

ESTUDIO DEL ANALISIS NO LINEAL DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON MEDIANTE SUPERPOSICION DE PROBLEMAS LINEALES DE DEFORMACIONES*

Autor:

Antonio Aguado de Cea

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Profesor Agregado de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Barcelona.

Director de la Tesis:

Juan Murcia Vela

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Catedrático de Hormigón y Director de la ETSICCP de Barcelona.

451-8

EL origen de esta Tesis está en los trabajos realizados por el profesor Juan Murcia en línea de abordar, de forma homogénea, el análisis de estructuras a partir de deformaciones, las cuales pueden ser debidas a: características reológicas del hormigón (p. e. retracción, fluencia); agentes externos (p. e. distribuciones uniformes o gradientes térmicos); esfuerzos (p. e. esfuerzos de pretensado, esfuerzos de segundo orden); características no lineales del material (p. e. incrementos de curvatura).

El planteamiento radica en la posibilidad de poner en un elemento lineal los esfuerzos y deformaciones en los extremos del mismo, en función de las acciones que actúan en un punto genérico del elemento, pudiendo ser estas acciones: cargas, deformaciones y desplazamientos. Esta Tesis se centra fundamentalmente en las deformaciones de flexión debidas a las características no lineales del material, que se traducen a nivel sección en un incremento de curvatura.

** Esta Tesis, leída en la E. T. S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Barcelona, en abril de 1980, obtuvo la calificación de sobresaliente "cum laude".*

El método propuesto para analizar la estructura se encuadra dentro de los llamados "métodos exactos" que implican el cumplimiento simultáneo de las distintas condiciones que configuran el análisis estructural, éstas son:

Condiciones de equilibrio, condiciones de compatibilidad y condiciones del material. Estas condiciones, en el método propuesto, se cumplen para cualquier situación de la estructura, tanto en servicio como en rotura.

Los distintos métodos que existen para estudiar el comportamiento de la estructura con unas características no lineales del material abordan el problema según un análisis compacto o bien un análisis separativo.

En el análisis compacto, las características no lineales del material se introducen en cada sección, variando sus características físicas (p. e.: área, inercia, módulo de elasticidad E, etc.). Esto implica, dependiendo de si se trabaja con métodos matriciales abordándoles en equilibrio o compatibilidad, variar la matriz de rigidez o de flexibilidad que tendríamos con unas características lineales del material.

En el análisis separativo, las características no lineales del material se introducen en cada sección (o zona), como una acción (deformación o rotación impuesta). Esto supone, en el caso citado de trabajar con métodos matriciales, la no variación de la matriz de rigidez o de flexibilidad, y sí una variación de la matriz de esfuerzos. Este tipo de análisis permite pasar de un problema no lineal a superposición de problemas lineales.

Los métodos que se encuadran en los dos tipos de análisis anteriores pueden ser de resolución: directa, lo que normalmente implica considerar hipótesis poco precisas, aplicación manual, campo de aplicación restringido (p. e.: estructuras de pequeño grado de hiperestaticidad, situaciones de rotura, etc.), o bien, mediante interacciones, con las que generalmente se superan las limitaciones anteriores, permitiendo trabajar con hipótesis más precisas, utilización de ordenadores, gran potencia en el campo de aplicación, etc.

El método, que a continuación se presenta, encaja dentro del análisis estructural en primer orden no

lineal (por el material) con una resolución de tipo separativo —en el que se trabaja con problemas lineales—, por lo que es posible la superposición de los mismos.

Método propuesto

El objeto de este método es estudiar el comportamiento de la estructura en cualquier situación de la misma, considerando que el dimensionamiento está definido por un cálculo previo. Así, pues, los datos de partida que se disponen son:

- Acciones que actúan en la estructura.
- Características geométricas tanto a nivel sección como a nivel estructura.
- Características de los materiales.

Con los datos anteriores podemos definir, a nivel sección, la condición del material por medio de un diagrama momento-curvatura. Este diagrama —si estamos estudiando el comportamiento— debe reflejar de manera precisa al mismo, por lo que se recomienda: considerar la contribución del hormigón entre fisuras, diagramas tensión-deformación parabólicos para el hormigón y los diagramas característicos de cada tipo de acero.

Vamos a ver a continuación las distintas etapas del método propuesto, para lo que consideraremos una estructura general, tanto por su geometría como por las acciones que puedan actuar (Fig. 1). En cada sección de la misma se define su correspondiente diagrama momento-curvatura.

