

# PROGRAMA PARA LA COMPROBACION DE SECCIONES RECTANGULARES DE HORMIGON ARMADO EN FLEXOCOMPRESION ESVIADA CON UN ORDENADOR PORTATIL

(PROGRAM FOR THE ANALYSIS OF RECTANGULAR REINFORCED CONCRETE CROSS-SECTIONS SUBMITTED TO BIAxIAL BENDING ON A PORTABLE COMPUTER)

Francisco Morán Cabré, Dr. Ingeniero de Caminos  
IETcc/CSIC

403-6

## RESUMEN

Se presenta un programa para la comprobación (peritaje) de secciones de soportes de hormigón armado en flexocompresión esviada ( $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ). El cálculo se realiza en el estado límite de agotamiento, de acuerdo con la Instrucción Española y con el Código Modelo del CEB. El programa está preparado para el microordenador personal portátil HP-75. Se incluyen un listado en lenguaje BASIC y ejemplos numéricos.

## SUMMARY

A program for the analysis (check) of cross-sections of reinforced concrete columns submitted to compression and biaxial bending ( $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ) is presented. The analysis is made at the ultimate limit state, in accordance with the Spanish Code and with the CEB Model Code. The program has been prepared for the personal portable microcomputer HP-75. The BASIC listing and numerical examples are included.

## 1. Introducción. Objeto del programa

A continuación se describe un programa para la comprobación de secciones rectangulares de hormigón armado sometidas a solicitaciones de flexocompresión esviada  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $N$ , en el estado límite último de agotamiento. Se supone que se trata de secciones de soportes y que la disposición de armaduras es simétrica.

El programa, llamado CM2R, está escrito en lenguaje BASIC para el ordenador personal portátil HP-75. Ocupa unos 4K octetos de memoria y puede adaptarse con facilidad a cualquier otro ordenador personal. Forma parte de un conjunto de 14 programas para el dimensionamiento y la comprobación de secciones de hormigón armado de distintas formas sometidas a solicitaciones de flexión simple  $M$ ,

flexocompresión recta  $M$ ,  $N$ , y flexocompresión esviada  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $N$  (\*).

Las bases de cálculo son las contenidas en el artículo 36 «Principios generales de cálculo de secciones sometidas a solicitaciones normales» de la EH-82 (1), es decir:

- dominios de deformación definidos por el diagrama de pivotes del apartado 36.2 (Fig. 1);
- diagrama parábola-rectángulo para el hormigón del apartado 26.6 (Fig. 2);
- diagrama bilineal para el acero (dureza natural) del apartado 25.3 (Fig. 3);
- excentricidad mínima según el apartado 36.3.

(\*). Otro programa del conjunto, el DMNE, para dimensionamiento de secciones rectangulares en flexocompresión recta, ha sido descrito en una publicación reciente (3).

## NOTA DE LA REDACCION:

Publicamos aquí el primero de dos artículos de F. Morán sobre cálculo de secciones de hormigón con ordenadores personales. El segundo, que seguirá en breve, trata del dimensionamiento de secciones de forma arbitraria (poligonal). Si bien estos artículos no constituyen una investigación en sentido estricto, por ser escasa su aportación teórica, su interés práctico y la actualidad del tema, dada la creciente difusión de los ordenadores personales entre los profesionales de la construcción, nos han aconsejado su publicación.

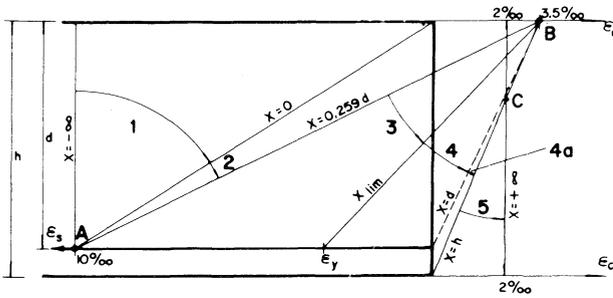


Fig. 1

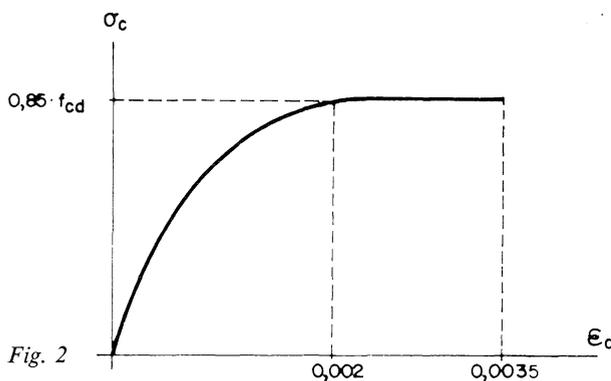


Fig. 2

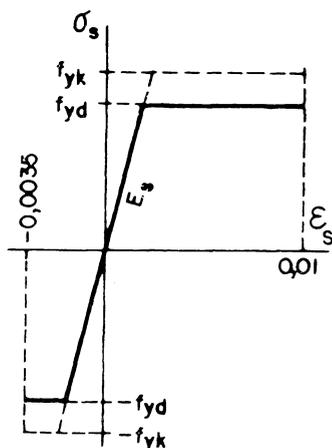


Fig. 3

Estas bases de cálculo son coincidentes con las del Código Modelo CM-78 del CEB (2).

En lo que respecta a cuantías mínimas, se comprueba que se respeta la limitación de la Tabla 38.3 de la EH-82 para soportes armados con acero de las calidades AEH-400, AEH-500 ó AEH-600, esto es, una cuantía geométrica mínima de la armadura longitudinal del cuatro por mil. Esta condición es más exigente que la indicada en el apartado 38.2 de la EH-82.

Tanto las resistencias de los materiales hormigón y acero como las solicitaciones actuantes en la sección, datos del programa, deben ser valores de cálculo, esto es, deben estar afectados por los correspondientes coeficientes de seguridad. En particular, la resistencia de cálculo del hormigón,  $f_{cd}$ , debe incluir

el coeficiente reductor 0,9 si el hormigonado se hace en posición vertical (apartado 26.5 de la EH-82).

No se consideran en el programa la esbeltez del soporte ni los efectos de segundo orden producidos por la misma. Estos efectos pueden tenerse en cuenta calculando previamente el momento suplementario  $M_a = N_d \cdot e_a$ , producido por la excentricidad adicional,  $e_a$ , debida a la esbeltez, y sumándolo al momento de primer orden,  $M_{od}$ , para obtener el momento de cálculo,  $M_d$ :  $M_d = M_{od} + M_a$ . Ello deberá hacerse para la dirección  $x$  o  $y$  si la esbeltez correspondiente es mayor que la mínima y el soporte puede pandear en dicha dirección; en ciertos casos puede ser necesario hacerlo simultáneamente en ambas direcciones (ver el apartado 14.5 del Código Modelo del CEB).

La comprobación se efectúa calculando el esfuerzo axial último resistente de la sección  $N_u$  para unas excentricidades  $e_x$ ,  $e_y$  iguales a las del esfuerzo axial actuante  $N_d$  y no menores que las mínimas. Si se verifica  $N_u \geq N_d$  la sección está en buenas condiciones de seguridad. También se calcula y se imprime la relación  $\gamma_n = N_u/N_d$ , que viene a ser un coeficiente de seguridad suplementario, que debe ser igual o mayor que la unidad, y que refleja el hecho de que las secciones generalmente no están estrictamente dimensionadas por usarse en el dimensionamiento métodos que quedan del lado de la seguridad, especialmente al pasar de la capacidad mecánica  $U$  necesaria, en toneladas, a una combinación  $n$ ,  $\emptyset$  de un número entero de barras de un diámetro de la serie normalizada.

