Barekeng Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan | Desember 2015 | Volume 9 Nomor 2 | Hal. 85 – 88

KARAKTERISTIK RUANG HAUSDORFF KOMPAK

M. Tomasoa[1], H. Batkunde[2], M. W. Talakua[3], L. J. Sinay[4]

[1, 2, 3, 4] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia
e-mail: [1]alentomasoa@yahoo.co.id, [2]hbatkunde@gmail.com, [3]ocat_08@yahoo.com,
[4]lj.sinay@staff.unpatti.ac.id

Abstrak

Misal $(H.\tau)$ adalah suatu ruang topologi, H disebut ruang Hausdorff jika untuk setiap $x, y \in H$ dimana $x \neq y$ terdapat dua himpunan buka $U, V \in \tau$ dan $U \cap V = \emptyset$ sedemikian sehingga $x \in U$ dan $y \in V$. Selanjutnya dengan memanfaatkan sifat kekompakan dalam suatu ruang topologi maka akan ditinjau karakteristik suatu ruang Hausdorff yang dilengkapi oleh sifat kekompakan ini. Lebih lanjut, suatu ruang Hausdorff yang dilengkapi dengan sifat kompak disebut ruang Hausdorff kompak.

Kata Kunci: Kekompakan, ruang Hausdorff, ruang topologi.

THE CHARACTERISTICS OF COMPACT HAUSDORFF SPACE

Abstract

Let $(H.\tau)$ is a topology space, H is said to be a Hausdorff space if for every $x, y \in H$ where $x \neq y,$ there are two open sets $U, V \in \tau$ and $U \cap V = \emptyset$ such as $x \in U$ and $y \in V$. Moreover by using a compactness property in a topology space, then we will observe some characteristics of a Hausdorff Space which equipped with this compactness. Furthermore, a Hausdorff Space which equipped by this compactness property is said to be a compact Hausdorff space.

Keywords: Compactness, Hausdorff space, topology space.

1. Pendahuluan

Topologi digunakan dalam cabang matematika dan keluarga himpunan untuk menjelaskan tentang himpunan-himpunan buka. Beberapa sifat dari ruang topologi X bergantung pada himpunan-himpunan buka dalam ruang topologi tersebut. Suatu topologi pada himpunan X adalah suatu koleksi τ yang memuat himpunan-himpunan bagian dari X yang memenuhi sifat-sifat berikut:

i. $\emptyset$ dan X termasuk dalam τ;
ii. Gabungan tak hingga dari himpunan elemen-elemen dalam τ adalah elemen τ;
iii. Irisan berhingga dari himpunan elemen dalam τ adalah elemen τ.

Dalam konsep topologi juga dikenal istilah *cover* (liput). Diberikan B adalah suatu himpunan. Suatu koleksi $\mathcal{A}$ disebut *cover* dari B jika B termuat dalam gabungan semua himpunan dari $\mathcal{A}$. *Subcover* dari $\mathcal{A}$ untuk B adalah subkoleksi dari $\mathcal{A}$ yang juga merupakan *cover* dari B.

Ruang Topologi X disebut ruang Hausdorff atau ruang topologi terpisah jika pasangan titik yang berbeda a dan b di X masing-masing termasuk ke dalam himpunan-himpunan buka yang saling lepas. Lebih lanjut, dalam ruang topologi juga dikenal sifat kekompakan. Sifat kekompakan dipakai untuk melihat sifat-sifat dari himpunan yang mirip dengan sifat keterterbatasan, di sisi lain dipakai sifat kekompakan karena sifat keterbatasan adalah konsep yang agak sulit ditinjau di dalam ruang topologi.

Suatu ruang Hausdorff yang dilengkapi dengan sifat kekompakan dikenal dengan ruang Hausdorff kompak. Lebih lanjut, dalam penelitian ini akan dibahas karakteristik Ruang Hausdorff secara umum. Lebih khususnya akan dibahas suatu ruang Hausdorff yang kompak.

2. Hasil dan Pembahasan

Ruang Hausdorff adalah ruang dimana setiap dua buah elemen yang berbeda dapat dipisahkan oleh dua buah persekitaran yang saling lepas [1]. Berikut adalah definisi formal dari ruang Hausdorff.

Definisi 1. [2] Misal (X,τ) adalah suatu ruang topologi. X disebut Ruang Hausdorff jika untuk setiap pasangan $x_1, x_2 \in X$, dimana $x_1 \neq x_2$, terdapat himpunan buka U_1 dan U_2 sedemikian hingga $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ dan $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Contoh 1. Diberikan ruang topologi (X,τ), dengan $X = \{a,b,c,d\}$ dan $\tau = 2^X$.