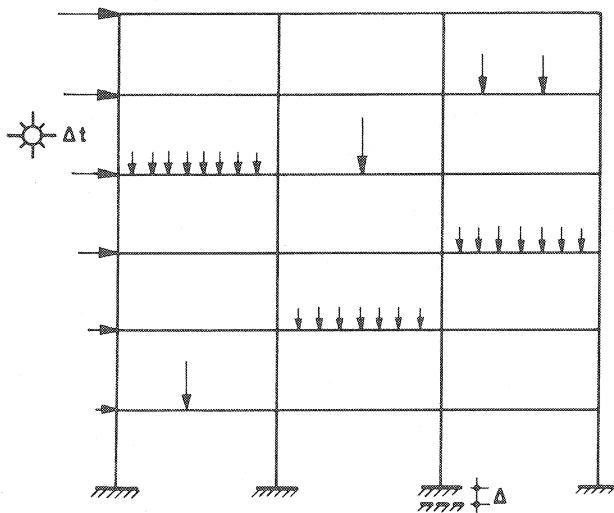


Fig. 1

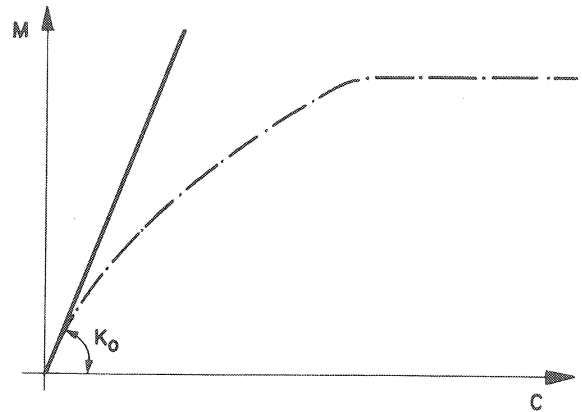


Fig. 2

En la **primera etapa**, se toman las acciones que actúan en la estructura (cargas, deformaciones, descensos de apoyos) y se hace un cálculo lineal de la misma tomando una relación momento-curvatura lineal (rigidez K_0). Esta rigidez puede ser la correspondiente a la sección neta homogeneizada u otra cualquiera adoptada por criterio.

La solución que se obtiene en esta etapa es equilibrada y compatible. Equilibrada puesto que los esfuerzos que se obtienen equilibran a las acciones y compatibles puesto que las deformaciones que se producen son compatibles con las condiciones de borde. No obstante esta solución que está representada en una sección genérica de la estructura por el punto 0 (Fig. 3), no cumple con las características reales del material que para los esfuerzos que actúan en esta sección vendrían representadas por el punto 0₁. Así pues, en cada sección aparecen unos incrementos de curvatura, diferencia de la curvatura real y la obtenida en el cálculo de estas etapas (en la sección genérica, representada en la figura 3, estos incrementos están dados por ΔC_1).

En la **segunda etapa** se estudian los efectos que se producen en la estructura debido a que los incrementos de curvatura existentes en cada sección no están compatibilizados. Recordemos que en los extremos de cada elemento estructural aparecerán unos esfuerzos de empotramiento que son función de los incrementos de curvatura citados. A partir de aquí podemos poner estos esfuerzos como esfuerzos sobre los nudos y realizar un cálculo lineal de la estructura con las características tomadas en la etapa anterior (rigidez K_0). Así, pues, fruto de los cálculos realizados en esta etapa son unos esfuerzos hiperestáticos que compatibilizan las deformaciones producidas por los incrementos anteriores. A nivel sección, este sistema de esfuerzos está dado por el ΔM_1 (Fig. 3)

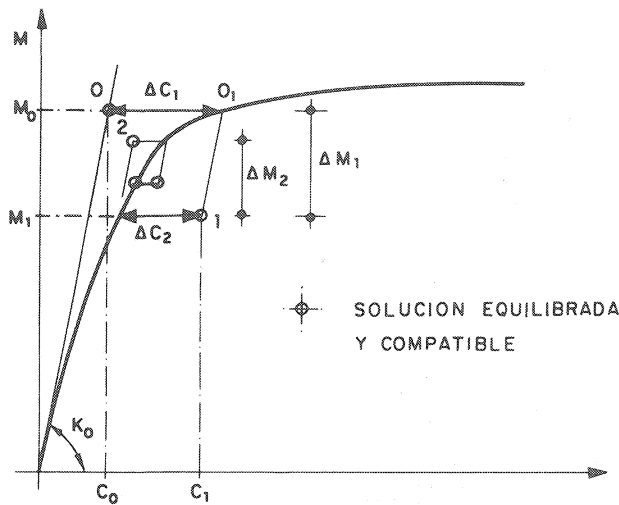


Fig. 3.—Aplicación a una sección del método propuesto.

