad [2b]$$

Sustituyendo las ecuaciones [2a] y [2b] en la ecuación [1], se tiene:

$$z = kxy = 0,5k(x' + y')(x' - y') = 0,5k[(x')^2 - (y')^2] \quad [3]$$

que define la superficie del paraboloides hiperbólico en función del nuevo sistema de coordenadas. La posición de las coordenadas después del giro en el cuadrante ABOH aparece en la figura 6.

Es posible estudiar las propiedades físicas de la superficie introduciendo los valores específicos de x' , y' y z en la ecuación [3]. Cuando x' es constante:

$$z - 0,5k(x')^2 = z - k_1 = z' = -0,5k(y')^2 \quad [4]$$

que es la ecuación de una parábola que está contenida en un plano paralelo al Y'Z. El vértice de la parábola definida al hacer $x' = 0$, coincide con el origen de los ejes X', Y' y Z; pero para cualquier otro valor de x' el vértice está sobre el plano X'Y'. En cualquier caso los ejes principales de todas estas parábolas son paralelos al eje Z y se conservan en el plano X'Z.

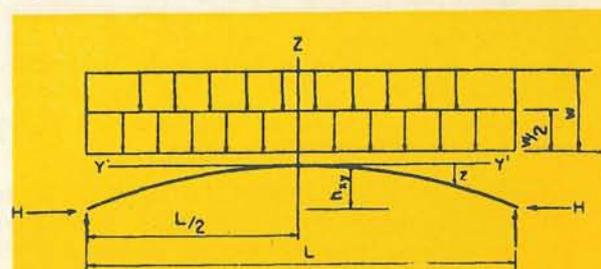
De una forma análoga, si y' es constante:

$$z + 0,5k(y')^2 = z + k_2 = z' = 0,5k(x')^2 \quad [5]$$

La ecuación [5] es la expresión general de una parábola cuyo plano es paralelo al Y'Z. Si $y' = 0$ la ecuación representa una parábola cuyo vértice coincide con el origen. Cualquier otro valor de y' define una parábola que tiene su vértice bajo el plano X'Y', pero con su eje principal paralelo al eje Z y contenido en el plano Y'Z.

Es importante notar en las ecuaciones [4] y [5] que para cualquier superficie alabeada dada, el valor de x' o y' varía sin afectar el término $0,5k$ que

Fig. 7



aparece en la ecuación de la parábola. Como consecuencia, todas las parábolas en ambas direcciones tienen la misma forma. Nótese también que una de las expresiones es positiva, mientras que la otra es negativa. Esta diferencia de signos indica que las parábolas paralelas al plano X'Z son cóncavas hacia arriba, mientras que las parábolas del plano Y'Z son cóncavas hacia abajo.

Si se le da a z un valor constante en la ecuación [3]:

$$1 = k_s[(x')^2 - (y')^2] \quad [6]$$

Esta es la ecuación de una sección por un plano horizontal que corta a la superficie alabeada y cuya cota depende del valor particular dado a la z . Este plano, al cortar a la superficie, define una hipérbola, siendo esta la razón de la denominación de paraboloides hiperbólicos que se aplica a esta superficie.

Proyecto

En la figura 7 aparece un arco parabólico típico que representa una franja aislada paralela al plano Y'Z. Puesto que la superficie está formada enteramente por dos series de arcos parabólicos, una de ellas normal a la otra, y tales que todos tienen la misma forma, puede suponerse que la carga total w se divide igualmente en dos direcciones. Por lo tanto, un arco dado sostiene una carga de intensidad $w/2$.

El momento flector interno en un arco biarticulado es igual al momento flector de una viga simple, menos el momento debido a la reacción horizontal H . El momento flector en el centro de una viga simple debido a la carga uniforme es $\left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{L^2}{8}\right)$

El momento flector de un arco parabólico que soporta solamente una carga uniforme es nulo. De aquí que el momento producido por la reacción horizontal debe ser igual y opuesto al momento flector de una viga sencilla. Así, pues, el momento de la reacción Hh_{xy} en el centro del vano es:

$$H(-h_{xy}) = \frac{w}{2} \frac{L^2}{8} \quad [7a]$$

o

$$H = -\frac{w}{4} \frac{L^2}{4h_{xy}} \quad [7b]$$

Pero la expresión, para todos los arcos de esta dirección aparece en la ecuación [4], y es:

$$z' = -0,5k(y')^2$$

$$\text{Siendo } z' = h_{xy} \text{ y } y' = \frac{L}{2}$$

$$h_{xy} = -0,5k \left(\frac{L^2}{4}\right)$$

$$\text{o bien: } \frac{L^2}{4h_{xy}} = -\frac{1}{0,5k}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación [7b] se obtiene:

$$H = -\frac{w}{4} \left[-\frac{1}{0,5k}\right] = \frac{w}{2k} = \frac{wab}{2h} \quad [8]$$

La ecuación [8] da el esfuerzo de tracción o de compresión producido en la lámina por una carga uniforme. La lámina debe estar armada solamente para este esfuerzo. Realmente, puesto que la inclinación de la superficie aumenta al aproximarse a los soportes, la carga no es estrictamente uniforme, pero la diferencia respecto a la distribución uniforme es insignificante.

Comprobación del estudio realizado

En los párrafos anteriores se ha supuesto que los arcos están adecuadamente apoyados en sus arranques. A continuación se demostrará la validez de esta hipótesis.

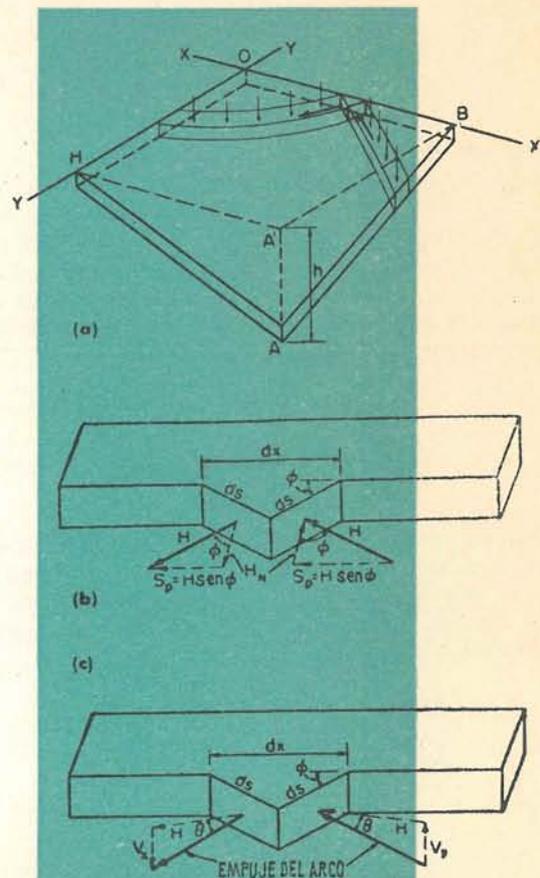


Fig. 8

La figura 8a indica la posición teórica de los arcos parabólicos típicos y señala su acción sobre los elementos de borde de las cubiertas. Cada arco ejerce a la vez una acción vertical y otra horizontal sobre sus arranques. Se ve en la figura 8b que en el punto en el que se cortan dos arcos perpendiculares las componentes normales H_n de \vec{H} son iguales en magnitud, pero opuestas en dirección. Debido a esto, ambas componentes se anulan entre sí y no existe fuerza normal que actúe sobre los bordes.

Las otras componentes de la fuerza horizontal H llamadas S_p en la figura 8b actúan en la misma dirección para las dos series de arcos y, por lo tanto, son aditivas. Al aplicarse a un elemento de superficie de longitud ds , cada una de las fuerzas vale $S_p ds$ o bien $H \sin \Phi ds$. Para determinar la intensidad de los esfuerzos tangenciales S por unidad de longitud a lo largo de la línea de borde, se establece el equilibrio de fuerzas paralelas al borde actuando sobre el pequeño elemento triangular:

$$2H \sin \Phi ds = S dx$$

de donde:

$$S = 2H \sin \Phi \frac{ds}{dx} = 2H \sin \Phi \cos \Phi$$

Haciendo $\Phi = 45^\circ$ y $H = \frac{w}{2k}$:

$$S = 2 \left[\frac{0,5k}{2k} \right] = \frac{w}{2k} = \frac{wab}{2h} \quad [9]$$

El efecto de las componentes verticales V a lo largo de los bordes horizontales OB y OH es diferente del efecto sobre los bordes inclinados AB y AH . En cualquier caso, debido a que la línea de empujes en un arco parabólico que soporta una carga uniforme coincide con la línea de centros de gravedad, la componente vertical combinada en un punto cualquiera debida a los empujes de los dos arcos es:

$$V = \Sigma H \tan \theta = H \frac{dz}{dy'} + H \frac{dz}{dx'} \quad [10]$$

fórmula en la que el ángulo θ está contenido en un plano vertical y se mide desde la línea de empujes hasta su proyección horizontal como aparece en la figura 8c. De la ecuación [3] se obtiene la pendiente de los arcos que es:

$$\frac{dz}{dy'} = (-0,5k)(2y') = -ky' \quad [11a]$$

y

$$\frac{dz}{dx'} = (0,5k)(2x') = +kx' \quad [11b]$$

En un punto cualquiera del borde horizontal OH , $x' = y'$ como se ve en la figura 6. Así, pues, de las ecuaciones [11] se deduce que las inclinaciones deben ser iguales, pero de signos opuestos. Las componentes verticales, así, pues, se anulan porque son iguales en magnitud y de dirección opuesta. También se anulan las componentes verticales a lo largo del borde OB .

Si los bordes están inclinados, las coordenadas x' e y' no son iguales en cualquier punto. Siendo el borde OB en la figura 6 igual en longitud a a y OH

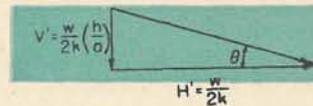


Fig. 9

igual a b , la ecuación de la línea AB es, de acuerdo con la expresión general $y = mx + b$:

$$y' = x' - a\sqrt{2} \quad [12]$$

Sustituyendo este valor en la ecuación [11] se tienen las pendientes de los arcos en el borde AB , que son:

$$\frac{dz}{dy'} = -k(x' - a\sqrt{2}) \quad [13a]$$

y

$$\frac{dz}{dx'} = kx' \quad [13b]$$

Al sustituir la ecuación [10], la componente vertical pura del empuje del arco en el borde es:

$$V = H[-k(x' - a\sqrt{2})] + H(kx') = Hka\sqrt{2} \quad [14]$$

Haciendo $k = \frac{h}{ab}$ la ecuación [14] puede escribirse:

$$V = H \frac{h}{ab} a\sqrt{2} = \frac{Hh\sqrt{2}}{b} \quad [15]$$

La fuerza V se aplica sobre un elemento de superficie que tiene la longitud ds , como aparece en la figura 8c. Para determinar la intensidad V' por unidad de longitud de línea de borde:

$$V'dx = Vds = \frac{Hh\sqrt{2}}{b} ds$$

$$V' = V \frac{ds}{dx} = V \cos \Phi = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

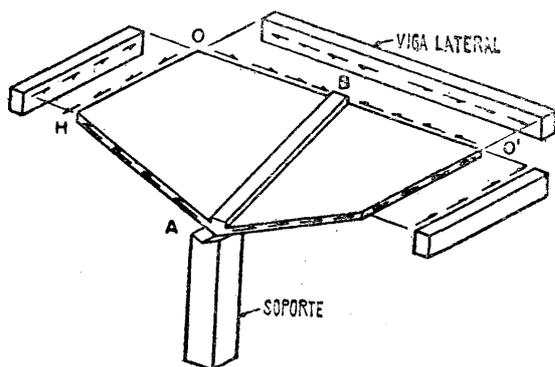


Fig. 10

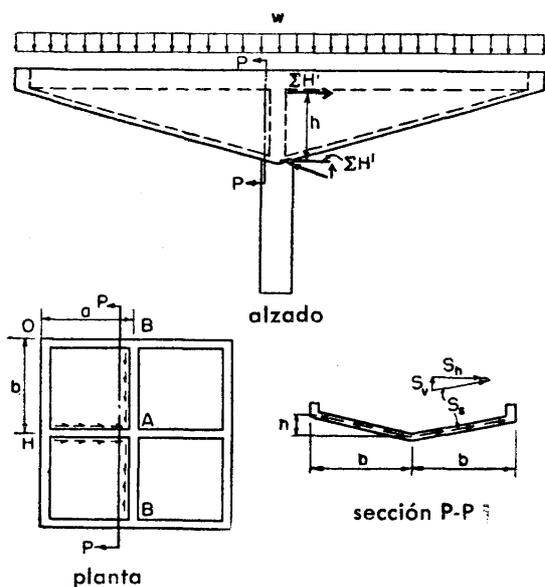


Fig. 11

Así, pues, de la ecuación [15]:

$$V' = \frac{Hh\sqrt{2}}{b} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{Hh}{b} \quad [16a]$$

De forma similar puede demostrarse que la fuerza vertical ejercida por la lámina a lo largo del borde HA es:

$$V' = \frac{Hh}{a} \quad [16b]$$

Si no existe ninguna otra fuerza a lo largo de los bordes inclinados, la lámina exigiría soportes verticales. Sin embargo, como previamente se ha demostrado, los arcos ejercen simultáneamente una fuerza horizontal en el plano del borde. Las dos fuerzas horizontal y vertical se combinan como se ve en la figura 9 para producir una fuerza resultante paralela al borde.