Perhatikan bahwa ruang topologi X adalah ruang Hausdorff.

Ambil sebarang $x_1, x_2 \in X$ dan $x_1 \neq x_2$

Ada $U_1 = \{x_1\}$, $U_2 = \{x_2\} \subset X$ sedemikian hingga $x_1 \in \{x_1\} = U_1, x_2 \in \{x_2\} = U_2$ dan $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Sehingga berdasarkan Definisi 1 maka X adalah ruang Hausdorff.

Contoh 2. Diberikan ruang topologi (M,τ), dengan $M = \{a,b,c,d\}$ dan $\tau = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c,d\}, M\}$, maka M bukan ruang Hausdorff.

Definisi 2. [2] Sebuah ruang X dikatakan ruang kompak jika dan hanya jika setiap *cover* buka dari X mempunyai sebuah sub*cover* hingga.

Contoh 3. Diberikan suatu ruang topologi $Y = \{1,2,3,4\}$ dengan topologi $\tau = 2^Y$ dan $X \subset Y$ dimana $X = \{1,2,4\}$. Misalkan terdapat suatu koleksi $\mathcal{C} = \big\{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\big\}$. Berdasarkan definisi himpunan buka di atas maka dapat dikatakan koleksi $\mathcal{C}$ adalah koleksi himpunan buka.

Misalkan $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ maka $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 = \{1,2,3,4\}$. Karena $X = \{1,2,4\} \subset \bigcup_{n=1}^{4} C_n = \{1,2,3,4\}$ maka dapat dikatakan bahwa X termuat dalam gabungan dari himpunan-himpunan dalam koleksi $\mathcal{C}$. Sehingga $\mathcal{C}$ adalah *cover* buka dari X.

Misalkan $\mathcal{C}_* = \{C_2, C_3\}$ merupakan subkoleksi dari $\mathcal{C}$. Karena X termuat dalam $C_2 \cup C_3 = \{1,2,3,4\}$ maka $\mathcal{C}_*$ merupakan *cover* dari X.Sehingga subkoleksi $\mathcal{C}_*$ adalah sub*cover* hingga dari $\mathcal{C}$.

Teorema 1. [2] Setiap himpunan tutup K dalam ruang kompak X adalah kompak.

Teorema 2. Jika K adalah suatu himpunan kompak dalam ruang Hausdorff X dan p adalah sebuah titik di $X - K$, maka ada himpunan-himpunan buka U dan V yang saling lepas dari X sedemikian hingga $K \subset U$ dan $p \in V$.

Bukti. Diketahui X adalah ruang Hausdorff. Ambil sebarang $K \subset X$, dimana K himpunan kompak. Misal $p \in X - K$. Untuk sebarang $a \in K$, karena X ruang Hausdorff maka ada himpunan-himpunan buka U_a dan V_a dari X sedemikian hingga $a \in U_a$ dan $p \in V_a$.

Misal $\mathcal{F} = \{U_a | a \in K\}$ dengan U_a himpunan buka dari X, maka $\mathcal{F}$ adalah *cover* dari K.

Perhatikan bahwa K kompak, maka $\mathcal{F}$ memiliki sebuah *subcover* hingga dari K, yaitu ada berhingga titik $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dari K sedemikian hingga K termuat dalam U, yaitu $K \subset U = U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_n}$, sehingga U himpunan buka. Di lain pihak, misalkan $V = V_{n_1} \cap \cdots \cap V_{n_n}$.

Karena p termuat dalam $V_{n_1}, \cdots, V_{n_n}$ maka $V_{n_1}, \cdots, V_{n_n}$ buka. Sehingga V juga buka. Diperoleh U dan V adalah himpunan-himpunan buka di X, sedemikian hingga $K \subset U,\ p \in V$, dan $U \cap V = \emptyset$. ■

Akibat 3. [3] Setiap himpunan kompak Kdalam suatu ruang Hausdorff X adalah tutup.

Pada Teorema 2 telah dibahas sifat suatu himpunan kompak pada suatu ruang Hausdorff. Sifat ini penting untuk menunjukkan bahwa ruang Hausdorff adalah ruang normal.