## 2. Estructura y funcionamiento del programa

La estructura y el funcionamiento del programa son comunes a los 14 programas del conjunto aludido en la introducción. En la preparación de dichos programas se ha atendido de forma prioritaria a los siguientes criterios:

- Tamaño mínimo de los programas, para su utilización en ordenadores personales e incluso en calculadoras programables (\*).
- Rapidez de cálculo máxima compatible con la precisión deseada en cada caso.
- Número de datos necesario mínimo para cada problema.
- Posibilidad de efectuar recálculos con el mínimo esfuerzo, bien sea de una misma sección o de distintas secciones en las que cambian sólo algunos datos, como sucede en la práctica al calcular los soportes de una estructura de hormigón armado.

(\*) En efecto, 4 de los 14 programas del conjunto han sido adaptados para su uso en la calculadora de bolsillo HP-15.

Los criterios a), b) y c) han aconsejado preparar un conjunto de programas en lugar de uno sólo que valga para todos los casos; de esta forma, se consigue una mejor adaptación a las características concretas de cada problema.

En cuanto al criterio d), ha conducido a la estructura del programa que se esquematiza en el organigrama de la Figura 4 y cuyo funcionamiento se describe a continuación.

Al comienzo, el programa pide y lee el *código de tarea* T. Si se introduce T = 1, el programa pide y lee, a continuación, los valores de las resistencias de cálculo del hormigón y del acero  $f_{cd}$  y  $f_{yd}$  en  $\text{kp/cm}^2$ . En caso de que se introduzca T = 2 el programa no lee estos datos, manteniendo las resistencias usadas anteriormente. Si se arranca el programa con T = 2, se adoptan los siguientes valores, considerados como los más frecuentes en el momento de escribirse el programa:

$$f_{cd} = 175 \times 0,9 / 1,5 = 105 \text{ kp/cm}^2;$$

$$f_{yd} = 4200 / 1,1 = 3818 \text{ km/cm}^2.$$

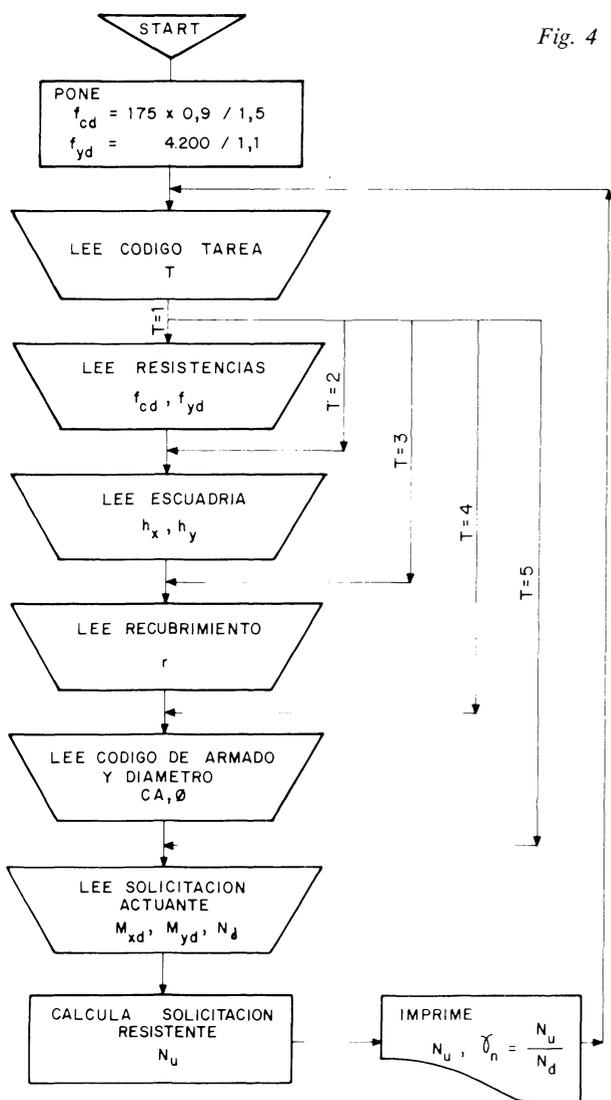


Fig. 4

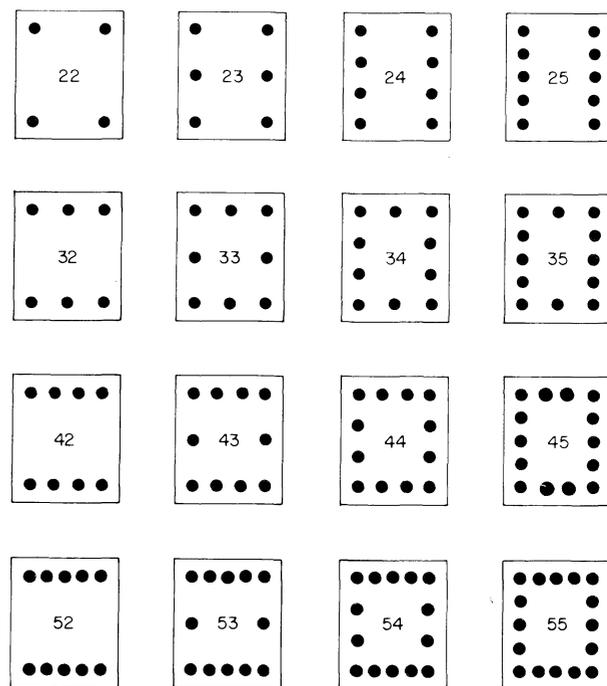


Fig. 5

Naturalmente, cada proyectista podrá modificar estos valores presupuestos cambiándolos por los que utilice con mayor frecuencia, sin más que corregir las correspondientes instrucciones del listado (ver apartado 6).

A continuación, o siempre que se haya introducido T = 2, el programa pide y lee la escuadria de la sección  $h_x \times h_y$  en  $\text{cm} \times \text{cm}$ .

A continuación, o siempre que se haya introducido T = 3, el programa pide y lee el recubrimiento r en centímetros, distancia del centro de gravedad de la armadura al paramento de la sección, que se supone igual en valor absoluto para las cuatro caras de la sección. Dicho recubrimiento es igual al recubrimiento libre c, más el diámetro del cerco  $\emptyset_c$ , más el semidiámetro de la barra longitudinal  $\emptyset$ :  $r = c + \emptyset_c + 1/2 \emptyset$ .

A continuación, o siempre que se haya introducido T = 4, el programa pide y lee el *código de armado* CA y el diámetro  $\emptyset$  de las barras en mm. El código de armado CA indica cuál es la disposición de las armaduras de la sección entre las disposiciones posibles, que se muestran en la Figura 5. El primer dígito del código de armado indica el número de barras de las armaduras en dirección x, y el segundo el número de barras de las armaduras en dirección y. Ambos deben ser enteros y comprendidos entre 2 y 9. El diámetro  $\emptyset$  será normalmente uno de los diámetros de la serie normalizada, pudiendo no serlo si se trata de representar un paquete de barras, o bien si se trata de comprobar el dimensionamiento estricto de una sección obtenido por otro método

o programa, de la que se conoce la capacidad mecánica teóricamente necesaria,  $U$ , en toneladas.

A continuación, o siempre que se haya introducido  $T = 5$ , el programa pide y lee la solicitación de cálculo actuante  $M_{xd}$ ,  $M_{yd}$ ,  $N_d$ , en metros  $\times$  tonelada, metros  $\times$  tonelada y toneladas, respectivamente. El momento  $M_{xd}$  es el momento alrededor del eje  $x$ , para el cual el canto es  $h_y$ ; análogamente el momento  $M_{yd}$  es el momento alrededor del eje  $y$ , para el cual el canto es  $h_x$ . Como se ha indicado, estos valores deben estar mayorados, y los momentos deben incluir, en su caso, los efectos de segundo orden, en forma de momentos suplementarios. Los tres valores  $M_{xd}$ ,  $M_{yd}$ ,  $N_d$  deben ser positivos.