Ahora bien, puesto que existe linealidad (dichos esfuerzos se obtienen por medio de un cálculo lineal) podemos superponer, a los esfuerzos obtenidos en la primera etapa, los de esta segunda, con lo que se obtiene el punto 1. Este punto se encuentra en una paralela a la rigidez inicial K_0 puesto que se está trabajando con dicha rigidez.

El punto 1 representa una solución equilibrada y compatible del problema, si bien no cumple con las características reales del material, por lo que sería preciso introducir el sistema de deformaciones dado por los distintos incrementos de curvatura ΔC_2 de cada sección.

La determinación de los efectos de este sistema (ΔC_2) en la estructura sigue un proceso totalmente análogo al descrito con el sistema anterior (ΔC_1). Así pues, este procedimiento implica un proceso iterativo en el que se pivotea sobre las condiciones reales del material para cada iteración.

Desde el punto de vista teórico, tendremos la solución cuando el sistema de esfuerzos ΔM_i es nulo. Por otro lado, para obtener la solución numéricamente, se fija un criterio de convergencia que depende de la precisión que se quiera definir con esta solución. Normalmente dicho criterio se establece en función de un cierto porcentaje de los esfuerzos iniciales en una sección genérica

$$\Delta M_i \leq \alpha \cdot M_0$$

donde

- ΔM_i : Incremento de momentos entre dos iteraciones consecutivas.
- α : Porcentaje.
- M_0 : Momento flector inicial en la sección de estudio.

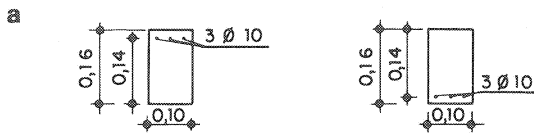
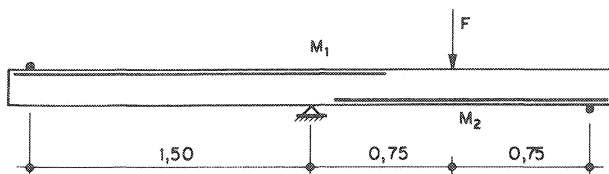
Como secciones genéricas se recomienda tomar las secciones que están sometidas a los mayores esfuerzos en la estructura o en cada elemento de la misma, si bien resulta más rápido tomar las secciones extremas de cada elemento sin que por ello disminuya la precisión. Por otro lado el porcentaje α se fijará en función de la precisión que queramos obtener siendo normales valores alrededor del 5 %.

Para disminuir el número de iteraciones pueden tomarse diversas medidas de las que destacamos. Una de ellas es emplear un método de resolución mediante tanteos (este procedimiento se desarrolla en la Tesis) y otro va encaminado a tomar una rigidez inicial K_0 próxima a la solución para lo que es preciso definir criterios en esta línea. El número de iteraciones obtenido en los diversos ejemplos que se presentan en la Tesis oscila entre 3 y 6, cifras que corresponden a situaciones de servicio y situaciones de rotura respectivamente.

Los diagramas momento-curvatura son un elemento básico del método, tal como se ha visto al principio de este apartado, si bien el método es independiente del tipo de diagrama elegido. En la Tesis los diagramas M-C se obtienen por puntos mediante un programa de ordenador habiéndose contrastado los mismos con resultados experimentales extraídos de la literatura. A estos diagramas se les ajusta unos diagramas trilineales que reflejan mejor el comportamiento en cualquier parte y son de una gran aproximación a los reales. Otra ventaja de los mismos es que permiten cuantificar los incrementos de curvatura de forma muy sencilla y sistemática.

Otro aspecto que debemos tratar es el volumen de información que se precisa y que en principio podría ser elevado. Para reducirlo se define cada diagrama M-C por seis valores que representan los momentos finales de cada fase del diagrama trilineal y la pendiente (rigidez) de cada fase. Por otro lado, cada elemento estructural se divide en tramos en los que la variación de las características del mismo es pequeña (normalmente en vigas son tres tramos y en pilares uno) y para cada uno de estos tramos se toma un diagrama momento-curvatura característico de las secciones del mismo.