En suma, el resultado de la interacción de los dos sistemas de elementos de arcos es que ejercen

solamente fuerzas tangenciales paralelas a los bordes. Así, pues, la hipótesis de que los extremos de los arcos se hallan adecuadamente sustentados está justificada, puesto que el soporte adecuado está producido por la presencia de miembros paralelos a los propios bordes como se ve en la figura 10.

Comprobación estática

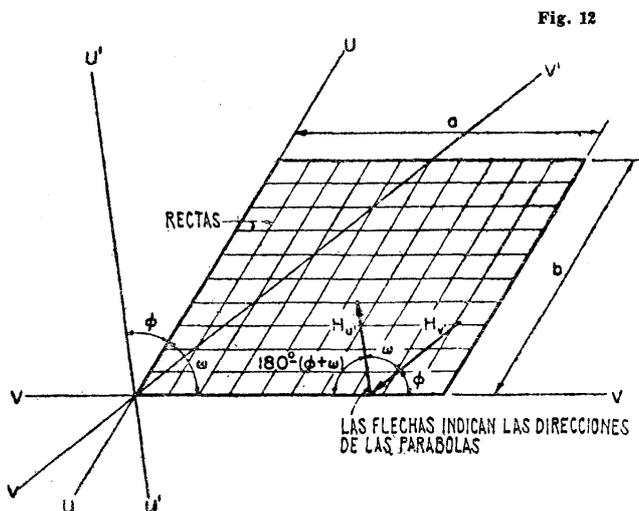
El empuje horizontal dado por la ecuación [8] puede ser comprobado al compararlo con el empuje determinado estáticamente considerando la lámina total como un cuerpo aislado. En el alzado de la figura 11 se supone que la estructura, a la izquierda de la sección PP, es una ménsula que soporta la carga uniforme w . El momento en la sección PP es igual $2wba \frac{a}{2}$. Dividiendo este momento por la altura h se obtiene el empuje:

$$\frac{2wba^2}{2} \left(\frac{1}{h} \right) = \frac{wba^2}{h} \quad [17]$$

La fuerza expresada en la ecuación [17] puede ser considerada como la fuerza que se presenta en las alas superior e inferior de una viga en doble T, cuyas alas están aquí representadas por las vigas de borde. En la viga de borde más baja o inclinada este empuje es la componente horizontal del esfuerzo axial en la viga. La componente vertical es:

$$\frac{wba^2}{h} \left(\frac{h}{a} \right) = wba \quad [18]$$

Esto indica que de la carga vertical total sobre la cubierta, $2wba$, aplicada a la izquierda de la sección PP, una fracción wba se transmite a lo largo de la viga HA, y que el resto, $2wba - wba = wba$, debe transmitirse a lo largo de la viga AB y AB' tal como se ve en la planta de la figura 11. Los esfuer-



Paraboloides hiperbólicos esviados

El estudio anterior se refiere a los paraboloides hiperbólicos cuya planta es rectangular. Sin embargo, el mismo procedimiento puede aplicarse al caso más general de cubiertas esviadas en plantas como la que se ve en la figura 12. En este caso la superficie está definida por la ecuación:

$$z = \frac{h}{ab} uv \quad [20]$$

en la cual u y v representan coordenadas oblicuas. En este sistema la situación de un punto está definida por una distancia u medida paralelamente al eje U y por una distancia v medida paralelamente al eje V . De aquí que la superficie contiene también dos sistemas de líneas rectas paralelas a los ejes coordenados U y V .

Al igual que en la superficie rectangular, es necesario, en primer lugar, determinar las direcciones del arco parabólico que transmitirá la carga. El procedimiento para determinar estas direcciones aparece desarrollado en el apéndice. Brevemente, consiste en girar los ejes U y V (fig. 12) oblicuos entre sí y formando el ángulo ω en un ángulo Φ hasta la nueva posición U' y V' . El ángulo de rotación Φ que define la posición de las parábolas se da por la expresión:

$$\text{sen } \Phi = \frac{\text{sen } \omega}{\sqrt{2}} \quad [21]$$

Fig. 14

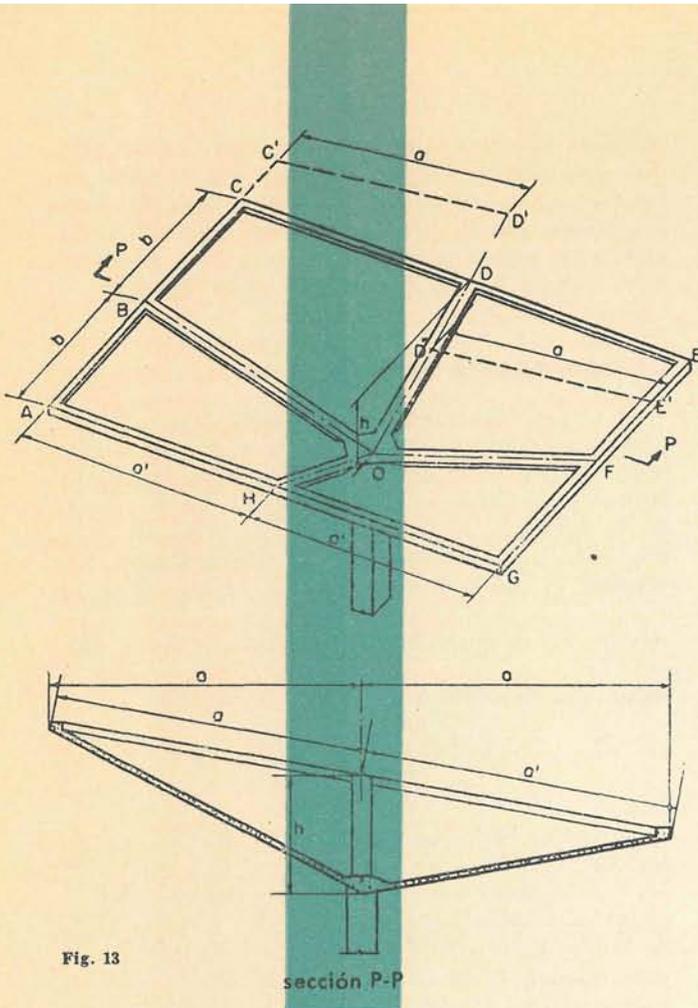
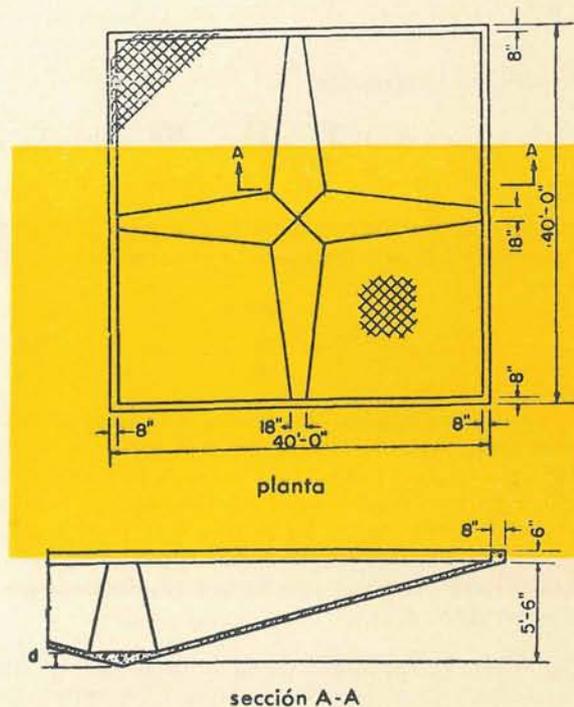


Fig. 13

zos tangenciales que actúan sobre la lámina adyacente a estas vigas aparecen en la sección PP , y las componentes verticales de estas tangenciales deben añadirse a la carga wba . Llamando S_s a la intensidad del esfuerzo tangencial por unidad de longitud en la dirección inclinada y suponiéndolo uniformemente distribuido a lo largo del borde, el esfuerzo tangencial total en la dirección inclinada se obtiene multiplicando S_s por la longitud inclinada total, o sea.

$$S_s \left(2\sqrt{h^2 + b^2} \right)$$

La componente vertical total se expresa entonces:

$$S_s \left(2\sqrt{h^2 + b^2} \right) \left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right) = wba$$

de donde:

$$S_s = \frac{wba}{2h} = \frac{w}{2k} \quad [19]$$

que coincide con la ecuación [9].

Debe notarse que S_v en la sección PP , figura 11, no es un esfuerzo tangencial vertical, sino la componente vertical del empuje de la lámina. La presencia de un esfuerzo tangencial radial exigiría una flexión de la lámina, sollicitación que no existe bajo una carga uniforme.

Nótese que las parábolas, igualmente que los ejes, se cortan formando un ángulo ω en lugar de ser perpendiculares entre sí como en la cubierta rectangular.

Como se ve en el desarrollo realizado en el apéndice, el empuje del arco en la lámina inclinada es:

$$H_{V'} = \left(\frac{wab}{4h} \right) \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} (\omega - \Phi)} \quad [22a]$$

y

$$H_{U'} = \left(\frac{wab}{4h} \right) \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} (\omega + \Phi)} \quad [22b]$$

en las que las ecuaciones [22] corresponden a la ecuación [8] y dan los empujes inducidos en las direcciones V' y U' . Los esfuerzos tangenciales en el contorno son iguales a:

$$S = \frac{wab}{2h} \operatorname{sen} \omega \quad [23]$$

Igualmente, los cálculos realizados en el apéndice demuestran que las componentes horizontales de los empujes de dos arcos cualquiera se combinan de forma que no se ejerza ninguna fuerza normal al borde. Solamente existen esfuerzos tangenciales paralelos al contorno, y éstos pueden ser resistidos realmente por un elemento de borde.

Paraboloides hiperbólicos inclinados

En los cálculos anteriores se supone que cada paraboloides hiperbólico tiene dos vigas de borde

horizontales. Sin embargo, ésta no es una condición necesaria. El método es igualmente adecuado para un paraboloides hiperbólico inclinado como el que aparece en la figura 13. Por ejemplo, cada cuadrante de la estructura que aparece en la citada figura se compone de un paraboloides hiperbólico con un borde horizontal y tres inclinados. La magnitud de las fuerzas interiores que actúan en los arcos puede ser determinada suponiendo que las láminas se extiendan en el cuadrante $BCDO$, de forma que los dos bordes BC' y $C'D'$ son horizontales y sustituyendo las dimensiones del cuadrante $BC'D'O$ en la ecuación [9]. Puesto que en los cálculos anteriores se demuestra que las componentes del empuje del arco perpendicular a secciones paralelas al eje se anulan entre sí, los esfuerzos obtenidos para el cuadrante $BC'D'O$ son válidos igualmente para el cuadrante $BCDO$, incluso aunque el borde CD sea libre. Si se realiza la precedente operación en términos generales, la ecuación resultante se reduce a:

$$H = \pm \frac{wab}{2h} \quad [24]$$

La ecuación [24] es la misma que la ecuación [9]. Debe hacerse notar que la dimensión a es la longitud proyectada en lugar de la verdadera longitud de la viga de borde. La misma expresión puede obtenerse considerando el cuadrante $DEFO$. Los bordes horizontales en este caso son $E'F$ y $E'D''$ o bien EE' y $E'D''$, y las dimensiones serán las de $D'E'FO$ o bien las de $D'E'ED$, que pueden utilizarse para sustituirlas en la ecuación [9]. Como anteriormente, la fuerza total en cualquiera de las vigas de borde es igual a la suma de las fuerzas

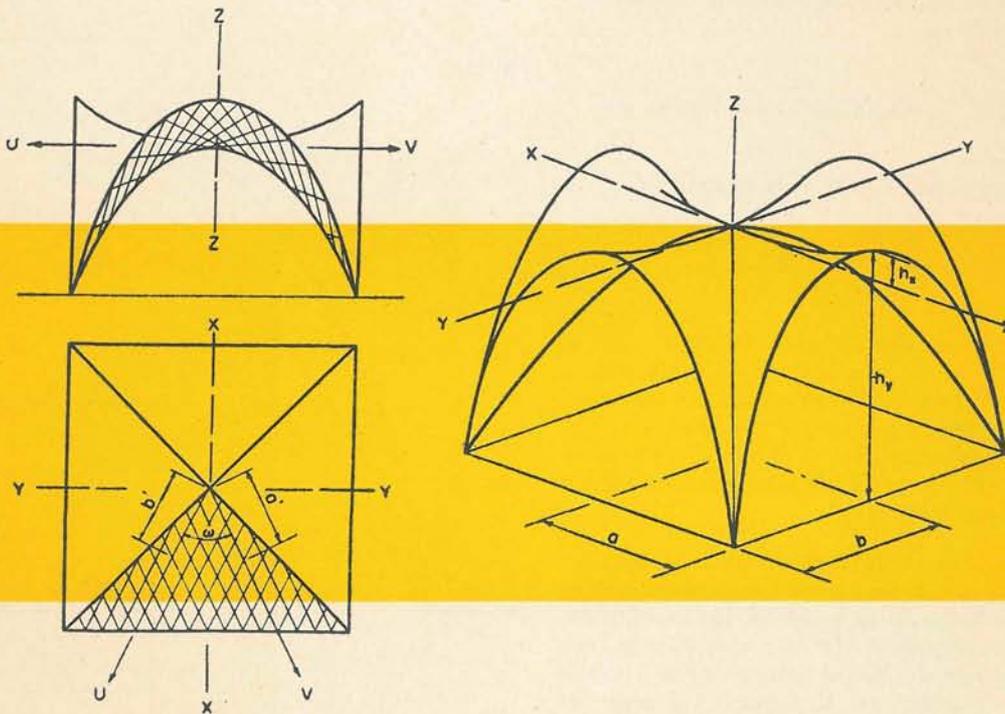


Fig. 13

tangenciales que actúan a lo largo de toda su longitud. Por ejemplo:

$$T = \frac{wab}{2h} a', \text{ etc.} \quad [25]$$

El ejemplo siguiente ilustra el proyecto de una cubierta típica en paraboloides hiperbólico.