Con todos estos datos, el programa está ya en condiciones de calcular el esfuerzo axial último  $N_u$  resistido por la sección con las mismas excentricidades que el esfuerzo axial actuante  $N_d$ , o con las excentricidades mínimas si aquéllas fueran inferiores a ellas. Para calcular  $N_u$  se utiliza un proceso iterativo que se describe en el apartado siguiente, y que se controla mediante los valores de los parámetros característicos que van apareciendo en pantalla. Al cabo de un intervalo de tiempo variable, en torno a los 10 segundos para casos de flexocompresión recta y a los 50 segundos para casos de flexocompresión esviada, aparecen en pantalla los resultados finales, que son el valor de  $N_u$  en toneladas y el valor del coeficiente de seguridad suplementario  $\gamma_n = N_u/N_d$ . Una vez facilitados estos resultados, el programa vuelve atrás automáticamente y pide un nuevo código de tarea  $T$ .

En caso de existir varias hipótesis de cálculo o, más precisamente, varias solicitaciones actuantes sobre la misma sección, bastará con dar  $T = 5$  e introducir la siguiente solicitación, obteniéndose la nueva carga de agotamiento  $N_u$  y el nuevo coeficiente  $\gamma_n$ , y así sucesivamente. La sección estará en buenas condiciones de seguridad si el menor de los valores de  $\gamma_n$  correspondientes a las distintas solicitaciones actuantes es igual o mayor que la unidad. Este valor de  $\gamma_n$  corresponderá a la solicitación más desfavorable para la sección.

Si a continuación se desea comprobar otra sección en la que cambia el diámetro  $\emptyset$  o la disposición de armado, ello podrá hacerse sin más que introducir  $T = 4$ , tecleando a continuación el código de armado  $CA$  y el diámetro  $\emptyset$  (mm) de la nueva sección, y después la solicitación o solicitaciones actuantes  $M_{xd}$ ,  $M_{yd}$ ,  $N_d$ .

En caso de que lo que cambie sea el recubrimiento  $r$ , bastará con dar  $T = 3$ , introduciendo a continuación el nuevo recubrimiento  $r$ , y luego el código de armado  $CA$

y el diámetro  $\emptyset$ , y por último la solicitación o solicitaciones actuantes  $M_{xd}$ ,  $M_{yd}$ ,  $N_d$ .

Si se desea pasar a otro elemento de distinta escuadría bastará dar  $T = 2$ , introduciendo sucesivamente la escuadría  $h_x$  y  $h_y$ , el recubrimiento  $r$ , el código de armado  $CA$  y el diámetro  $\emptyset$ , y la solicitación o solicitaciones actuantes  $M_{xd}$ ,  $M_{yd}$ ,  $N_d$ .

Por último, si se desea cambiar la resistencia de cálculo del hormigón o del acero se dará  $T = 1$ , introduciendo luego las nuevas resistencias  $f_{cd}$ ,  $f_{yd}$  y a continuación la escuadría  $h_x \times h_y$ , el recubrimiento  $r$ , el código de armado  $CA$  y el diámetro  $\emptyset$ , y la solicitación o solicitaciones  $M_{xd}$ ,  $M_{yd}$ ,  $N_d$ .

El programa prosigue estos ciclos de forma indefinida. Si se desea interrumpirlo basta con pulsar la tecla **ATTN** cuando el programa está en espera de datos (por ejemplo, cuando pide un nuevo código de tarea  $T$ ).

Si se ha cometido un error, o bien para hacer continuar el programa interrumpido mediante la tecla **ATTN**, basta con pulsar las teclas **C O N T 9 RTN**, con lo cual el programa vuelve a pedir un nuevo código de tarea  $T$ , y prosigue su ejecución.

### 3. Método de resolución

Se utiliza el método indicado en el apartado 17.2-1.º del tomo I de la referencia (5), con algunas modificaciones, tal y como se expone a continuación.

Hay que encontrar una posición del eje neutro tal que, para ella, la carga de agotamiento de la sección tenga excentricidades  $e_x$ ,  $e_y$  iguales a las de la solicitación actuante  $N_d$ :  $e_x = M_{y1}/N_d$ ;  $e_y = M_{xd}/N_d$ .

Para fijar la posición del eje neutro se utilizan los parámetros  $\xi$  y  $\beta$ , ver Fig. 6. El segundo es el ángulo que forma el eje neutro con el eje  $OY$ .

El parámetro  $\xi$  es igual, en los dominios de deformaciones 2, 3 y 4 del diagrama de pivotes (Fig. 1), o sea, para flexión compuesta, a la profundidad relativa del eje neutro con respecto al canto oblicuo total:  $\xi = x/h$ .

En el dominio 1 (tracción compuesta) se hace variar el parámetro  $\xi$  entre  $-1$  y  $0$  linealmente con  $\epsilon_c$ . Así se evita el manejo de valores de  $\xi$  que podrían llegar a  $-\infty$  si se sigue tomando como  $\xi$  la profundidad relativa del eje neutro. De igual forma, en el dominio 5 (compresión compuesta) se hace variar el parámetro  $\xi$  entre  $1$  y  $2$  linealmente con  $\epsilon_c$ . Así se evita el manejo de valores de  $\xi$  hasta  $\infty$ .

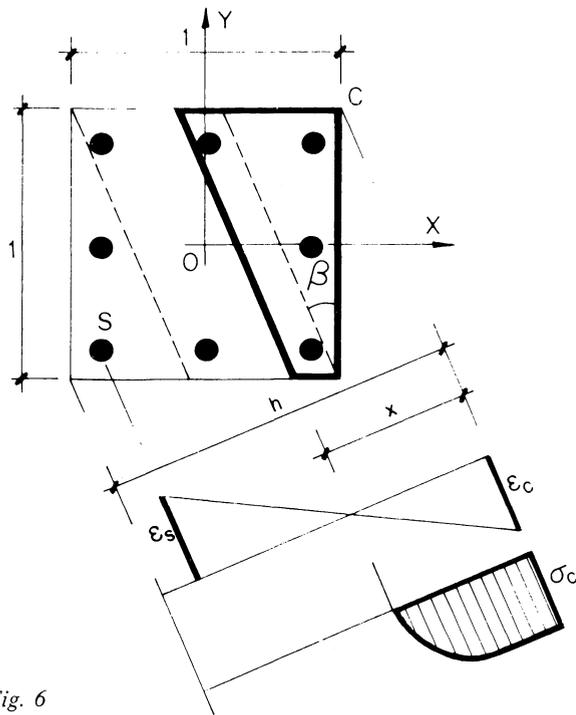


Fig. 6

Elegidos los valores de los parámetros  $\xi$  y  $\beta$  queda fijada la posición del eje neutro y resulta posible el cálculo de la *solicitación resistente* o de agotamiento  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $N$ , lo que consigue aplicando la SUBRUTINA 450, que se describe en el apartado 4. Esta subrutina calcula las excentricidades resultantes  $e'_x = M_y/N$ ;  $e'_y = M_x/N$ , que en general no coincidirán con las de la *solicitación actuante*  $e_x$ ,  $e_y$ .