De los distintos ejemplos que se presentan en la Tesis a continuación se muestra uno de ellos cuyo objeto es, fundamentalmente, el comparar los resultados que se obtienen por el método propuesto según un análisis por compatibilidad con los obtenidos por medios experimentales o bien por otros métodos numéricos.



$$\text{CUANTIA GEOMETRICA : } w_0 = \frac{A_s}{b \cdot d} = 1,68 \%$$

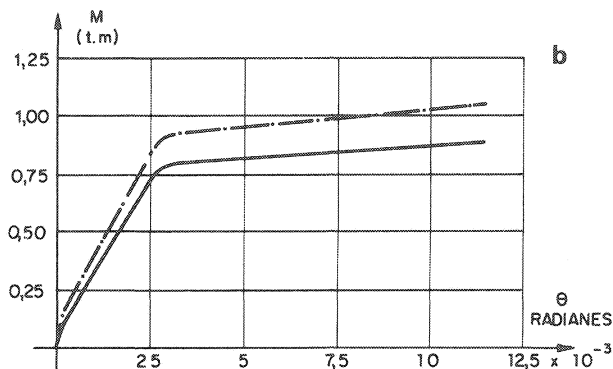


Fig. 4.a: Características geométricas de la viga.
b: Diagrama Momento-Rotación.

Como estructura común para los distintos métodos, vamos a emplear una viga continua de dos tramos solicitada por una carga concentrada en la mitad de uno de ellos. Esta fue la estructura base utilizada por S. TOLACCIA para la realización de diversos ensayos desarrollados en la Universidad de Lieja.

Como métodos numéricos de comparación hemos elegido:

- El método de análisis estudiado en el LABORATORIO NACIONAL DE ENGENHARIA CIVIL (L. N. E. C.) de Lisboa cuyos resultados presenta A. M. PEREIRA TEIXEIRA COELHO.
- El Método de las rotaciones impuestas propuesto por G. MACCHI para una carga puntual $F = 3,5$ toneladas.

La viga se puede considerar con características uniformes en toda ella y un diagrama momento-curvatura obtenido experimentalmente sobre una viga simplemente apoyada, con características de sección idénticas a las correspondientes de la viga hiperestática.

El parámetro que se hizo variar en estas vigas fue la cuantía de armadura, y para la comparación de resultados se toma la viga denominada 2B de la serie de ensayos citada, y las características geométricas están definidas en la figura 4.a; las características mecánicas de los materiales son: acero con escalón de cedencia a 2.600 kp/cm^2 y hormigón con resistencia en probeta cilíndrica a los 28 días de 255 kp/cm^2 .

En la figura 5 se presentan los resultados obtenidos según los métodos citados anteriormente, para distintos valores de la carga desde $F = 0$ hasta la carga de rotura $F = 4$ t.

Hemos de resaltar el elevado grado de precisión que, en este caso, tienen todos los métodos numéricos respecto a los resultados experimentales. Esta precisión se manifiesta tanto en la zona próxima a rotura como en zonas de servicio; así, los resultados obtenidos por el método propuesto, para la carga de rotura, difieren en menos de un 3 % de los resultados obtenidos experimentalmente.

Si bien estos resultados son parciales por cuanto son fruto de un ejemplo, no dejan por ello de apuntar hacia una problemática más general como es la elección del método de análisis no lineal. Para ello, aun admitiendo que se pueda conseguir una precisión análoga con los distintos métodos numéricos, habrá que barajar diversos factores que nos ayuden en la decisión. Entre estos podemos citar: campo de aplicación, generalidad de situaciones de la estructura, flexibilidad ante el método de cálculo, complejidad del mismo, optimización en el empleo de ordenador, etc.