Ejemplo

Considérese una unidad de cubierta de la forma que aparece en la figura 3b con sus bordes exteriores horizontales. Se elige una unidad de 40×40 pies en planta como módulo típico de la superficie en planta diáfana necesaria generalmente para edificios industriales. Debido a que las tensiones de compresión en el hormigón son muy bajas, el espesor de la lámina está limitado solamente por el recubrimiento adecuado para la armadura, y en este caso se elige un espesor de tres pulgadas. La flecha vertical h de la lámina, desde el soporte hasta la viga de borde exterior, es de 5,5 pies. Se añade una sobrecarga viva de 30 psf más 5 psf para tener en cuenta el peso de la viga de borde, a las 37,5 psf del peso propio de la lámina para obtener en total una carga uniforme w de 72,5 psf.

El empuje horizontal creado en los arcos parabólicos por esta carga es, según la ecuación [8]:

$$H = \pm \frac{wab}{2h} = \pm \frac{72,5 \times 20 \times 20}{2 \times 5,5} = \pm 2.640 \text{ libras/pie}$$

La armadura necesaria para resistir el empuje negativo de tracción es:

$$A_s = \frac{2.640}{20.000} = 0,132 \text{ pulgadas cuadradas/pie}$$

La tensión de compresión en el hormigón es:

$$f_c = \frac{2.640}{3 \times 12} = 74 \text{ psi}$$

Aunque no se señala ninguna armadura en la dirección de los arcos parabólicos en compresión, deberá utilizarse una cantidad nominal para tener en cuenta las tensiones de retracción. En la fig. 14 se ve la armadura colocada en diagonal, pero si se tiene en cuenta la dirección de las tensiones puede colocarse paralela a los ejes.

La fuerza total en cualquiera de las vigas de borde es igual a la suma de los esfuerzos tangenciales que actúan a lo largo de su longitud. En los elementos de borde horizontales de este ejemplo, la tensión en la esquina de la cubierta es nula y crece hasta un valor máximo en el centro. Así, pues, el

esfuerzo máximo es igual a la suma de los esfuerzos tangenciales que actúan solamente sobre la mitad de la longitud de la viga de borde.

La tensión en las vigas de borde horizontales es:

$$H_a = 2.640 \times 20 = 52.800 \text{ libras}$$

de donde:

$$A_s = \frac{52.800}{20.000} = 2,64 \text{ pulgadas cuadradas}$$

El acero debe distribuirse de forma tal que su centro de gravedad coincida con la línea de aplicación de las fuerzas tangenciales, o bien, en caso de que no se disponga así, ha de tenerse en cuenta la excentricidad. En relación con esto, debe tenerse en cuenta al proyectar los elementos de borde el efecto de los momentos secundarios inducidos a las zonas próximas a las esquinas.

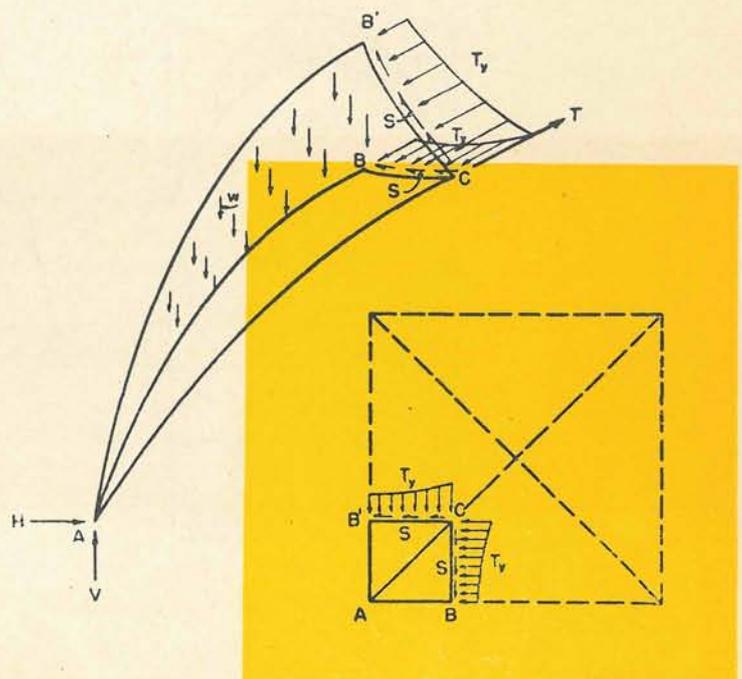
La compresión en los elementos de borde inclinados es:

$$2Ha \frac{20,75}{20} = 2 \times 52.800 \times \frac{20,75}{20} = 109.560 \text{ libras}$$

Nótese que el esfuerzo tangencial a cada uno de los dos lados de un elemento inclinado contribuye a su esfuerzo axial total.

Hay una cuestión a estudiar, y es la tensión admisible y método de cálculo a seguir al determinar la superficie del elemento de compresión que ha de considerarse en la parte baja de la lámina, en

Fig. 16



el «valle». Puesto que se trata de un miembro solicitado exclusivamente por un empuje axil con pequeña excentricidad, está indicado el uso de las fórmulas para columnas. Pero como al mismo tiempo trabaja como el ala de una viga en doble T, en la que la lámina hace de alma, también está justificado el uso de las fórmulas de tensión admisible de compresión, en flexión. Para unas dimensiones medias, el área de la sección obtenida a partir de las fórmulas para columnas es pequeña y no se rechaza un proyecto por haber admitido esta interpretación conservadora. Más aún, es muy de desear el reducir al mínimo las deformaciones en los miembros de borde para hacer mínimos también los momentos flectores creados por la acción mutua de lámina y viga. Aunque el estudio de la lámina realizado no incluye el efecto de la no existencia de deformaciones paralelas a la viga de borde, las deformaciones que se presentan en dicha viga se reflejan en la lámina, puesto que ambas están integralmente unidas. Este efecto se reduce siempre que las vigas sean ligeramente mayores que lo estrictamente necesario.

Utilizando las fórmulas standard para columnas con cercos con una cuantía en acero de $p_g = 0,01$, el área total necesaria para la viga inclinada es:

$$A_g = \frac{P}{0,8(0,225f_c + f_s p_g)} = \frac{109.560}{540 + 16.000 \times 0,01} = 157 \text{ pulgadas cuadradas}$$

Con una flecha de 5,5 pies en 20 pies, el canto d que aparece en la sección AA de la figura 14 es:

$$d = \sqrt{\frac{157 \times 5,5}{20}} = 7 \text{ pulgadas}$$

En este punto se utilizará un canto de 9 pulgadas para disponer de una resistencia suficiente para el caso de asimetría de cargas.

Bóvedas por arista

El procedimiento que se ha descrito esquemáticamente—estudio de la lámina reduciéndolo al estudio del comportamiento de los arcos aislados—puede también utilizarse para otro tipo de láminas. Una de éstas es la bóveda por arista formada por la superficie del paraboloide hiperbólico tal como aparece en la figura 15. Aunque por motivos de mayor claridad solamente aparece una planta rectangular, las bóvedas que se cortan pueden adaptarse de muchas formas a plantas triangulares o poligonales. La principal diferencia entre las láminas estudiadas anteriormente y las bóvedas por arista está en que en el primer caso los bordes libres estaban colocados a lo largo de las generatrices rectas, pero en

este caso los bordes se presentan, tal como aparece en la figura 15, paralelos a los arcos. Para un elemento particularizado, según hemos obtenido antes, la ecuación de la superficie es:

$$z = kuv = \frac{h_x}{a'b'} uv \quad [26]$$

Esta expresión puede transformarse en la forma:

$$z = -h_x \left(\frac{x}{a}\right)^2 + h_y \left(\frac{y}{b}\right)^2 \quad [27]$$

que puede ser más cómoda para preparar una tabulación y estudiar la disposición general.

En el caso de la bóveda por arista, presenta ciertas ventajas el considerar los arcos paralelos y perpendiculares a los bordes libres. Se ve claramente que los arcos normales al borde libre, al no estar apoyados en este borde, pueden ofrecer una pobre resistencia ante las cargas. De aquí que las cargas son soportadas principalmente por los arcos paralelos a los bordes libres. En el caso de una carga uniforme, estos arcos están completamente libres de flexión y, por lo tanto, la carga se transmite directamente a la intersección de las bóvedas en forma de empuje axil puro. La componente horizontal de este empuje es simplemente igual a $wa^2/2h_y$ o $wb^2/2h_x$, dependiendo de la bóveda que se esté considerando. Sin embargo, para este tipo de paraboloides hiperbólicos, el peso muerto de la estructura no puede tomarse como uniforme, puesto que el peso por unidad de superficie en planta es considerablemente mayor en el soporte que en la clave.

Para este tipo de cargas, si se considera la lámina como una serie de arcos independientes paralelos a los bordes libres, cada arco está sujeto a una flexión combinada con empuje axil. Aunque estos momentos flectores calculados en los arcos serían relativamente pequeños, no existen, sin embargo, en la lámina. De aquí que sea necesaria una modificación en el cálculo general de arcos.

Puesto que los arcos han de estar completamente libres de flexión, la línea de empujes debe seguir el eje del arco. La carga muerta no puede, por sí misma, satisfacer esta exigencia. Sin embargo, cada arco tiene tendencia a flectar, creando una diferencia de esfuerzo cortante entre él y el arco adyacente. Esta diferencia de cortantes entre los diferentes elementos, puede ser considerada como una carga exterior sobre el mismo arco. La magnitud y distribución de este esfuerzo cortante debe ser tal que la línea de empujes producida por la combinación de esfuerzo cortante y carga muerta coincida con la línea eje del arco. Puesto que el borde de la lámina está completamente libre de esfuerzo cortante, debería empezarse, a partir de este plano y por un método de iteración determinar el esfuerzo cortante necesario en las distintas secciones para

mantener los arcos libres de flexión. Pero este procedimiento sería largo y complicado. Para simplificar la tarea, la tabla 1 da unos coeficientes que afectan a los esfuerzos y que permite un cálculo rápido de los esfuerzos internos a lo largo de una lámina. Para obtener una solución generalizada hemos encontrado más ventajoso el resolver las ecuaciones diferenciales que se refieren al comportamiento de la lámina, que el realizar un estudio complicado de los arcos. Aún se simplifica más el trabajo suponiendo que el peso muerto varía como sigue:

$$w = w_c \left[k_1 + k_2 \cos \frac{\pi y}{2b} \right] \quad [28]$$

En la tabla 1, T_x , T_y y S representan las fuerzas interiores que actúan en el plano tangente de la superficie, en libras por pie, en diferentes puntos de la lámina determinados por y/b en la primera columna y por $(1 - x/a) \cdot \sqrt{h_x/h_y}$ en la primera fila.

Tal como aparecen en la tabla 1 las fórmulas y coeficientes son aplicables solamente a láminas en las que $h_x \neq 0$. Si esta dimensión h_x es nula, la bóveda por arista no está ya formada por paraboloides hiperbólicos. Los elementos componentes son cilindros parabólicos. Las fórmulas, para la condición límite $h_x = 0$, se transforman en:

$$T_x = \frac{k_2 a^2}{16 h_y} w_c k \left[\pi^2 \left(1 - \frac{x}{a} \right) \cos \frac{\pi y}{2b} \right] \quad [29a]$$

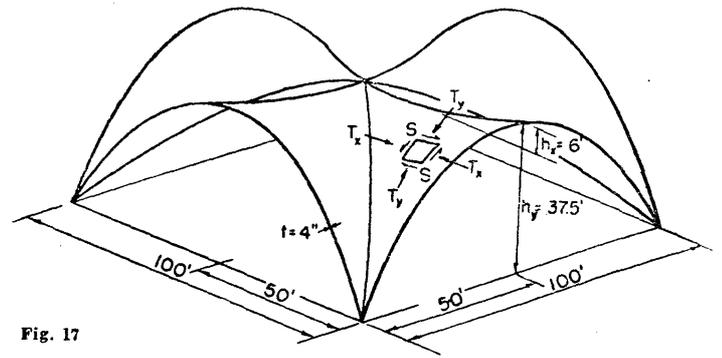
$$T_y = - \frac{k_1 b^2}{2 h_y} \frac{w_c}{k} \left[\frac{k_2}{k_1} \cos \frac{\pi y}{2b} + 1 \right] \quad [29b]$$

$$S = \frac{k_2 a b}{4 h_y} w_c \left[\pi \left(1 - \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2b} \right] \quad [29c]$$

La significación de los distintos símbolos es la misma que en la tabla.