Pasando a coordenadas polares, la *solicitación actuante* pasa por el punto de coordenadas  $\rho$ ,  $\theta$  y la *solicitación resistente* por el de coordenadas  $\rho'$ ,  $\theta'$ , siendo:

$$\rho = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{e_y}{e_x} \cdot \frac{h_x}{h_y}\right);$$

$$\rho' = \sqrt{e'_x{}^2 + e'_y{}^2}$$

$$\theta' = \arctg\left(\frac{e'_y}{e'_x} \cdot \frac{h_x}{h_y}\right);$$

La subrutina 450 devuelve los errores radial y angular:

$$\varepsilon_\rho = \rho - \rho'; \quad \varepsilon_\theta = \theta - \theta',$$

que serán en general mayores que las cotas de error prefijadas convencionalmente para los mismos:

$$\varepsilon_\rho > 0,001 \cdot \rho; \quad |\varepsilon_\theta| > 0,1^\circ \text{ (grados sexag.)}$$

por lo que será necesario proseguir los tanteos. Estos se realizan de la forma siguiente:

- a) Se toman como valores iniciales de los parámetros:

$$\xi = 0,5; \quad \beta = \theta.$$

- b) Manteniendo fijo el valor de  $\beta$  se ensaya para:

$$\xi_1 = \xi; \quad \xi_2 = \xi + 0,1.$$

A partir de los errores radiales obtenidos  $\varepsilon_{\rho 1}$  y  $\varepsilon_{\rho 2}$  se calcula un nuevo valor para  $\xi$  por el método de la cuerda:

$$\xi = \xi_2 - \Delta\xi \text{ con } \Delta\xi = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\varepsilon_{\rho 1} - \varepsilon_{\rho 2}} \cdot \varepsilon_{\rho 2},$$

y con las limitaciones:

$$|\Delta\xi| \leq 0,1; \quad -1 \leq \xi \leq 2$$

Este proceso se prosigue hasta ajustar la componente radial, es decir, hasta conseguir que sea:

$$|\varepsilon_{\rho 2}| \leq 0,001 \cdot \rho$$

- c) Se comprueba si en ese momento se verifica también el ajuste angular:

$$|\varepsilon_{\theta 2}| \leq 0,1^\circ \text{ (grados sexagesimales),}$$

en cuyo caso se da el proceso por terminado.

- d) En caso contrario, manteniendo el valor de  $\xi$  se ensaya para:

$$\beta_1 = \beta; \quad \beta_2 = \beta + 9^\circ$$

A partir de los errores angulares obtenidos  $\varepsilon_{\theta 1}$  y  $\varepsilon_{\theta 2}$  se calcula un nuevo valor para  $\beta$  por el método de la cuerda:

$$\beta = \beta_2 - \Delta\beta \text{ con } \Delta\beta = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\varepsilon_{\theta 1} - \varepsilon_{\theta 2}} \cdot \varepsilon_{\theta 2},$$

y con las limitaciones:

$$\Delta\beta \leq 9^\circ; \quad 0 \leq \beta \leq 90^\circ$$

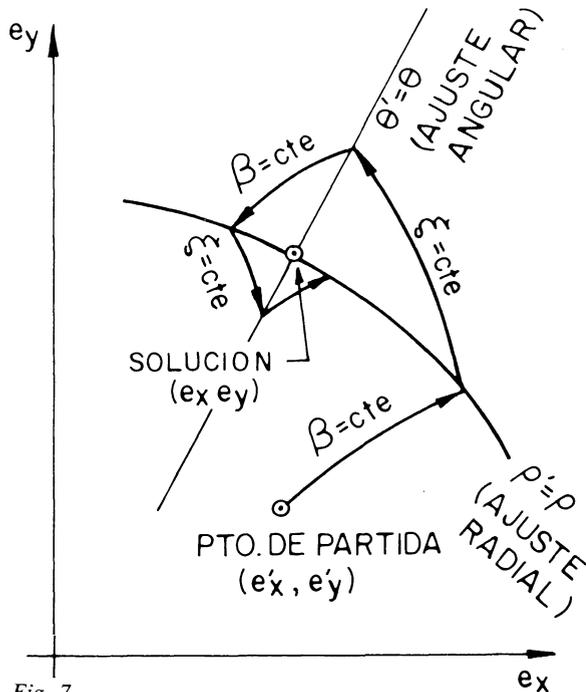
Este proceso se prosigue hasta ajustar la componente angular, es decir, hasta conseguir que sea:

$$|\varepsilon_{\theta 2}| \leq 0,1^\circ$$

- e) Se comprueba si en ese momento se verifica también el ajuste radial:

$$|\varepsilon_{\rho 2}| \leq 0,001 \cdot \rho$$

en cuyo caso se da el proceso por terminado. En caso contrario se vuelve al paso b).



En la Fig. 7 se esquematiza la trayectoria seguida por el punto de paso de la resultante  $N$  hasta la convergencia del proceso. El método de correcciones independientes y sucesivas de  $\xi$  y  $\beta$  ajustando, respectivamente,  $\rho$  y  $\theta$  suele ser bastante eficaz, sobre todo teniendo en cuenta los siguientes refinamientos:

— Si el valor de  $\rho$  es muy grande (solicitación próxima a flexión simple), pequeñas variaciones de  $\xi$  dan lugar a grandes variaciones de  $\rho$ , y es difícil conseguir el ajuste radial. Para evitarlo, siempre que sea:

$$\rho > 1/2 \sqrt{h_x^2 + h_y^2},$$

se sustituye  $\rho$  por su inversa. O sea, en vez de tomar;

$$\rho = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \quad \text{y} \quad \rho' = \sqrt{e_x'^2 + e_y'^2},$$

se toma:

$$\rho = 1/\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \quad \text{y}$$

$$\rho' = 1/\sqrt{e_x'^2 + e_y'^2}$$

— Se opera, como se verá a continuación (apartado 4), no sobre la sección rectangular de dimensiones  $h_x \times h_y$ , sino sobre la sección cuadrada reducida adimensional de dimensiones  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ , con lo cual, y teniendo en cuenta que la disposición de armado es simétrica, las líneas  $\beta = \text{cte.}$  no se separan demasiado de las rectas  $\theta = \text{cte.}$  (ver Fig. 7), mientras que las líneas  $\xi = \text{cte.}$  no se alejan demasiado de las circunferencias  $\rho = \text{cte.}$

#### 4. Formulación

Como se ha dicho en el apartado anterior, la base del programa la constituye la subrutina 450, que calcula la sollicitación resistente  $M_x, M_y, N$  a partir de los valores de los parámetros  $\xi, \beta$  que fijan la posición del eje neutro. También calcula las excentricidades de la sollicitación resistente  $e'_x, e'_y$  y los errores radial y angular respecto a las excentricidades  $e_x, e_y$  de la sollicitación actuante,  $\epsilon_\rho, \epsilon_\theta$ .

Antes de devolver el control al programa principal, la subrutina 450 muestra en pantalla los valores de los parámetros de entrada  $\xi, \beta$  y de los errores resultantes  $\epsilon_\rho, \epsilon_\theta$  para que el usuario pueda controlar la marcha del proceso. La subrutina 450 consta de los pasos siguientes:

a) Cálculo del *canto total oblicuo*  $h$  en la sección cuadrada adimensional (Fig. 8):

$$h = c + s;$$

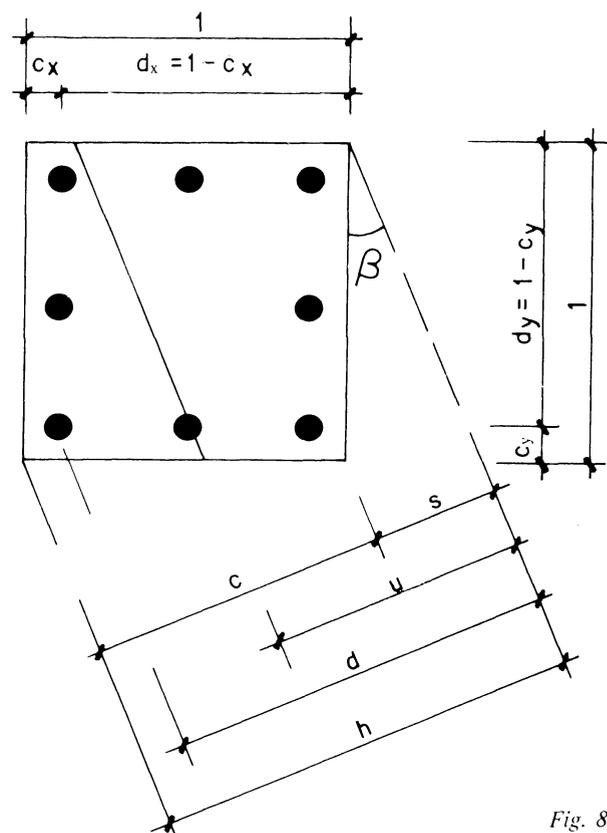
siendo:  $t = \text{tg } \beta$ ;

$$c = \cos \beta = 1/\sqrt{1 + t^2};$$

$$s = \text{sen } \beta = t \cdot c.$$

b) Cálculo del *canto útil oblicuo*  $d$  (Fig. 8):

$$d = (1 - c_x) \cdot c + (1 - c_y) \cdot s;$$



siendo:

$c_x = r/h_x =$  recubrimiento relativo en dirección x;

$c_y = r/h_y =$  recubrimiento relativo en dirección y.

c) Cálculo del canto útil relativo  $\delta$ :

$$\delta = d/h.$$

d) Cálculo de las **deformaciones**  $\varepsilon_c$  y  $\varepsilon_s$  (Fig. 6). Teniendo en cuenta la definición del parámetro  $\xi$  en los distintos dominios del diagrama de pivotes, indicada en el apartado 3, resultan las siguientes expresiones para las deformaciones en la fibra más comprimida del hormigón  $\varepsilon_c$  y en la armadura más traccionada  $\varepsilon_s$ , expresadas en diezmilésimas, en función de dicho parámetro  $\xi$ :

Dominio 1 (tracción compuesta)  $-1 \leq \xi < 0$ :

$$\varepsilon_c = 100 \cdot \xi; \quad \varepsilon_s = -100;$$

Dominio 2 (flexión compuesta)  $0 \leq \xi < 0,259 \cdot \delta$ :

$$\varepsilon_c = \frac{100 \cdot \xi}{\delta - \xi}; \quad \varepsilon_s = -100;$$

Dominios 3-4 (flexión compuesta)  $0,259 \cdot \delta \leq \xi < 1$ :

$$\varepsilon_c = 35; \quad \varepsilon_s = 35 \frac{\xi - \delta}{\xi};$$

Dominio 5 (compresión compuesta)  $1 \leq \xi < 2$ :

$$\varepsilon_c = 50 - 15 \cdot \xi; \quad \varepsilon_s = \varepsilon_r + (\xi - 1)(20 - \varepsilon_r),$$

siendo  $\varepsilon_r = 35 \cdot (1 - \delta)$  la deformación en la armadura para  $\xi = 1$ .

e) Cálculo de la deformación  $\varepsilon_u$  en una fibra a una profundidad  $u$  (Fig. 8):

$$\varepsilon_u = \varepsilon_c - u \cdot \Delta \varepsilon;$$

$$\text{siendo } \Delta \varepsilon = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_s}{d}$$

el gradiente de deformaciones.

f) Cálculo de las *resultantes de las tensiones del hormigón*  $M_{xc}$ ,  $M_{yc}$ ,  $N_c$ . Para simplificar la formulación y disminuir el número de operaciones, se trabaja sobre la sección cuadrada adimensional de  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ , obteniendo los esfuerzos reducidos adimensionales  $\mu_{xc}$ ,  $\mu_{yc}$ ,  $\nu_c$ , y luego se calculan las resultantes buscadas:

$$N_c = \nu_c \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot h_x \cdot h_y; \quad ;$$

$$M_{xc} = \mu_{xc} \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot h_x \cdot h_y^2; \quad ;$$

$$M_{yc} = \mu_{yc} \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot h_x^2 \cdot h_y. \quad .$$

Según la profundidad del eje neutro, que a su vez depende del parámetro  $\xi$  (ver apartado 3), pueden presentarse cinco casos (Fig. 9):

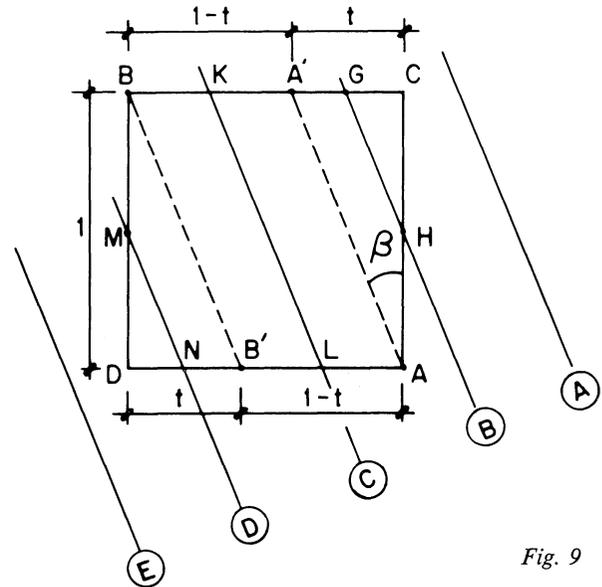


Fig. 9

Caso A:  $-1 \leq \xi \leq 0$  (tracción compuesta).

Las resultantes de las tensiones del hormigón son nulas.

Caso B:  $0 < \xi \leq t_2$ , siendo  $t_2 = t/(1+t)$  (flexión compuesta).

La zona comprimida es triangular, abarcando el triángulo CGH (Fig. 9) igual o menor que el CAA'. Se usa la subrutina 900.

Caso C:  $t_2 < \xi \leq t_1$ , siendo  $t_1 = 1/(1+t)$  (flexión compuesta).

La zona comprimida consta del triángulo CAA', para el que se usa la subrutina 900, y del paralelogramo AA'KL, igual o menor que el paralelogramo AA'BB', para el que se usa la subrutina 1060.

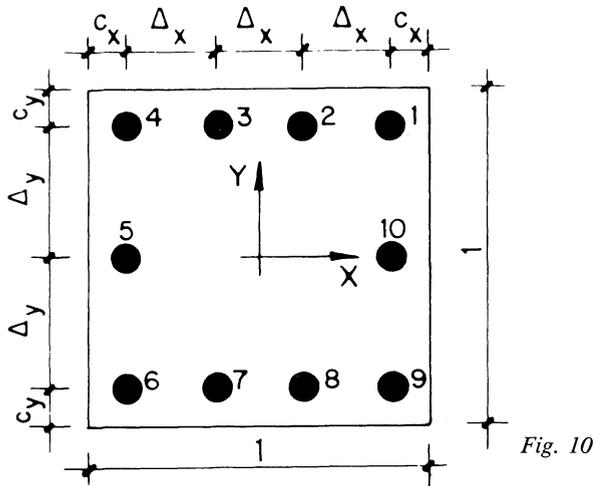
Caso D:  $t_1 < \xi \leq 1$  (flexión compuesta).

La zona comprimida consta del triángulo CAA', para el que se usa la subrutina 900; del paralelogramo AA'BB', para el que se usa la subrutina 1060, y del trapecio BB'MN, igual o menor que el triángulo BB'D, para el que se usa la subrutina 1200.

Caso E:  $1 < \xi \leq 2$  (compresión compuesta).

La zona comprimida consta del triángulo CAA', para el que se usa la subrutina 900; del paralelogramo AA'BB', para el que se usa la subrutina 1060, y del triángulo BB'D, para el que se usa la subrutina 1200.

Mediante la utilización de las subrutinas auxiliares 900, 1060 y 1200, que se describen en el apartado siguiente, se consigue la integración de las tensiones



del hormigón con una precisión de 3 ó 4 cifras significativas, suficiente a efectos prácticos, y en un tiempo notablemente inferior al que exigiría la utilización de las fórmulas de integración exactas, sin complicar por ello la programación de forma apreciable.