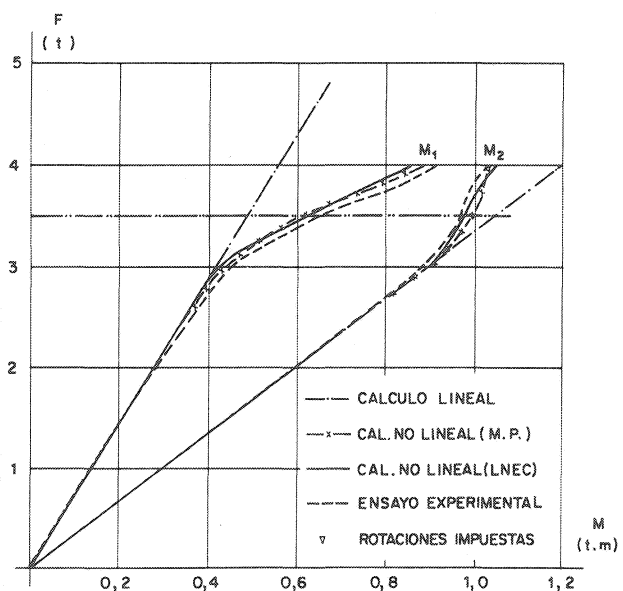


Fig. 5.—Diagrama F-M según los distintos métodos utilizados.

El análisis no lineal nos permite obtener una redistribución de esfuerzos con respecto a los definidos en un análisis lineal; ahora bien, en cuanto al grado de redistribución, no existe unanimidad entre los distintos autores para definir un parámetro que lo caracterice. Así podemos hablar de redistribución a nivel sección refiriéndonos a un porcentaje respecto al valor inicial de los esfuerzos. En este ejemplo, para las secciones del apoyo intermedio (B) y en la sección de aplicación de la carga son:

SECCION	Mom. Inicial	Mom. Sol.	Redistribuc. % M. ini.
B	0,564	0,92	63,12
C	1,218	1,04	14,61

También se puede hablar de redistribución a nivel de elemento estructural, relacionando esfuerzos en distintas secciones del mismo. Así, si llamamos δ a la relación entre momentos flectores en las secciones C y B, el valor del mismo es:

$$\delta_1 = \frac{M_c}{M_B} = \frac{1,218}{0,564} = 2,16$$

$$\delta_2 = \frac{M_c}{M_B} = \frac{1,04}{0,92} = 1,13$$

de estos resultados se deduce que la solución está próxima a la redistribución perfecta ($\delta = 1$).

Por último, también se puede hablar de redistribución global de la estructura, si bien esto es más de forma cualitativa que cuantitativa, por lo que no incidiremos en ello. Por otro lado, al hablar de redistribución debemos referirnos al mismo tiempo a ductilidad de las secciones que van a permitir desarrollar esa redistribución. La ductilidad la podemos cuantificar a través del coeficiente de ductilidad, tomando como tal la relación entre curvatura última y la curvatura de plastificación del material a nivel sección.

Conclusiones y perspectivas

El método general de análisis no lineal de estructuras lineales en primer orden, tal y como se ha visto, resulta aplicable a cualquier material en el que se pueda definir como dato de partida sus características tenso-deformacionales de forma unívoca a nivel sección y para cualquier acción (cargas, deformaciones, movimientos).

El método tiene la ventaja de permitir la superposición de problemas lineales que conducen al final, al cumplimiento conjunto de todas las condiciones (equilibrio, compatibilidad, material) lo que caracteriza el método como un "método exacto". Por otro lado y, puesto que en todo momento se pivotea sobre las características reales del material (diagrama real M-C), el ámbito de aplicación es general, es decir, sirve tanto para analizar situaciones de servicio, como próximas a rotura.

Las dos etapas del proceso implican un cálculo lineal de estructuras, el cual puede hacerse manualmente o por medio de ordenador, potenciándose en este caso el estudio de estructuras de elevado grado de hiperestaticidad. Por otro lado, en la resolución de dichos problemas lineales puede emplearse cualquiera de los métodos de cálculo lineal existentes, si bien resulta aconsejable utilizar aquéllos que obtengan una sistematización en el tratamiento de los cálculos.

En resumen, el método propuesto tiene una gran versatilidad, tanto respecto a la forma de resolución (manual o con ordenador), como frente al método de resolución.

Las perspectivas que se abren en este método son amplias, algunas ya confirmadas en trabajos realizados posteriormente y se centran fundamentalmente en el **comportamiento**. De ellas podemos citar la adaptabilidad del método al: análisis no lineal de estructuras de hormigón bajo cualquier tipo de deformación impuesta u otras acciones, o bien combinación de ambas; análisis de estructuras considerando las no linealidades física (material) y geométrica (segundo orden); y el estudio de la seguridad de estructuras, teniendo en cuenta la no linealidad del material.

En la línea del dimensionamiento el método se podría emplear de distintas formas, que van desde la realización de estudios paramétricos —que permiten dar unos criterios para el proyecto— hasta el dimensionamiento óptimo utilizando el método como análisis de un predimensionado previo.