El estudio anterior se ha basado en la hipótesis de que la lámina está rígidamente soportada a lo largo de la intersección de las bóvedas. Puesto que éste no es el caso, la arista debe proyectarse de forma que transmita la reacción de la lámina al soporte. Dependiendo del tipo de soporte, esta arista puede ser considerada o bien como un arco empotrado o bien doblemente articulado. Para pequeños vanos, debido a la pequeña rigidez de la clave, es posible considerar la arista como un arco triarticulado.

Para determinar los momentos y las tensiones producidos en el arco, es necesario hacer una hipótesis respecto a qué zona de la lámina actúa como tal arco. Con una hipótesis muy conservadora, puede suponerse que el semiancho del arco es igual a ocho veces el espesor de la lámina. Para obtener una cifra más cerca de la realidad, puede suponerse que la anchura efectiva de colaboración es igual a $1,52 \sqrt{rt}$, fórmula en la cual r es el radio medio



en la intersección. Incluso si se supone una anchura eficaz constante, el momento de inercia cambiará debido a que la sección de clave del centro del arco depende del ángulo bajo el cual se cortan las dos láminas adyacentes, puesto que el ángulo V es más agudo en las zonas próximas a la esquina.

El estudio del arco se reduce a obtener la reacción horizontal desconocida mediante la consideración de los momentos producidos por las cargas exteriores y las propiedades elásticas del arco. Pueden utilizarse dos métodos para determinar la carga a la que está sujeto el arco. El primero y más normal es el considerar las fuerzas internas actuando en la lámina a lo largo de la intersección. Estas fuerzas se descomponen en sus componentes horizontal y vertical en el plano del arco y se utilizan como cargas exteriores. Este método tiene la desventaja de que la determinación del ángulo en las intersecciones y las componentes de las fuerzas paralelas al arco es complicada.

El segundo método que aparece en la figura 16, consiste en considerar una sección completa de la lámina como un cuerpo aislado. En este cuerpo aislado puede obtenerse rápidamente el momento paralelo a la dirección del eje del arco producido por las cargas exteriores. Por ejemplo, el momento en C es igual a la suma algebraica de los momentos de la carga w y de la reacción V , igual que en un arco ordinario, y de los momentos de las fuerzas internas T_y y S . Las fuerzas internas se calculan a partir de la tabla 1. Para estos esfuerzos debe utilizarse la componente del momento que actúa paralelamente al eje del arco. Es necesario obtener la inclinación de las fuerzas T_y y S antes de seguir adelante con la suma de momentos. El ángulo ψ que T_y forma con la horizontal, se obtiene a partir de la relación:

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{2 h_y y}{b^2} \quad [30a]$$

y el ángulo Φ entre la fuerza S y la horizontal a partir de la relación:

$$\operatorname{tang} \Phi = \frac{2 h_x x}{a^2} \quad [30b]$$

Tabla 1 - Fuerzas interiores en las bóvedas para arista para peso muerto

Fuerza	$\frac{b}{y}$	$(1 - \frac{d}{x}) \sqrt{\frac{d}{h_x/h_y}}$															
		0	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32	0.36	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65

$$T_x = \frac{k_2 a^2}{k_2 a^2} w_c k \quad (\text{coeficiente})$$

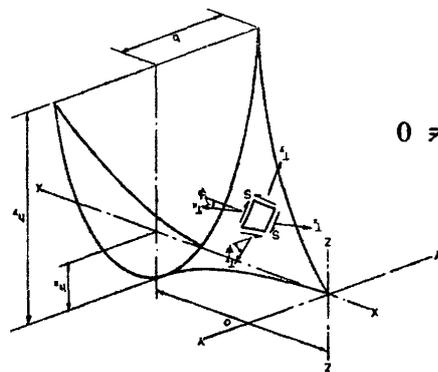
0	.0000	.0020	.0079	.0177	.0314	.0489	.0702	.0952	.1237	.1557	.1910	.2396	.2929	.3506	.4122	.4775	.5460	.6173
0.10	.0000	.0019	.0078	.0175	.0310	.0483	.0694	.0940	.1222	.1538	.1886	.2366	.2893	.3462	.4071	.4716	.5393	.6097
0.20	.0000	.0039	.0158	.0299	.0465	.0668	.0905	.1176	.1481	.1816	.2178	.2679	.3220	.3804	.4417	.5055	.5717	.6400
0.30	.0000	.0070	.0270	.0508	.0780	.1086	.1436	.1826	.2248	.2702	.3187	.3702	.4246	.4819	.5417	.6038	.6673	.7320
0.40	.0000	.0116	.0416	.0854	.1343	.0254	.0396	.0568	.0770	.1001	.1259	.1545	.1868	.2210	.2573	.2955	.3355	.3769
0.50	.0000	.0164	.0556	.1125	.0222	.0346	.0497	.0673	.0875	.1101	.1350	.1624	.1921	.2239	.2576	.2931	.3303	.3689
0.60	.0000	.0212	.0745	.0125	.0222	.0346	.0497	.0673	.0875	.1101	.1350	.1624	.1921	.2239	.2576	.2931	.3303	.3689
0.70	.0000	.0260	.0912	.0125	.0222	.0346	.0497	.0673	.0875	.1101	.1350	.1624	.1921	.2239	.2576	.2931	.3303	.3689
0.80	.0000	.0308	.1086	.0125	.0222	.0346	.0497	.0673	.0875	.1101	.1350	.1624	.1921	.2239	.2576	.2931	.3303	.3689
0.90	.0000	.0356	.1274	.0125	.0222	.0346	.0497	.0673	.0875	.1101	.1350	.1624	.1921	.2239	.2576	.2931	.3303	.3689
1.00	.0000	.0404	.1462	.0125	.0222	.0346	.0497	.0673	.0875	.1101	.1350	.1624	.1921	.2239	.2576	.2931	.3303	.3689

$$T_y = - \frac{k_1 b^2}{k_1 b^2} w_c \left[1 + \frac{k_1}{k_2} \right] \quad (\text{coeficiente})$$

0	1.0000	.9980	.9921	.9823	.9686	.9511	.9298	.9048	.8763	.8443	.8090	.7604	.7071	.6494	.5878	.5225	.4540	.3827
0.10	.9877	.9857	.9799	.9702	.9567	.9393	.9183	.8937	.8655	.8334	.7964	.7510	.6984	.6415	.5805	.5161	.4484	.3780
0.20	.9511	.9492	.9436	.9342	.9212	.9045	.8843	.8605	.8334	.8030	.7694	.7232	.6725	.6177	.5590	.4969	.4318	.3640
0.30	.8910	.8892	.8840	.8752	.8630	.8474	.8284	.8062	.7808	.7523	.7208	.6775	.6300	.5787	.5237	.4655	.4045	.3410
0.40	.8090	.8074	.8026	.7947	.7836	.7694	.7522	.7320	.7089	.6831	.6545	.6152	.5721	.5254	.4755	.4227	.3673	.3096
0.50	.7071	.7057	.7015	.6946	.6849	.6725	.6574	.6398	.6196	.5970	.5721	.5377	.5000	.4592	.4156	.3695	.3210	.2706
0.60	.5878	.5866	.5831	.5774	.5693	.5590	.5465	.5318	.5151	.4963	.4755	.4470	.4156	.3817	.3455	.3071	.2668	.2249
0.70	.4540	.4531	.4504	.4459	.4397	.4318	.4221	.4108	.3978	.3833	.3673	.3522	.3210	.2948	.2668	.2372	.2061	.1737
0.80	.3090	.3084	.3066	.3035	.2993	.2939	.2873	.2796	.2708	.2609	.2500	.2350	.2185	.2007	.1816	.1615	.1403	.1183
0.90	.1564	.1561	.1552	.1537	.1515	.1488	.1454	.1415	.1371	.1321	.1266	.1190	.1106	.1016	.0919	.0817	.0710	.0599
1.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

$$S = \frac{k_2 ab}{2\sqrt{h_x h_y}} w_c \quad (\text{coeficiente})$$

0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.10	.0000	.0098	.0196	.0293	.0389	.0483	.0576	.0666	.0754	.0838	.0920	.1016	.1106	.1190	.1266	.1334	.1394	.1445
0.20	.0000	.0194	.0387	.0579	.0768	.0955	.1138	.1316	.1489	.1656	.1816	.1970	.2118	.2250	.2350	.2435	.2500	.2553
0.30	.0000	.0285	.0569	.0851	.1129	.1403	.1671	.1933	.2187	.2433	.2669	.2948	.3210	.3452	.3673	.3871	.4045	.4194
0.40	.0000	.0369	.0737	.1101	.1462	.1816	.2164	.2503	.2832	.3150	.3455	.3817	.4156	.4470	.4755	.5012	.5237	.5430
0.50	.0000	.0444	.0886	.1325	.1759	.2185	.2603	.3011	.3407	.3789	.4156	.4592	.5000	.5377	.5721	.6029	.6300	.6533
0.60	.0000	.0508	.1014	.1516	.2012	.2500	.2978	.3445	.3897	.4335	.4755	.5254	.5721	.6152	.6545	.6898	.7208	.7474
0.70	.0000	.0559	.1117	.1670	.2216	.2753	.3280	.3794	.4292	.4774	.5237	.5787	.6300	.6775	.7208	.7597	.7939	.8232
0.80	.0000	.0597	.1192	.1782	.2365	.2939	.3501	.4049	.4582	.5096	.5590	.6064	.6515	.6984	.7394	.7799	.8150	.8474
0.90	.0000	.0620	.1238	.1851	.2456	.3052	.3636	.4205	.4758	.5292	.5806	.6294	.6755	.7194	.7604	.7991	.8342	.8600
1.00	.0000	.0628	.1253	.1874	.2487	.3090	.3681	.4258	.4818	.5358	.5878	.6374	.6845	.7294	.7721	.8126	.8500	.8840



NOTA: $h_x \neq 0$

$$w_c = \text{valor de la sobrecarga repartida en clave}$$

$$k = \frac{\sqrt{1 + \left[\frac{2h_x}{a} \right] \left(\frac{x}{a} \right) \left[\frac{d}{y} \right]^2}}{\sqrt{1 + \left[\frac{2h_y}{b} \right] \left(\frac{y}{b} \right) \left[\frac{d}{z} \right]^2}}$$

$$k_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{2h_y}{b} \right)^2}$$

$$k_2 = 1 - k_1$$

Ejemplo

El siguiente ejemplo ilustra el proyecto de una bóveda por arista típica, utilizando la tabla 1.

Considérese la unidad dibujada en la figura 17. La cubierta tiene 100×100 pies en planta con una altura máxima de $h_y = 37,5$ pies. La flecha del arco central es $h_x = 6,0$ pies, y el espesor de la lámina es de 4 pulgadas. El peso muerto de la lámina, elementos de cobertura, etc., es de $w_c = 60$ psf, con una carga viva máxima de 30 psf.

Antes de proceder al cálculo de los esfuerzos internos hay que determinar el valor de las constantes k_1 y k_2 , a partir de las expresiones que aparecen en la tabla 1:

$$k_1 = \sqrt{1 + (2h_y/b)^2} = \sqrt{1 + (2 \times 37,5/50)^2} = 1,8$$

$$k_2 = 1 - k_1 = 1 - 1,8 = -0,80$$

y

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{-0,8}{1,8} = -0,444$$

Obtendremos los esfuerzos interiores para intervalos de $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{b}$, de 0,2, así que los coeficientes k deben también determinarse para estos mismos puntos a partir de las relaciones de la misma tabla 1.

Por ejemplo en el punto $\frac{x}{a} = 0,6$, $\frac{y}{b} = 0,4$:

$$k = \sqrt{\frac{1 + [(2h_x/a)(x/a)]^2}{1 + [(2h_y/b)(y/b)]^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + [(2 \times 6/50)(0,6)]^2}{1 + [(2 \times 37,5/50)(0,4)]^2}} = 0,866$$

Los valores del coeficiente k para el resto de los puntos de la lámina aparecen en la primera parte de la tabla 2.

Ya tenemos todas las constantes necesarias para calcular los esfuerzos interiores. Vamos a seguir el proceso para calcular los esfuerzos internos en el mismo punto anterior $\frac{x}{a} = 0,6$, $\frac{y}{b} = 0,4$.