- g) Cálculo de las *resultantes de las tensiones de las armaduras*  $M_{xs}$ ,  $M_{ys}$ ,  $N_s$ . Se trabaja igualmente sobre la sección cuadrada adimensional de  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  (Fig. 10). Se trata de evaluar las sumatorias:

$$N_s = \sum_{i=1}^n A \cdot \sigma_i ;$$

$$M_{xs} = \sum_{i=1}^n A \cdot \sigma_i \cdot y_i ;$$

$$M_{ys} = \sum_{i=1}^n A \cdot \sigma_i \cdot x_i ;$$

siendo:

- $n$  = número de barras de la sección =  $2(n_1 + n_2) - 4$ ;
- $n_1$  = número de barras en dirección  $x$  = primer dígito de CA;
- $n_2$  = número de barras en dirección  $y$  = segundo dígito de CA;
- $A$  =  $\pi \cdot \varnothing^2 / 400 \text{ (cm}^2\text{)}$  = área de una barra;
- $\sigma_i (\varepsilon_i)$  = tensión de la barra ( $\text{t/cm}^2$ ), función de su deformación;
- $\varepsilon_i (u_i)$  = deformación de la barra, función su profundidad;
- $x_i, y_i$  = coordenadas de la barra;
- $u_i$  = profundidad oblicua de la barra (Fig. 8).

Para calcular estas sumatorias se realiza un ciclo FOR, en el que se considera cada barra  $i$ , calculando sucesivamente la profundidad  $u$ ,

y las coordenadas  $x_i, y_i$  a partir de las de la barra anterior; la deformación  $\varepsilon_i$  (ver epígrafe e más arriba), y la tensión  $\sigma_i$  mediante:

$$\sigma_i = \varepsilon_i \cdot E_s ,$$

con las limitaciones:

$$\sigma_i \geq f_{yd} ; \quad \sigma_i \leq -f_{yd} .$$

## 5. Subrutinas auxiliares

- a) SUBROUTINA 900: Integración de las tensiones del hormigón en el triángulo CGH (Figura 11).

Se trata de evaluar las integrales:

$$v = \int_0^{h_t} \sigma_u \cdot b_u \cdot du ;$$

$$\mu_x = \int_0^{h_t} \sigma_u \cdot b_u \cdot y_u \cdot du ;$$

$$\mu_y = \int_0^{h_t} \sigma_u \cdot b_u \cdot x_u \cdot du ;$$

siendo:

$h_t$  =  $s \cdot \xi / t_2$  = altura del triángulo (Fig. 11);

$u$  = profundidad de una fibra genérica del hormigón;

$\sigma_u (\varepsilon_u)$  = tensión adimensionalizada del hormigón a la profundidad  $u$ , que es función de la deformación  $\varepsilon_u$ ;

$\varepsilon_u (u)$  = deformación en la fibra a la profundidad  $u$ , que es función de  $u$  (epígrafe 4e);

$b_u$  =  $u / (s \cdot c)$  = ancho a la profundidad  $u$  (Fig. 11);

$x_u$  =  $1/2 (1 - u/c)$  = abscisa del punto P, centro de la rebanada a la profundidad  $u$ ;

$y_u$  =  $1/2 (1 - u/s)$  = ordenada del punto P.

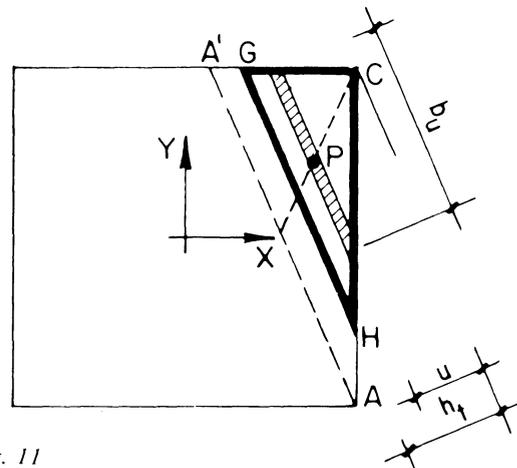


Fig. 11

Estas integrales se evalúan mediante la aproximación de CHEBYSHEV:

$$I = \int_{u_0}^{u_0+h} f(u) \cdot du \approx \frac{h}{7} \sum_{i=1}^7 f(u_i);$$

siendo:

$u_i = u_0 + \zeta_i \cdot h$  = siete puntos del intervalo de integración (puntos de Chebyshev);

$\zeta_i$  = coeficientes adimensionales de los puntos de Chebyshev ( $0 < \zeta_i < 1$ ), cuyos valores son los siguientes:

$$\zeta_1 = 0,0581 \quad ; \quad \zeta_7 = 0,9419;$$

$$\zeta_2 = 0,2352 \quad ; \quad \zeta_6 = 0,7648;$$

$$\zeta_3 = 0,3380 \quad ; \quad \zeta_5 = 0,6620;$$

$$\zeta_4 = 0,5000$$

- b) SUBROUTINA 1060: Integración de las tensiones del hormigón en el paralelogramo AA'KL (Fig. 12).

Las integrales son las mismas, y se utiliza también la aproximación de Chebyshev. En este caso, los cambios son los siguientes:

$$h_t = s \cdot \left( \frac{\xi}{t_2} - 1 \right) = \text{altura del paralelogramo};$$

$u_i = s + \zeta_i \cdot h_t$  = puntos de Chebyshev;

$b_u = 1/c = \text{cte};$

$x_u = 1/2 (1 - t) - (u - s)/c;$

$y_u = 0$  (no es preciso evaluar  $\mu_x$ , por ser nulo).

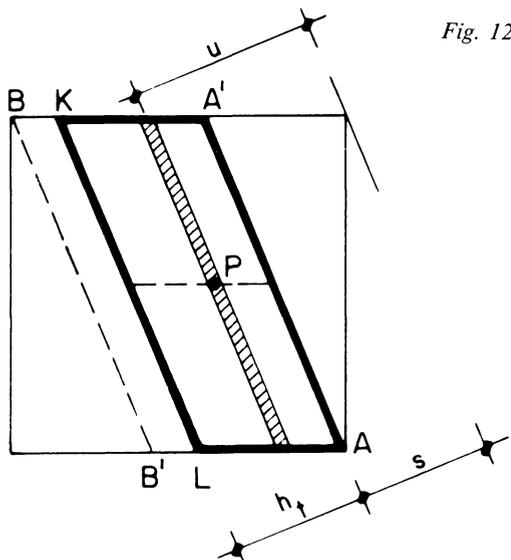


Fig. 12

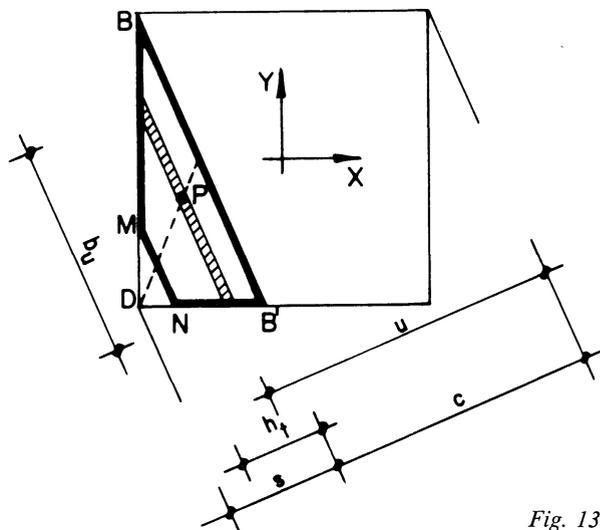


Fig. 13

- c) SUBROUTINA 1200: Integración de las tensiones del hormigón en el trapecio BB'MN (Fig. 13).