De la tabla 1, para $\frac{y}{b} = 0,4$, y

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right) \sqrt{h_x/h_y} = (1 - 0,6) \sqrt{6/37,5} = 0,16$$

los coeficientes para las T_x , T_y y S son 0,0254, 0,7836 y 0,1462, respectivamente. Utilizando las ecuaciones que aparecen en la tabla 1,

$$T_x = \frac{k_2 a^2}{2h_x} w_c k \text{ (coeficiente)} =$$

$$= \frac{-0,8 \times 50^2}{2 \times 6} \times 60 \times 0,866 \times 0,0254 =$$

$$= -220 \text{ libras/pie.}$$

$$T_y = -\frac{k_1 b^2}{2h_y} \left(\frac{w_c}{k}\right) \left[1 + \frac{k_2}{k_1} \text{ (coeficiente)}\right]$$

$$= -\frac{1,8 \times 50^2}{2 \times 37,5} \times \frac{60}{0,866} \left[1 - 0,444 \times 0,7836\right] =$$

$$= -2,709 \text{ libras/pie.}$$

$$S = \frac{k_2 ab}{2 \sqrt{h_x h_y}} w_c \text{ (coeficiente)} =$$

$$= \frac{-0,8 \times 50 \times 50}{2 \sqrt{6 \times 37,5}} \times 60 \times 0,1462 =$$

$$= -585 \text{ libras/pie.}$$

Las fuerzas interiores debidas al peso muerto para toda la lámina aparecen en la tabla 2. Debe hacerse notar que los valores que deberían aparecer bajo la línea quebrada de trazos horizontales no aparecen, puesto que corresponden a puntos que quedan por debajo de la bóveda. El cálculo de las constantes en puntos fuera de los límites de la lámina, sólo es preciso realizarlo cuando sea necesario el obtener valores en la propia bóveda por interpolación.

Como ya se ha dicho, las sobrecargas uniformes, tales como la carga viva, se transmiten a los arranques por puro empuje axial; así, pues, sólo se producirán tensiones T_y para este tipo de carga. La componente horizontal T_y^H de este empuje con una carga viva de 30 psf. en todos los puntos de la lámina es:

$$T_y^H = \frac{w a^2}{2h_y} = \frac{30 \times 50^2}{2 \times 37,5} = 1.000 \text{ libras/pie.}$$

El empuje axial se obtiene de:

$$T_y = \frac{T_y^H}{\cos \psi}$$

donde el ángulo ψ se obtiene a partir de la ecuación [30a]:

$$\tan \psi = \frac{2h_y y}{b^2}$$

Para todos los puntos a lo largo de la línea $\frac{y}{b} = 0,4$,

$$\tan \psi = \frac{2 \times 37,5}{50} \times 0,4 = 0,6$$

así, pues,

$$\cos \psi = 0,857.$$

Por lo tanto: $T_y = -\frac{1.000}{0,857} = -1.166$ libras/pie,

y el esfuerzo final debido al peso muerto más la sobrecarga viva es:

$$T_y = -(2.709 + 1.166) = -3.875 \text{ libras/pie}$$

Los esfuerzos internos T_x y S son función exclusivamente de la carga muerta y no aumentan por el efecto de la sobrecarga viva.

El examen de la tabla 2 muestra que los esfuerzos son de compresión sobre toda la lámina. Más aún, su magnitud es muy pequeña. El máximo esfuerzo de compresión T_y , se presenta en $\frac{x}{a} = 1,0$, $\frac{y}{b} = 1,0$. El esfuerzo creado por la sobrecarga viva en este punto es -1.803 libras/pie, y el producido por el peso muerto se obtiene a partir de la tabla 2 y resulta ser -6.316 libras/pie. Así, pues, la tensión máxima de compresión es:

$$f_c = \frac{1.803 + 6.316}{4 \times 12} = -169 \text{ psi}$$

Las tensiones de compresión, debido a la T_x , son considerablemente menores. La máxima tensión transversal aparece en la tabla 2 y resulta ser:

$$v = \frac{866}{4 \times 12} = 18 \text{ psi}$$

Estudiando la tabla 2 es evidente que las tensiones resultantes son pequeñas; así, pues, no será necesario contar con ellas. Aunque la tensión obtenida más arriba no exija armadura alguna, es conveniente el proveer, al menos, la cuantía mínima de acero especificado por el Código ACI para resistir las cargas asimétricas y las tensiones debidas a los cambios de volumen.

El último paso es el estudio y proyecto del arco de arista por cualquiera de los procedimientos ya descritos. Las fuerzas que se calculan en la tabla 2 pueden realmente utilizarse para determinar las cargas a las que este arco estará sujeto.

Cargas asimétricas

En la discusión anterior se supuso que todos los cuadrantes estaban igual y uniformemente cargados. Sin embargo, en ciertos casos, tales como en el del «paraguas invertido», que aparece en la figura 3b, puede ser necesario investigar el efecto de la carga asimétrica o de una carga lateral.

Para comprender fácilmente el comportamiento de una lámina sometida a carga asimétrica es preferible el considerar la acción de la lámina y la de la viga de borde por separado. Más aún, en un primer estudio, debe considerarse a la viga de borde sustentada de forma parecida al enclavamiento ficticio que se supone en el método de la distribución de momentos.

De las relaciones físicas que acaban de mencionarse se deduce que una sobrecarga uniforme sobre

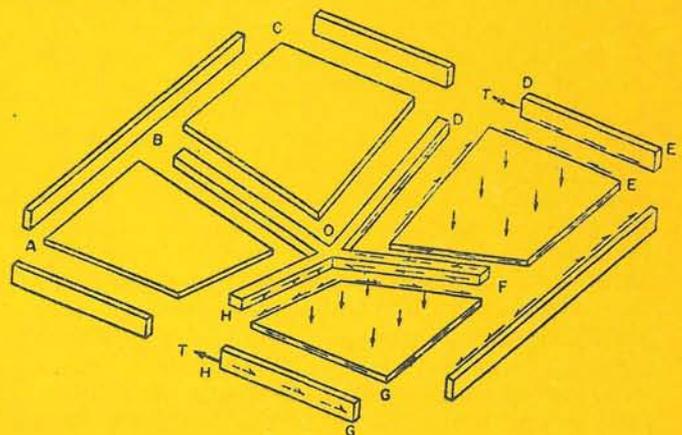
Tabla 2 - Coeficiente k y fuerzas interiores para pesos muertos en el ejemplo de bóveda por arista

	$\frac{y}{b}$	$\frac{x}{a}$					
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
		$[1 - (x/a)] \sqrt{h_x/h_y}$					
		0.40	0.32	0.24	0.16	0.08	0
k	0	1.000	1.001	1.005	1.010	1.018	1.028
	0.2		0.959	0.962	0.968	0.975	0.985
	0.4			0.861	0.866	0.873	0.882
	0.6				0.751	0.757	0.764
	0.8					0.652	0.658
	1.0						0.570
T_x	0	-1910	-1238	-706	-317	-80	0
	0.2		-1128	-643	-289	-73	0
	0.4			-489	-220	-56	0
	0.6				-139	-35	0
	0.8					-16	0
	1.0						0
T_y	0	-2305	-2195	-2101	-2030	-1977	-1945
	0.2		-2363	-2272	-2196	-2143	-2110
	0.4			-2783	-2709	-2652	-2614
	0.6				-3581	-3523	-3481
	0.8					-4769	-4720
	1.0						-6316
S	0	0	0	0	0	0	0
	0.2		-596	-455	-307	-155	0
	0.4			-866	-585	-295	0
	0.6				-805	-406	0
	0.8					-477	0
	1.0						0

Nota: El coeficiente k es adimensional. Los esfuerzos T_x , T_y y S están en libras por pie.

uno solo de los cuadrantes que forman el conjunto creará fuerzas internas en la lámina que lo constituye de acuerdo con las fórmulas obtenidas con anterioridad. Por ejemplo, una carga uniforme sobre los dos cuadrantes que indica la figura 18, se resiste por medio de arcos parabólicos que exigen

Fig. 18



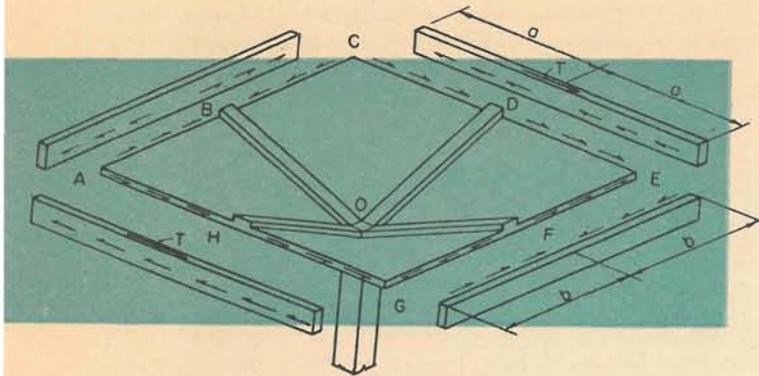


Fig. 19

en sus arranques sólo esfuerzos tangenciales para su estabilidad. Estos esfuerzos tangenciales se calculan a partir de la ecuación [8]. Así, aunque solamente una parte de la estructura total está cargada, la lámina propiamente dicha está en equilibrio con un estado de tensiones fácilmente determinable. A partir de este estado pueden obtenerse los esfuerzos de compresión o de tracción en las vigas de borde. Suponiendo al soporte capaz de resistir esfuerzos horizontales, todas las vigas de borde están en equilibrio, excepto las vigas AHG y CDE. Para estas vigas los esfuerzos tangenciales actúan solamente en una dirección. Para conservar el equilibrio se necesita una carga concentrada T en D y H . Si se supone que existe una coacción en D y H , puede considerarse a la fuerza T como exterior.

Esto es contrario a las condiciones de contorno reales. De aquí que sea preciso aplicar una fuerza concentrada igual y opuesta a la T en D y H . En tal caso, se considera que toda la cubierta actúa como una unidad (véase fig. 19). La determinación de la distribución exacta de tensiones creada por esta fuerza horizontal exige largos y complicados desarrollos aritméticos. Afortunadamente, como sucede en el caso de las placas planas para pisos, tal refinamiento en el cálculo no es necesario. El efecto de esta carga concentrada puede ser acotado entre límites muy estrechos.

Puesto que la fuerza concentrada actúa paralelamente a la viga de borde, es razonable la hipótesis de que la resistencia a dicha fuerza estará producida por unos esfuerzos tangenciales, no uniformes, que actúan en la unión de la lámina con la viga de borde, con una intensidad máxima en el centro. De aquí que la lámina propiamente dicha esté sometida a un esfuerzo tangencial paralelo a los bordes exteriores. Si no existiese el alabeo de la superficie de la lámina, los esfuerzos tangenciales penetrarían hacia el borde interior, cambiando su distribución muy ligeramente. Sin embargo, y debido a este alabeo, la dirección en que actúan estos esfuerzos tangenciales en una sección cualquiera de la lámina o de los bordes interiores es diferente de la dirección en que actúan en los bordes exteriores. Para

que exista el equilibrio de fuerzas en una parte de la lámina, considerada como cuerpo aislado, es preciso que existan esfuerzos transversales tanto tangenciales como normales a la superficie.

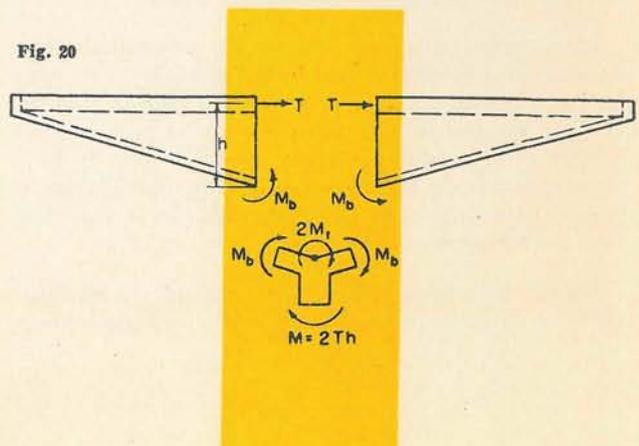
Estos esfuerzos transversales normales, a los que generalmente se llama transversales radiales, están naturalmente concentrados en la zona próxima a la limahoya, en la que las diferencias de altura son más notables.

El manual de la A. S. C. E. núm. 31, «Proyecto de láminas cilíndricas para cubiertas», indica que la flexión producida por los esfuerzos transversales tangenciales en una lámina es muy pequeña. Basándose en esta afirmación, la mayor parte de la lámina está relativamente libre de flexiones, concentrándose los momentos flectores exclusivamente en la zona próxima a la columna soporte en la que se crean los esfuerzos transversales radiales. Sin embargo, en este área, y puesto que las vigas de borde rigidizan a la lámina, es probable que se produzcan solamente muy ligeras flexiones. En consecuencia, para unos vanos de tipo medio, los momentos flectores producidos en la lámina no son críticos usualmente.

Pero la presencia de los esfuerzos transversales radiales en la zona próxima al soporte producen una flexión de las dos vigas interiores paralelas a la fuerza T y torsión de las dos vigas interiores perpendiculares a la misma T . Considerando únicamente la fuerza concentrada T , puesto que es una sollicitación antisimétrica, los momentos resistidos por cada una de las dos vigas de borde deben ser iguales en valor absoluto y de signos opuestos; tal como aparece en la figura 20. En esta figura, la carga concentrada es T , puesto que se considera el efecto sobre los dos bordes, el que está más cerca y el más alejado. Se considera una fuerza $T/2$ actuando respectivamente en AH y CD .