En este caso, el procedimiento es análogo, siendo:

$h_t = (c + s) \xi - c$  = altura del trapecio;

$u_i = c + \zeta_i \cdot h_t$  = puntos de Chebyshev;

$b_u = (s + c - u)/(s \cdot c)$  = ancho a la profundidad  $u$ ;

$x_u = 1/2 (s - u)/c;$

$y_u = 1/2 (c - u)/s.$

## 6. Listado en BASIC

Al final del artículo se incluye un listado del programa y de las subrutinas en el lenguaje BASIC del ordenador personal portátil HP-75. Este listado ha sido producido por la impresora portátil HP-82162A, que imprime líneas con un máximo de 24 caracteres; cuando una instrucción no cabe en una línea, la corta en los caracteres núm. 24, 48, etc., y la imprime en varias líneas sucesivas.

Sobre este listado conviene hacer algunas aclaraciones, señalando las principales peculiaridades del BASIC del HP-75 en relación con el BASIC de otros ordenadores personales:

- En las instrucciones de asignación no es necesario utilizar la palabra LET. Así, por ejemplo, la línea número 8 dice:  
F1 = 1750 \* .9/1.5, mientras que en otros ordenadores se pondría:  
LET F1 = 1750 \* .9/1.5.
- Una misma línea puede contener varias instrucciones separadas por el símbolo @  
Por ejemplo, la línea 18 tiene dos instrucciones de asignación: F1 = 10 \* F1 y F2 = F2/1000.
- Una instrucción de asignación puede ser múltiple, asignando un cierto valor a varias variables separadas por comas. Así, la línea 590 tiene la instrucción M,M1,M2 = 0,

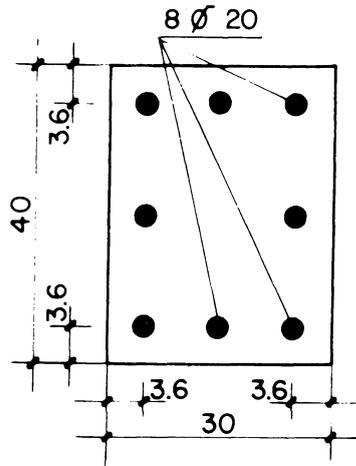


Fig. 14

equivalente a las tres instrucciones  $M = 0$ ,  $M_1 = 0$  y  $M_2 = 0$ .

- La función IP (línea 32) tiene como resultado la parte entera de la expresión que figura entre paréntesis como argumento. En este programa es equivalente a la función INT, de uso más común en otras máquinas.
- La función PI (línea 80) es una función sin argumentos que proporciona el valor de la constante  $\pi = 3,1415927$ .
- La función SGN (línea 260) tiene como resultado  $+1$  ó  $-1$ , según que el signo del argumento que figura entre paréntesis sea positivo o negativo, respectivamente.

## 7. Ejemplo

A) Se trata de comprobar la sección de un soporte corto de  $30 \times 40 \text{ cm}^2$  armada con  $8 \text{ Ø } 20$  (Fig. 14) y sometida a las solicitaciones siguientes:

- a)  $M_{xd} = 14,9 \text{ mt}$ ;  $M_{yd} = 0$  ;  $N_d = 81,9 \text{ t}$
- b)  $M_{xd} = 0$  ;  $M_{yd} = 10,3$ ;  $N_d = 68$
- c)  $M_{xd} = 8,8$  ;  $M_{yd} = 6,6$ ;  $N_d = 61,6$

Las resistencias de proyecto y coeficientes de seguridad son:

$$f_{ck} = 175 \text{ kp/cm}^2 \quad ; \quad \gamma_c = 1,5$$

$$f_{yk} = 4.200 \text{ kp/cm}^2 \quad ; \quad \gamma_s = 1,1$$

Los datos y resultados (con su tiempo de cálculo) se dan en la tabla 1.

Los valores de los parámetros  $\xi$ ,  $\beta$  y de los errores  $\varepsilon_\rho$ ,  $\varepsilon_\theta$  proporcionados por la SUBROUTINA 450 en sus diferentes llamadas, correspondientes a la hipótesis c) (flexocompresión esviada) son los siguientes:

$\xi$	$\beta$	$\varepsilon_\rho$	$\varepsilon_\theta$
.50000	45.000	.16745	3.396
.60000	45.000	-.01861	3.064
.59000	45.000	-.00705	3.080
.58390	45.000	-.00090	3.095
.58301	45.000	-.00001	3.097
.58301	54.000	.01504	13.972
.58301	45.000	-.00001	3.097
.58301	42.437	-.00342	-.177
.58301	42.575	-.00325	.000
.68301	42.575	-.07999	-.043
.58301	42.575	-.00325	.000
.57878	42.575	.00101	.002
.57978	42.575	-.00002	.001

B) Se desea comprobar el efecto, sobre el soporte anterior, de una caída de la resistencia del hormigón del 20 %.

La resistencia de cálculo, anteriormente de  $f_{cd} = 175 \cdot 0,9/1,5 = 105 \text{ kp/cm}^2$ , pasará a ser de  $f_{cd} = 0,8 \cdot 105 = 84 \text{ kp/cm}^2$ . Los datos y resultados se dan en la tabla 2.

TABLA 1

Tarea	$f_{cd}$	$f_{yd}$	$h_x$	$h_y$	r	CA	$\varnothing$	$M_{xd}$	$M_{yd}$	$N_d$	$N_u$	$\gamma_n$	t (seg)
2			30	40	3.6	33	20	14.9	0	81.9	82.36	1.01	11
5								0	10.3	68	73.24	1.08	9
5								8.8	6.6	61.6	67.15	1.09	47

TABLA 2

Tarea	$f_{cd}$	$f_{yd}$	$h_x$	$h_y$	r	CA	$\varnothing$	$M_{xd}$	$M_{yd}$	$N_d$	$N_u$	$\gamma_n$	t (seg)
1	84	3818	30	40	3.6	33	20	14.9	0	81.9	74.60	0.91	9
5								0	10.3	68	66.37	0.98	9
5								8.8	6.6	61.6	61.90	1.00	44

## 8. Referencias bibliográficas

1. COMISION PERMANENTE DEL HORMIGON: «Instrucción EH-82 para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado». Servicio de publicaciones del Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Madrid, 1982.
2. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON (CEB): «Code Modèle CEB-FIP pour les Structures en Béton». Boletín n.º 124/125 F del CEB. París, 1978
3. F. MORAN: «Programa para el dimensionamiento de secciones rectangulares de hormigón armado en flexocompresión recta con un ordenador portátil». Hormigón y Acero núm. 153, 4.º trimestre 1984.
4. F. MORAN: «Cálculo de secciones de hormigón armado, sometidas a solicitaciones normales, en el estado límite último». Monografía núm. 304 del Instituto Eduardo Torroja. Madrid, 1972.
5. P. J. MONTOYA, A. G. MESEGUER, F. MORAN: «Hormigón Armado». 11ª Edición. Editorial Gustavo Gili. Barcelona, 1983.