Si no fuera por la presencia del momento de torsión resistente M_t correspondiente a los miembros HO y OD , los momentos M_b que actúan en la unión de dichos miembros y el soporte podrían ser exactamente calculados y serían igual a Th . Puesto que es difícil establecer hasta qué grado colaborará en la resistencia total la rigidez torsional, una aproximación conservadora sería el proyectar esta zona próxima al soporte y a la unión con éste de las

Fig. 20



vigas de borde BO y OF para resistir un momento Th . Partiendo de las características geométricas de la figura 20 y de las relaciones entre deformaciones, se hace nulo el valor del momento a lo largo del «valle» en B y F . Una hipótesis conservadora es la de que el momento varía linealmente de O a B y de O a F .

Como canto de la viga puede tomarse el brazo mínimo del momento resistente en la unión de la viga de borde con el soporte. En ésta y en otras secciones habrá una parte de la lámina que colabore con la propia viga de borde, formando una sección en V . Desde un punto de vista práctico, la anchura eficaz de la pieza puede considerarse definida por líneas que forman 45° a partir de los bordes del soporte.

Ensayos

Para determinar la capacidad resistente de las láminas en paraboloides hiperbólicos respecto a varios tipos de carga, se llevó a cabo una serie de ensayos por la «Structural Development Section», de la «Research and Development Division of the Portland Cement Association».

La lámina ensayada era del tipo que aparece en la figura 36. Cubría una superficie de 24×24 pies, con un espesor de pulgada y media y una flecha de 2 pies 10 pulgadas. La armadura de la lámina consistía en una malla cuadrada de barras del núm. 3

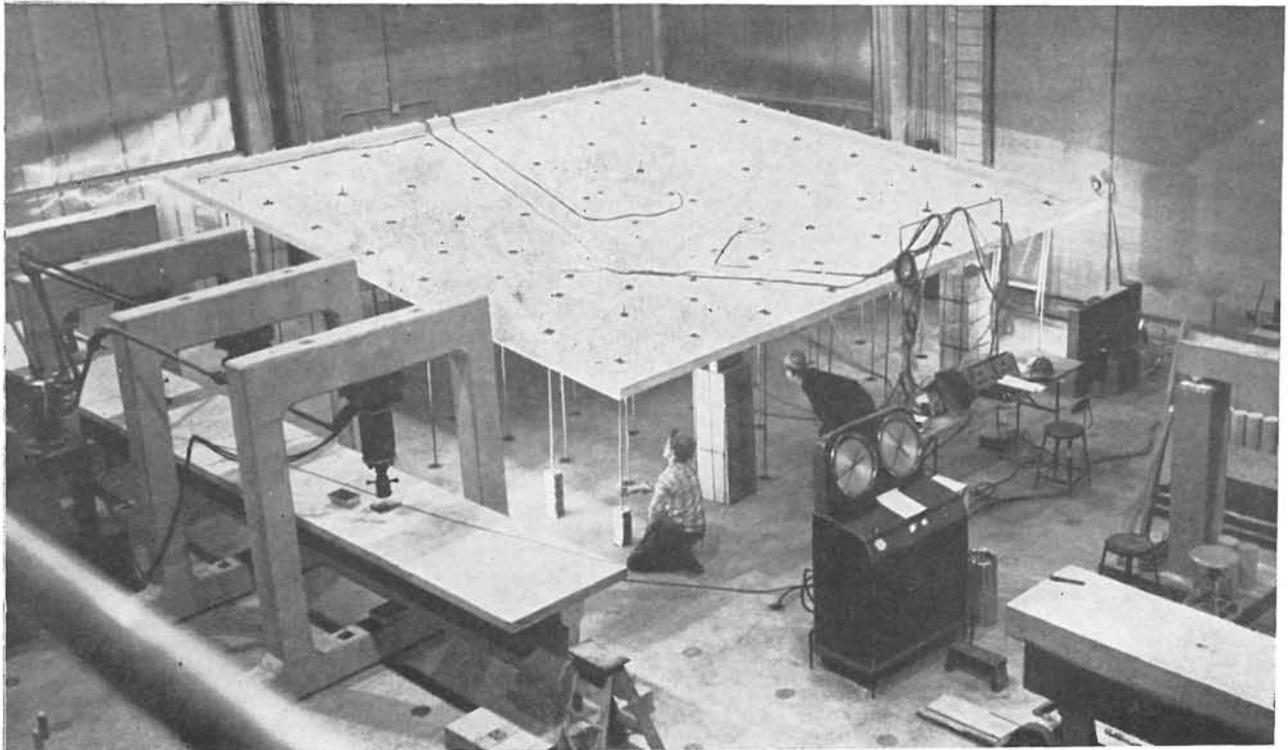
a 12 pulgadas. Todas las vigas de borde sobresalían por la parte superior de la lámina. Las vigas perimetrales eran de 4×6 pulgadas y estaban armadas con barras del núm. 4. Las dimensiones de las vigas de borde interiores variaban de 15×5 pulgadas sobre el soporte a $9 \times 1,5$ pulgadas (espesor de la lámina) en el perímetro. Estaban armadas con tres barras del núm. 4. La estructura se apoyaba sobre una columna zunchada, cuadrada, de 15×15 pulgadas, armada con 12 barras del número 8 y una zapata, también cuadrada, de 4 pies 6 pulgadas de lado, anclada en sus cuatro vértices. Se simuló la carga uniforme sobre la lámina aplicando cargas concentradas simultáneas sobre los vértices de una red cuadrada de 3×3 pies.

El programa de ensayos incluía tres diferentes estados de carga sobre la misma estructura. Así, pues, solamente pudo llegarse a rotura con el último ensayo.

En el primer ensayo se aplicó la carga uniforme y se fue aumentando hasta un máximo de 50 psf. La suma del peso muerto y la sobrecarga máxima aplicada producía sobre los arcos un empuje máximo de 98 psi y una tracción en la armadura de la viga de borde perimetral de 26.300 psi. Bajo este estado de cargas no se observó ninguna anomalía.

La carga en el segundo ensayo consistía en cuatro fuerzas concentradas aplicadas simétricamente. La superficie de contacto entre la fuerza y la lámina estaba formada por una sola placa de 2×3 pul-

Fig. 21



gadas, o sea, 6 pulgadas cuadradas. Aparecieron algunas pequeñas grietas circunferenciales y radiales alrededor de los puntos de aplicación de las cargas, cuando éstas alcanzaron las 5.000 libras, punto en que se dio por terminado el segundo ensayo. Una carga concentrada de 5.000 libras produce un momento local de flexión de 1,3 kip por pie/pie lineal, en el punto en que se aplique la carga y una tensión tangencial por punzonamiento de 500 psi.

Respecto al problema de las cargas concentradas, una fuerza puntual P sobre una placa plana cuya relación espesor/luz es mayor de 0,033 producirá un momento positivo bajo esa carga cuyo valor máximo es de $0,42P$, independientemente del tipo de sustentación. Para una cúpula esférica con una relación espesor/radio de 0,04 ó mayor, el momento creado por una carga concentrada en dirección del radio, con pequeña superficie de acción, resulta ser $0,26P$. Para objeto de proyectos parece justificado, pues, un valor medio de $0,34P$. En los puntos en que el momento es crítico, se tiene, además, la ventaja de poder contar con el empuje que se produce en las láminas curvas.

El tercer estado de carga consistió en una carga uniforme aplicada sobre dos cuadrantes adyacentes.

Nota.—Se toma como base para el cálculo de estos esfuerzos los estudios de Eric Reissner, presentados en el Apéndice I de "Cúpulas laminares cargadas excéntrica-mente", de Voss, Peabody, Staley y Dietz, "Transactions of the A. S. C. E.", vol. 113, 1948, págs. 312-314.

Esta carga asimétrica fue aumentándose gradualmente hasta alcanzar las 75 psf. No se observaron grietas en la mayor parte de la lámina, incluso cuando la carga se aproximaba a la de rotura. La fisuración se presentó en las vigas de borde interiores y en la lámina en la proximidad del soporte. Las grietas, en la parte no cargada de la estructura, aparecieron en la cara inferior de la viga de borde interior, casi junto a la columna. En la zona cargada, las primeras grietas se observaron en la parte alta de la viga interior. En las otras dos vigas interiores aparecieron grietas de torsión. Las 75 psf. aplicadas sobre la mitad de la estructura producían un momento flector total de 130 kip/pie, considerablemente mayor que la capacidad resistente de las dos vigas interiores de 15×5 pulgadas. Así, pues, es evidente que la participación de la lámina de 1,5 pulgadas de espesor, actuando como viga en V, y en menor grado la torsión de las otras dos vigas, fueron instrumentos que ayudaron a resistir la carga asimétrica. De aquí que la afirmación de que el momento no equilibrado se resiste por las dos vigas de borde sea muy conservadora.

Tensiones secundarias

Una cuestión que aparece en el estudio de estas láminas es hasta qué grado de rebajamiento es válido el estudio de la lámina en estado membrana.

En gran parte depende esto de la magnitud de los momentos secundarios producidos por la deformación axil. El estudio anterior se basa exclusiva-

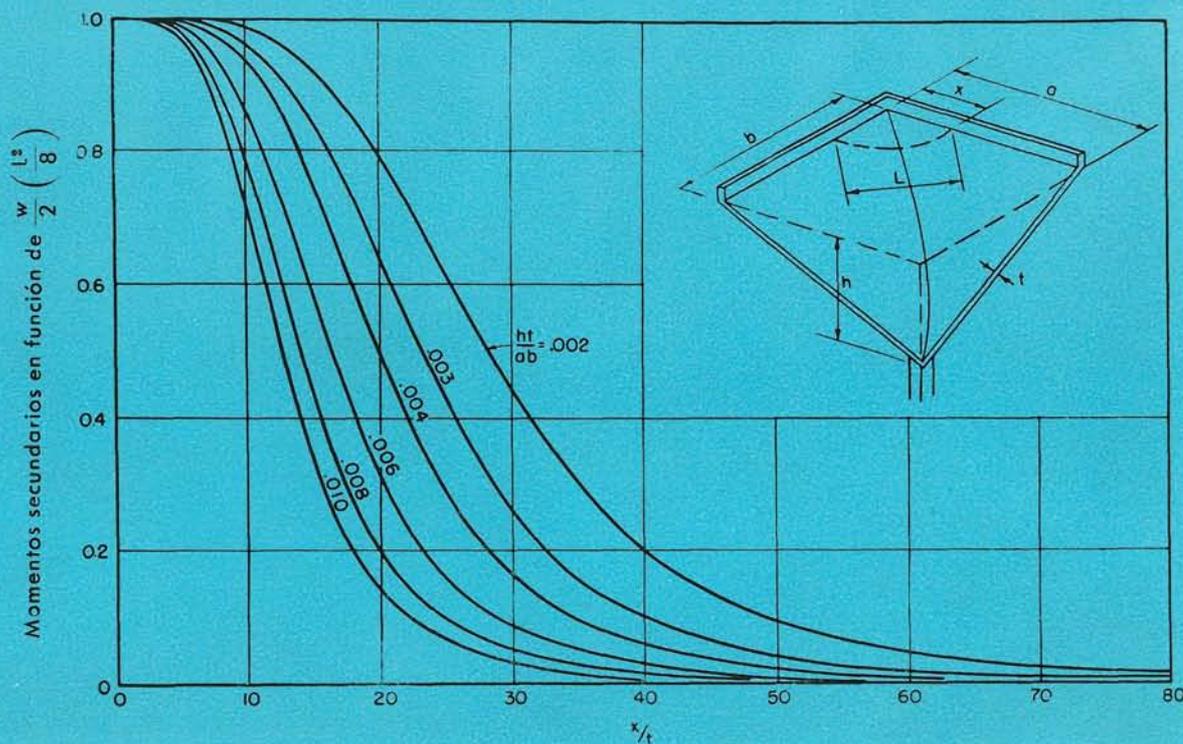


Fig. 22

mente en el equilibrio de fuerzas, sin que se haya prestado atención a la compatibilidad entre deformaciones y tensiones. Para los rebajamientos normales $h/a = 1/5$ ó $h/b = 1/5$, carece de importancia el efecto de las deformaciones por esfuerzo axial y puede ignorarse con seguridad suficiente. Sin embargo, cuando la relación h/a disminuye, el efecto de la deformación axial empieza a ejercer una influencia dominante sobre el comportamiento de la lámina. Las diferencias de comportamiento del obtenido por el simple análisis del estado de membrana, en una lámina muy rebajada, son análogas a las que se presentan en un arco parabólico biarticulado, sometido a carga uniforme, cuando la relación flecha a luz disminuye. Para arcos parabólicos muy rebajados puede demostrarse que, si se incluye en el cálculo el efecto de acortamiento de fibras (deformaciones axiales), la componente horizontal de la reacción para un vano determinado disminuye al mismo tiempo que la citada relación flecha a luz. Cuando se anula la flecha, se anula también esa componente horizontal, y así el momento secundario debido a las deformaciones axiales se aproxima al momento flector de una viga simple, como valor límite.

El comportamiento estructural de un paraboloides hiperbólico se debe al hecho de que su superficie curva resiste las cargas por medio de dos series de arcos parabólicos perpendiculares entre sí, como

se indicó en la figura 8a. Así, pues, puede obtenerse una cierta aproximación, en cuanto al efecto de la curvatura, observando una franja paralela a los arcos como si fuera un elemento aislado.

Si se desprecian los esfuerzos transversales y normales en las dos caras opuestas, y se supone que los arranques de los arcos no pueden moverse, pueden calcularse los momentos flectores secundarios debidos a la poca curvatura, de la misma forma que para un arco clásico.

En la figura 22 aparecen los resultados de este estudio para diversas relaciones $\frac{ht}{ab}$.

El momento secundario a diferentes distancias de las esquinas, determinadas por el parámetro adimensional x/t , se expresa en función del momento flector de viga sencilla que actúa en una franja de longitud L . La figura 22 indica que, puesto que la relación flecha a luz se aproxima a cero en las esquinas, las cargas se resisten totalmente en esta zona con un estado de flexión de viga, lo cual es contrario a lo que puede esperarse de la teoría de membrana. Para zonas más alejadas de la esquina, disminuye este momento secundario. La ley que sigue esta disminución es una función de $\frac{ht}{ab}$. A mayor valor de esta relación $\frac{ht}{ab}$, más rápidamente

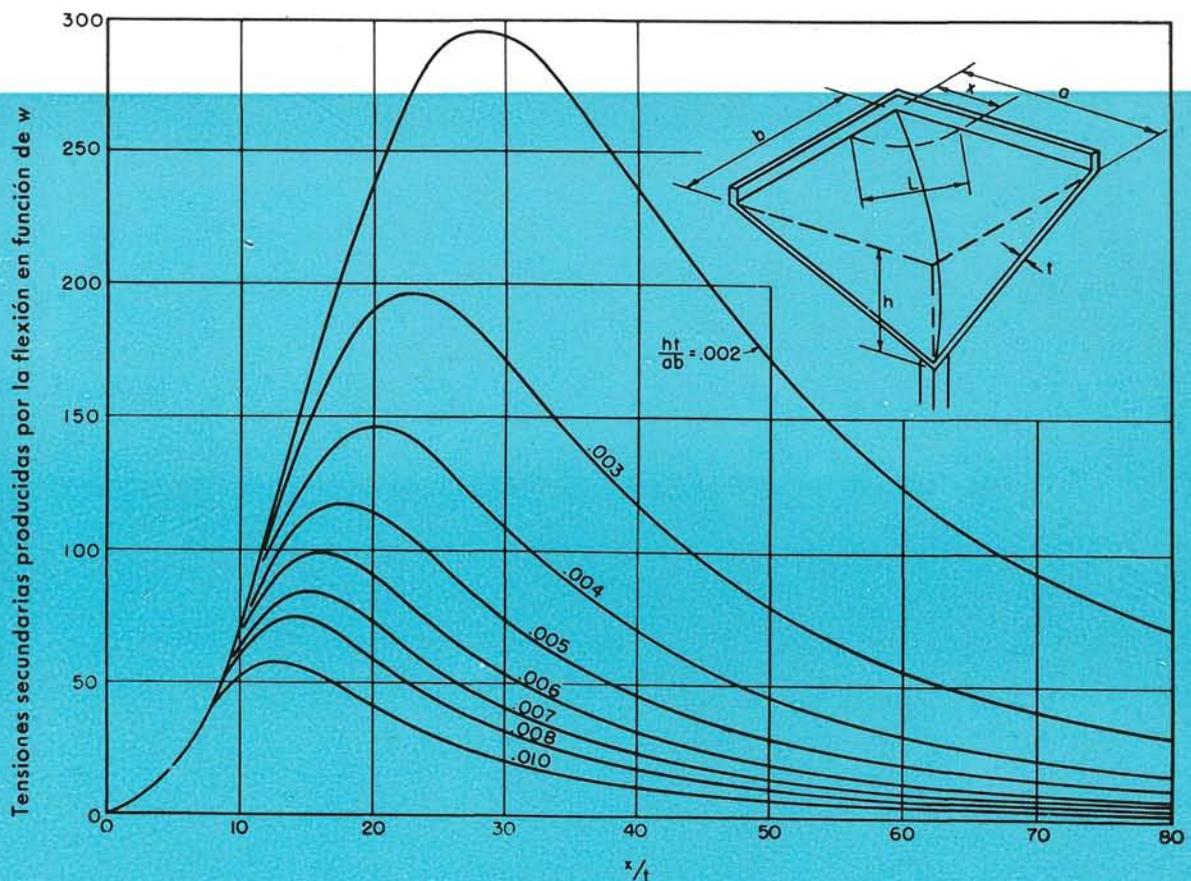
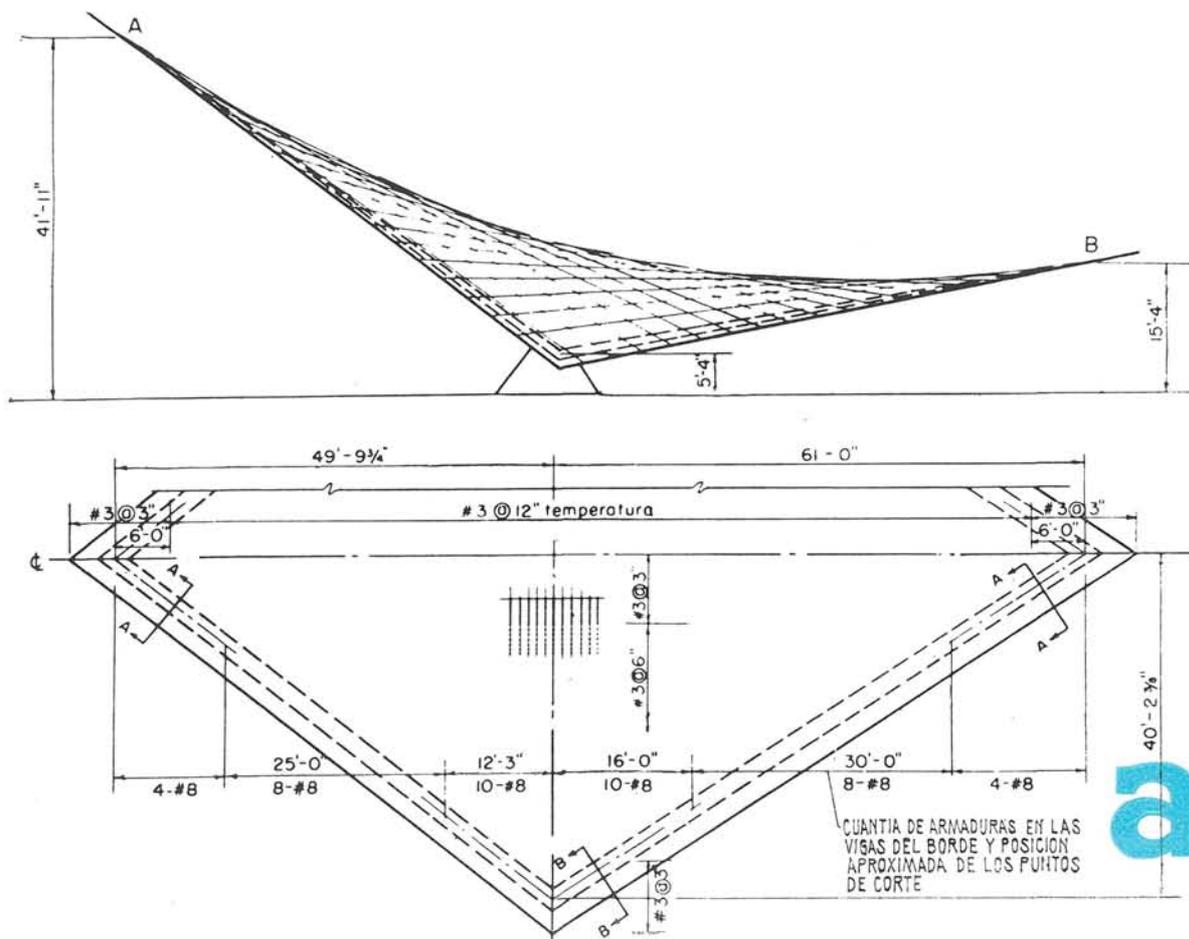


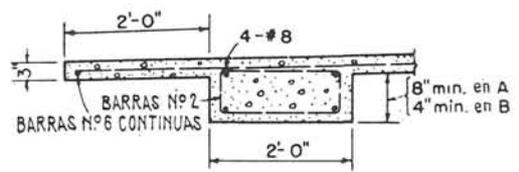
Fig. 23



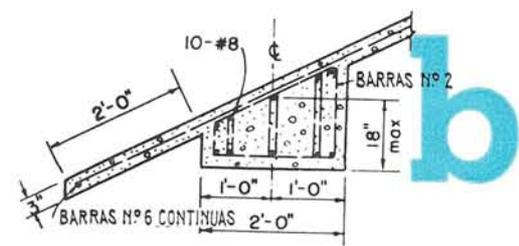
CUANTIA DE ARMADURAS EN LAS VIGAS DEL BORDE Y POSICION APROXIMADA DE LOS PUNTOS DE CORTE

disminuye en magnitud el momento secundario. El valor usual de $\frac{ht}{ab}$ para el paraboloid hiperbólico de tipo «paraguas invertido» es aproximadamente 0,004. Suponiendo que el espesor es de 3 pulgadas, el momento secundario es despreciable a una distancia de, aproximadamente, 5 pies de la esquina.

La figura 22 muestra, además, otra importante característica observada en algunas de las láminas que han sido construídas. En las esquinas las cargas son soportadas fundamentalmente por la acción de



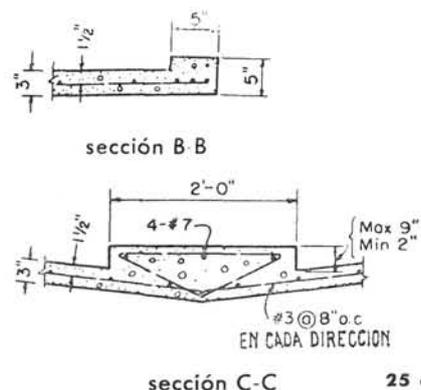
sección A-A



sección B-B



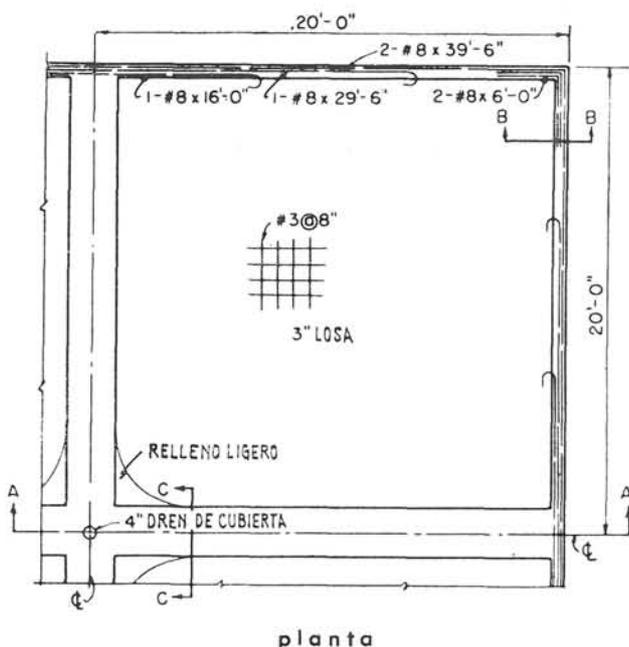
Figs. 24 a, b, c.—La cubierta de la Iglesia Episcopal de San Edmundo, Elm Grove, Wis., presenta una lámina en paraboloid hiperbólico de 3 pulgadas de espesor, apoyada en dos pequeños estribos de hormigón. La inclinación de la forma en silla de montar aumenta el efecto de grandiosidad en el santuario. Arquitecto: Wm. P. Wenzler de Milwaukee, Wis. Contratista general: Gebhard-Berghammer, Inc., de Milwaukee.



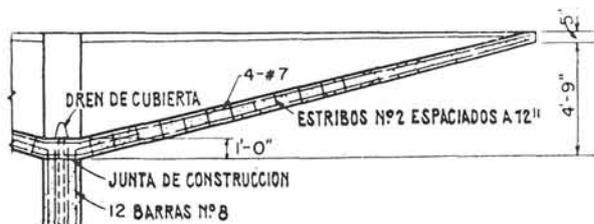
Figs. 25 a, b, c.—El supermercado de Ralph en Wichita, Kan., tiene nueve láminas adyacentes en paraboloides hiperbólico, cubriendo el almacén, las salas de trabajo y los paseos exteriores. Para una sobrecarga viva de 30 psf., cada lámina tiene un espesor medio de 3,7 pulgadas y la armadura alcanza las 2,4 libras por pie cuadrado. En el punto más bajo de cada lámina está colocado un dren con la tubería de drenaje, pasando a través del núcleo de la columna. Arquitectos: Vanlandingham y Haney. Ingenieros de estructuras: G. Hartwell y Co., de Wichita. Constructor general: H. F. Sell Construction Co. de Wichita.