### LISTADO DEL PROGRAMA CM2R

```

3 REM CM2R: Compr. F1, Esu.
  Sec. Rectang.
4 INTEGER C3, N1, N2, N3, N(
  4)
5 DIM K(7)
8 F1=1750*.9/1.5 @ F2=4.
  2/1.1
9 INPUT 'Tarea='; K1
12 ON K1 GOTO 16, 20, 24, 3
  0, 160
16 INPUT 'fcd, fyd(kp/cm2
  )='; F1, F2
18 F1=10*F1 @ F2=F2/1000
20 INPUT 'hx, hy(cm)' ; H1
  , H2
22 H1=H1/100 @ H2=H2/100
24 INPUT 'Recubr. r(cm)=
  ' ; R
26 R=R/100
28 F7=.85*F1*H1*H2 @ F5=
  F7*H1 @ F6=F7*H2
30 INPUT 'Cod. Arm., fi(mm
  )='; C3, F4
32 N1=IP(C3/10) @ N2=C3-
  10*N1
40 N3=2*(N1+H2)-4
50 N(1)=N1 @ N(2)=N1+N2-
  1
55 N(3)=N(2)+N1-1 @ N(4)
  =N3
56 K(4)=.5
57 K(1)=.0581 @ K(2)=.23
  52 @ K(3)=.338
58 K(7)=.9419 @ K(6)=.76
  48 @ K(5)=.662

```

```

60 C1=R/H1 @ C2=R/H2
70 R1=(1-2*C1)/(N1-1) @
  R2=(1-2*C2)/(N2-1)
75 X=.5-C1 @ Y=.5-C2
77 V1=-R1 @ V2=0
80 F4=F4*F4*PI/400
90 F3=180/PI
100 IF N3*F4/H1/H2=40 T
  HEN 130
110 DISP 'No cumple cuan
  tia minima'
120 WAIT 5 @ GOTO 9
130 H3=H1/20 @ IF H3<.02
  THEN H3=.02
140 H4=H2/20 @ IF H4<.02
  THEN H4=.02
160 INPUT 'Mxd, Myd, Nd(mt
  , t)='; G1, G2, G
162 E1=G2/G @ E2=G1/G
164 IF E1>H3 OR E2>H4
  THEN 170
166 IF H1<H2 THEN E1=H3
  @ G2=E1*G @ G1, E2=0 @ GO
  TO 170
168 E2=H4 @ G1=E2*G @ G2
  , E1=0
170 R3=SQR(E1*E1+E2*E2)
  @ F=90 @ W=0
175 IF R3>SQR(H1*H1+H2*H
  2)/2 THEN R3=1/R3 @ W=1
180 IF E1<>0 THEN F=F3*A
  TN(E2/E1*H1/H2)
190 L=.5 @ A=F @ GOSUB 4
  50
200 L1=L @ E5=E3 @ L=L1+

```

```

210 GOSUB 450
220 IF ABS(E3)>=.001*R3
  THEN 250
230 IF ABS(E4)<.1 THEN 4
  20
240 GOTO 310
250 D1=(L1-L)/(E5-E3)*E3
260 IF ABS(D1)>.1 THEN D
  1=.1*SGN(D1)
270 L1=L @ E5=E3 @ L=L-D
  1
280 IF L>2 THEN L=2
290 IF L<-1 THEN L=-1
300 GOTO 210
310 A1=A @ E6=E4 @ A=A1+
  9
320 GOSUB 450
330 IF ABS(E4)>.1 THEN
  360
340 IF ABS(E3)<.001*R3 T
  HEN 420
350 GOTO 200
360 D2=(A1-A)/(E6-E4)*E4
370 IF ABS(D2)>9 THEN D2
  =9*SGN(D2)
380 A1=A @ E6=E4 @ A=A-D
  2
390 IF A>90 THEN A=90
400 IF A<0 THEN A=0
410 GOTO 320
420 DISP USING '2(3d,2d)
  ' ; M, M/G @ WAIT 4
430 GOTO 9
440 END

```

## LISTADO DE LA SUBROUTINA 450

```

450 IF A<=45 THEN T=TAN(
A/F3) @ GOTO 470
460 T=TAN((90-A)/F3)
470 T1=1/(1+T) @ T2=1-T1
480 C=1/SQR(1+T*T) @ S=T
*C
490 D=((1-C1)*C+(1-C2)*S
)/(C+S)
500 IF L>0 THEN 520
510 P1=100*L @ P2=-100 @
GOTO 580
520 IF L>.259*D THEN 540
530 P1=100*L/(D-L) @ P2=
-100 @ GOTO 580
540 IF L>1 THEN 560
550 P1=35 @ P2=35*(L-D)/
L @ GOTO 580
560 P1=50-15*L @ P2=35*(
1-D)
570 P2=P2+(L-1)*(20-P2)
580 P3=(P1-P2)/D/(C+S)
590 M,M1,M2=0
595 IF L<=0 THEN 600
600 IF L<T2 THEN X1=L @
GOSUB 900 @ GOTO 660

```

```

610 X1=T2 @ GOSUB 900
620 IF L<T1 THEN X1=L @
GOSUB 1060 @ GOTO 660
630 X1=T1 @ GOSUB 1060
640 IF L<1 THEN X1=L @ G
OSUB 1200 @ GOTO 660
650 X1=1 @ GOSUB 1200
660 IF A>45 THEN M3=M2 @
M2=M1 @ M1=M3 @ T=S @ S
=C @ C=T
670 M=M*F7 @ M1=M1*F6 @
M2=M2*F5
680 U,U1,U2=0 @ Z=C1*C+C
2*S @ V3=C*R1
690 FOR I=1 TO N3
700 P=P1-Z*P3
710 S1=.21*P
720 IF S1<-F2 THEN S1=-F
2
730 IF S1>F2 THEN S1=F2
740 S1=S1*F4
750 U=U+S1
760 U1=U1+S1*Y
770 U2=U2+S1*X

```

```

780 IF I=N(1) THEN V1=0
@ V2=-R2 @ V3=S*R2 @ GOT
O 820
790 IF I=N(2) THEN V1=R1
@ V2=0 @ V3=-C*R1 @ GOT
O 820
800 IF I=N(3) THEN V1=0
@ V2=R2 @ V3=-S*R2
820 X=X+V1 @ Y=Y+V2 @ Z=
Z+V3
830 NEXT I
832 V1=-R1 @ V2=0
835 M=M+U @ M1=M1+U1*H2
@ M2=M2+U2*H1
840 R4=M2/M @ R5=M1/M
850 E3=SQR(R4*R4+R5*R5)-
R3
855 IF M=1 THEN E3=1/(E3
+R3)-R3
860 E4=90-F
870 IF ABS(R4)>=.001 THE
N E4=F3*ATN(R5/R4*H1/H2)
-F
880 DISP USING '2(2d.5d,
4d.3d)'; L,A,E3,E4
890 RETURN

```

## LISTADO DE LAS SUBROUTINAS AUXILIARES

```

900 IF T2=0 THEN 1050
905 H=S*X1/T2
910 FOR I=1 TO 7
920 Z=K(I)*H
930 P=P1-Z*P3
940 IF P>20 THEN S1=1 @
GOTO 960
950 P=1-P/20 @ S1=1-P*P
960 S1=S1*K(I)
970 M=M+S1
980 M1=M1+S1*(1-Z/S)
990 M2=M2+S1*(1-Z/C)
1000 NEXT I
1010 P=H*H/S/C/14
1020 M=2*M*P
1030 M1=M1*P
1040 M2=M2*P
1050 RETURN

```

```

1060 IF T2=0 THEN H=X1 @
GOTO 1070
1065 H=S*(X1/T2-1)
1070 U,U2=0 @ X0=(1-T)/2
1080 FOR I=1 TO 7
1090 Z=S+K(I)*H
1100 P=P1-Z*P3
1110 IF P>20 THEN S1=1 @
GOTO 1130
1120 P=1-P/20 @ S1=1-P*P
1130 U=U+S1
1140 U2=U2+S1*(X0-(Z-S)/
C)
1150 NEXT I
1160 P=H/C/7
1170 M=M+U*P
1180 M2=M2+U2*P
1190 RETURN

```

```

1200 IF T2=0 THEN 1360
1205 H=(C+S)*X1-C
1210 U,U1,U2=0
1220 FOR I=1 TO 7
1230 Z=C+K(I)*H
1240 P=P1-Z*P3
1250 IF P>20 THEN S1=1 @
GOTO 1270
1260 P=1-P/20 @ S1=1-P*P
1270 S1=S1*(S-K(I)*H)
1280 U=U+S1
1290 U1=U1+S1*(C-Z)/S
1300 U2=U2+S1*(S-Z)/C
1310 NEXT I
1320 P=H/S/C/14
1330 M=M+U*2*P
1340 M1=M1+U1*P
1350 M2=M2+U2*P
1360 RETURN

```

☆ ☆ ☆