25 a

25 b



planta



sección A-A

viga. De aquí que se transmita a la viga de borde principalmente por esfuerzos transversales radiales. Así, pues, las vigas de borde en esas zonas próximas a los vértices están cargadas verticalmente y trabajan como ménsulas en una pequeña parte de su longitud. En consecuencia, la viga de borde en la citada zona no debe calcularse solamente para las tensiones obtenidas a partir de la teoría de membrana, sino que han de dimensionarse, aumentando el canto para impedir la presencia de fuertes deflexiones y deben estar armadas para resistir momentos negativos. Esto es especialmente conveniente cuando la viga de borde está por la parte superior de la lámina.

Puesto que el valor de L aumenta linealmente con el valor de la distancia a la esquina, es más conveniente poner el efecto de las deformaciones axiales en función de las tensiones secundarias de flexión que aparecen. Estos valores se pueden ver en la figura 23, que hace más patente la importancia de la curvatura en la magnitud de las tensiones secundarias. Para un paraboloides hiperbólico del tipo de «paraguas invertido», sometido a una carga

de 72 psf. y con una relación $\frac{ht}{ab} = 0,004$, las

tensiones secundarias máximas se presentan en $x/t = 20$ y valen:

$$f_c = \frac{145 \times 72}{144} = 72 \text{ psi.}$$

Ejemplos

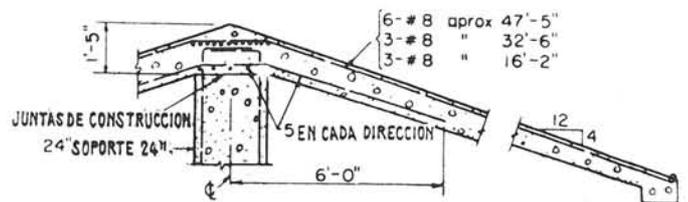
El estudio expuesto acerca de las tensiones secundarias, señala la importancia de disponer las su-



Figs. 26 a, b.—Cincuenta y dos láminas de hormigón armado con forma de paraboloides hiperbólico forman una nueva cubierta para el depósito Argentine, en Kansas City. Tienen una planta cuadrada de 45 pies 6 pulgadas de lado, con una flecha máxima de 7 pies 8 pulgadas, siendo el espesor de 3 pulgadas; fueron construidas con encofrados móviles formados por dos secciones que se unen en el eje de simetría de la lámina. La sobrecarga viva de proyecto fue 30 psf. El espesor medio es de 4,8 pulgadas y fueron necesarias 2,7 libras de armadura por pie cuadrado en cada lámina. El proyecto fue realizado por Burns and McDonnell Engineering Co., de Kansas City, Mo., Constructor general: Eastmount construction Co., de Kansas City, Mo.

26 a

26 b



perfiles en paraboloides hiperbólico con una curvatura suficiente. Puesto que aún no se ha desarrollado ningún método exacto para determinar el valor mínimo que puede admitirse para la relación flecha a luz, se dan, simplemente como guía, las más sobresalientes características de tres láminas seleccionadas de entre el gran número de ellas ya construidas. Las dimensiones no significan, de ninguna forma, límites de aplicabilidad. Las láminas características han sido construidas de acuerdo con las teorías anteriormente expuestas y están comportándose satisfactoriamente.



apéndice

Obtención de las fórmulas para las láminas en paraboloides hiperbólico oblicuo

La obtención de las fórmulas que se utilizan en el estudio de las superficies en paraboloides hiperbólico es, en cierto modo, semejante al proceso seguido para las rectangulares en planta.

Refiriéndonos a la figura 27, de acuerdo con el teorema de los senos:

$$BC = \frac{v' \operatorname{sen}(\omega - \Phi)}{\operatorname{sen}(180^\circ - \omega)} = \frac{v' \operatorname{sen}(\omega - \Phi)}{\operatorname{sen} \omega}$$

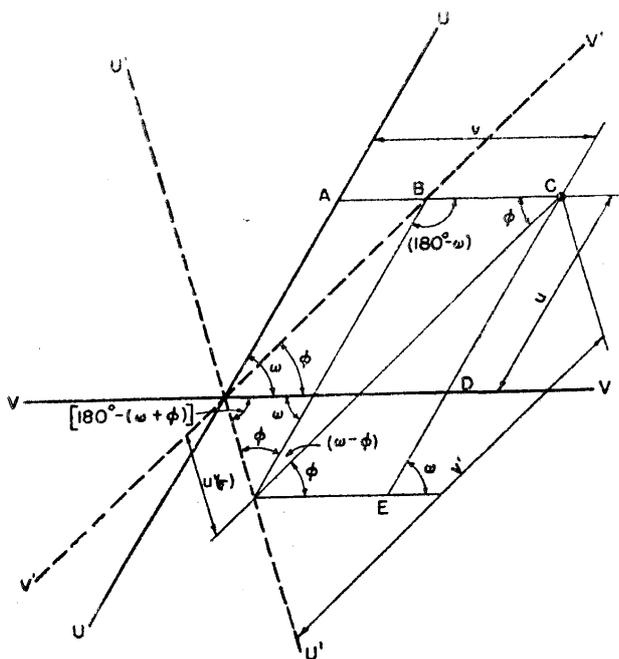
y

$$AB = \frac{-u' \operatorname{sen} \Phi}{\operatorname{sen} \omega}$$

Así, pues, y puesto que $v = AB + BC$:

$$v = \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \left[v' \operatorname{sen}(\omega - \Phi) - u' \operatorname{sen} \Phi \right] \quad [31]$$

Fig. 27



También:

$$CE = \frac{v' \operatorname{sen} \Phi}{\operatorname{sen} \omega}$$

y

$$DE = \frac{-u'}{\operatorname{sen} \omega} \operatorname{sen} \left[180^\circ - (\omega + \Phi) \right] = \frac{-u' \operatorname{sen}(\omega + \Phi)}{\operatorname{sen} \omega}$$

de aquí:

$$u = CE - DE = \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \left[v' \operatorname{sen} \Phi + u' \operatorname{sen}(\omega + \Phi) \right] \quad [32]$$

Sustituyendo las ecuaciones [31] y [32] en la [20], se tiene:

$$z = \frac{h}{ab} uv = \frac{h}{ab \operatorname{sen}^2 \omega} \left\{ \left[v' \operatorname{sen}(\omega - \Phi) - u' \operatorname{sen} \Phi \right] \left[v' \operatorname{sen} \Phi + u' \operatorname{sen}(\omega + \Phi) \right] \right\}$$

Desarrollando esta expresión y sustituyendo la expresión trigonométrica $\operatorname{sen}^2 \omega - \operatorname{sen}^2 \Phi$ en lugar de $\operatorname{sen}(\omega + \Phi) \operatorname{sen}(\omega - \Phi)$, se tiene:

$$z = \frac{h}{ab \operatorname{sen}^2 \omega} \left\{ \operatorname{sen} \Phi \left[(v')^2 \operatorname{sen}(\omega - \Phi) - (u')^2 \operatorname{sen}(\omega + \Phi) \right] + v'u' \left[\operatorname{sen}^2 \omega - 2 \operatorname{sen}^2 \Phi \right] \right\} \quad [33]$$

El coeficiente de $v'u'$ se anula cuando se escoge un valor Φ tal que:

$$\operatorname{sen} \Phi = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\sqrt{2}} \quad [34]$$

Llamando Φ_c al valor particular que satisface esta condición, la ecuación [33] se reduce a:

$$z = \frac{h}{ab \operatorname{sen}^2 \omega} \operatorname{sen} \Phi_c \left[(v')^2 \operatorname{sen} (\omega - \Phi_c) - (u')^2 \operatorname{sen} (\omega + \Phi_c) \right] \quad [35]$$

Debe notarse que la ecuación [35] es de la misma forma que la [3], puesto que ω y Φ_c son constantes para un valor determinado del ángulo ω de oblicuidad. Así, pues, la superficie oblicua $z = \frac{huv}{ab}$ tam-

bién puede engendrarse trasladando una parábola que se apoya continuamente sobre otra. En este caso las parábolas no son perpendiculares entre sí, como en el caso particular de planta rectangular, sino que se cortan bajo un ángulo oblicuo ω .

En el borde de la superficie oblicua los empujes horizontales de los arcos $H_{U'}$ y $H_{V'}$ de los dos sistemas se obtienen de la misma forma que en el caso que se explica en las ecuaciones [7] y [8]. Por ejemplo, el $H_{V'}$, puede expresarse:

$$H_{V'} = \frac{w}{4} \left(\frac{L^2}{4h_{xy}} \right) \quad [36]$$

Puesto que el término que contiene u'^2 en la ecuación [35] es constante, la ecuación de las parábolas paralelas al eje V' es:

$$z' = \frac{h \operatorname{sen} \Phi_c}{ab \operatorname{sen}^2 \omega} \left[v'^2 \operatorname{sen} (\omega - \Phi_c) \right] \quad [37]$$

Haciendo $z' = h_{xy}$ en $v' = L/2$, se tiene:

$$\frac{L^2}{4h_{xy}} = \frac{ab}{h} \left[\frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{\operatorname{sen} \Phi_c \operatorname{sen} (\omega - \Phi_c)} \right] \quad [38]$$

Sustituyendo la ecuación [38] en la [36], se tiene:

$$H_{V'} = \frac{w}{4} \left(\frac{ab}{4} \right) \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{\operatorname{sen} \Phi_c \operatorname{sen} (\omega - \Phi_c)}$$

Pero de la [34] $\operatorname{sen} \Phi = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\sqrt{2}}$; por lo tanto

$$H_{V'} = \frac{wab}{4h} \left[\frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} (\omega - \Phi_c)} \right] \quad [39]$$

De la misma forma se puede obtener:

$$H_{U'} = \frac{wab}{4h} \left[\frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} (\omega + \Phi_c)} \right] \quad [40]$$

Para demostrar que las componentes horizontales del empuje, que actúan normalmente a los bordes de la superficie se anulan entre sí, se expresan estos dos componentes $H_{U'}$ y $H_{V'}$ en la forma:

$$H_N = H_{V'} \operatorname{sen}^2 \Phi_c - H_{U'} \operatorname{sen}^2 (\omega + \Phi_c) \quad [41]$$

Sustituyendo las ecuaciones [39] y [40] en la [41]:

$$H_N = \frac{wab \sqrt{2} \operatorname{sen} \omega}{4h} \left[\frac{\operatorname{sen}^2 \Phi_c}{\operatorname{sen} (\omega - \Phi_c)} - \operatorname{sen} (\omega + \Phi_c) \right] \quad [42]$$

o bien:

$$H_N = \frac{wab \sqrt{2} \operatorname{sen} \omega}{4h} \left[\frac{2 \operatorname{sen}^2 \Phi_c - \operatorname{sen}^2 \omega}{\operatorname{sen} (\omega - \Phi_c)} \right] \quad [43]$$

Sin embargo, el numerador del término entre paréntesis se hizo cero anteriormente [34]. Por lo tanto, la ecuación [43] es nula, indicando que el empuje combinado ejercido por los dos arcos que se cortan no produce esfuerzos normales al borde.

El esfuerzo transversal que se ejerce a lo largo del borde de la superficie con planta oblicua se obtiene sumando algebraicamente las componentes de los empujes horizontales $H_{U'}$ y $H_{V'}$ paralelas al borde:

$$S = H_{V'} \operatorname{sen} \Phi_c \cos \Phi_c - H_{U'} \operatorname{sen} (\omega + \Phi_c) \cos (\omega + \Phi_c)$$

Sustituyendo en lugar de $H_{V'}$ y $H_{U'}$ sus valores obtenidos de las ecuaciones [39] y [40]:

$$S = \frac{wab \operatorname{sen} \omega}{2\sqrt{2}h} \left[\frac{\operatorname{sen} \Phi_c \cos \Phi_c}{\operatorname{sen} (\omega - \Phi_c)} - \cos (\omega + \Phi_c) \right] \quad [44]$$

Utilizando la identidad

$\operatorname{sen} \omega \cos \omega - \operatorname{sen} \Phi \cos \Phi = \cos (\omega + \Phi) \operatorname{sen} (\omega - \Phi)$. la ecuación [44] se reduce a:

$$S = \frac{wab \operatorname{sen} \omega}{2\sqrt{2}h}$$

$$\left[\frac{\operatorname{sen} \Phi_c \cos \Phi_c - \operatorname{sen} \omega \cos \omega + \operatorname{sen} \Phi_c \cos \Phi_c}{\operatorname{sen} \omega \cos \Phi_c - \cos \omega \operatorname{sen} \Phi_c} \right]$$

Sustituyendo en lugar de $\operatorname{sen} \Phi_c$ el valor que se obtiene de la ecuación [34], se tiene:

$$S = \frac{wab \operatorname{sen} \omega}{2\sqrt{2}h} \left[\frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \omega \cos \Phi_c - \operatorname{sen} \omega \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega \cos \Phi_c - \frac{\cos \omega \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{2}}} \right] = \frac{wab \operatorname{sen} \omega}{2h} \quad [45]$$