Definisi 3. [3] Ruang topologi X dikatakan ruang normal jika untuk setiap himpunan tutup $A, B \subset X$ yang saling lepas terdapat himpunan-himpunan buka U dan V sedemikian hingga $A \subset U, B \subset V$ dan $U \cap V = \emptyset$.

Contoh 4. Diberikan $X = \{a, b, c\}$ dengan topologi $\tau = \big\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$. Himpunan-himpunan tutup dari X adalah $X, \emptyset, \{b, c\}, \{a, c\}, X$ ruang normal.

Karakteristik Ruang Hausdorff Kompak

Ruang Hausdorff yang dilengkapi sifat kekompakan dinamakan ruang Hausdorff kompak. Diberikan X suatu ruang topologi. X dikatakan ruang Hausdorff kompak jika X merupakan ruang Hausdorff dan setiap *cover* buka dari X memiliki suatu sub*cover* hingga.

Contoh 5. Diberikan suatu himpunan $A = [0,5]$. Karena $A \subset \mathbb{R}$, dimana $\mathbb{R}$ adalah ruang Hausdorff maka A juga merupakan ruang Hausdorff.

Berdasarkan Teorema 1 dan Akibat 3 maka diperoleh akibat di bawah ini

Akibat 4. Diberikan X ruang Hausdorff kompak. Suatu subhimpunan K dari X dikatakan kompak jika dan hanya jika K tutup.

Bukti. Diketahui X adalah ruang Hausdorff kompak, $K \subset X$. Akan ditunjukkan bahwa K kompak jika dan hanya jika K tutup.

Misalkan K kompak. Akan dibuktikan bahwa K tutup. Karena $K \subset X$ dan X ruang Hausdorff kompak, maka berdasarkan Akibat 1 terbukti bahwa K tutup. Misalkan K tutup akan dibuktikan bahwa K kompak. Karena X ruang Hausdorff kompak maka X juga merupakan ruang kompak. Jadi, berdasarkan Teorema 1 maka dapat dkatakan bahwa K kompak. ∎

Ciri khas dari ruang Hausdorff kompak termuat dalam Akibat 4. Jika X adalah ruang Hausdorff, setiap subhimpunan K yang kompak pasti tutup, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Jika X adalah ruang kompak, setiap subhimpunan K yang tutup pasti kompak tetapi tidak berlaku sebaliknya. Tetapi jika X ruang Hausdorff kompak, berlaku setiap subhimpunan K yang kompak pasti tutup dan yang tutup pasti kompak.

Berdasarkan Teorema 2 dan Definisi 3, maka hubungan antara ruang hausdorff, sifat kekompakan dan ruang normal dapat disajikan dalam Teorema berikut.

Teorema 5. Setiap ruang Hausdorff kompak adalah normal.

Bukti. Misal X adalah ruang Hausdorff kompak. Akan ditunjukkan bahwa X normal.

Ambil sebarang $A, B \subset X$, dimana A, B tutup dan $A \cap B = \emptyset$. Karena X kompak maka berdasarkan Teorema 1, A dan B juga kompak. Selanjutnya berdasarkan Teorema 2, untuk setiap $b \in B$ terdapat dua himpunan buka yang saling lepas U_b dan V_b dari X sedemikian hingga $A \subset U_b$ dan $b \subset V_b$.

Misalkan $\mathcal{F} = \{V_b | b \in B\}$ adalah koleksi dari himpunan-himpunan buka di X. Karena $b \in B, b \in V_b$ maka $B \subseteq V_b$ sehingga $\mathcal{F}$ cover dari B. Karena B kompak maka $\mathcal{F}$ mempunyai sebuah sub*cover* hingga dari B. Dengan kata lain, ada $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ sedemikian hingga B termuat di dalam V dimana $V = V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_n}$. Karena V_b buka maka gabungan dari V_b juga buka sehingga V buka. Di lain pihak, misalkan $U = U_{b_1} \cap ... \cap U_{b_n}$. Karena U_b buka maka irisan dari U_b juga buka sehingga U buka. Karena U, V buka maka berdasarkan definisi ruang normal:

Untuk setiap himpunan tutup $A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$, terdapat U, V buka di X sedemikian hingga $A \subset U, B \subset V$ dan $U \cap V = \emptyset$.

Dengan demikian, X adalah normal. ■

3. Kesimpulan

Dalam ruang Hausdorff kompak,jika suatu himpunan kompak maka himpuanan tersebut juga tutup dan sebaliknya. Lebih lanjut, Setiap ruang **Hausdorff** kompak adalah normal, artinya, untuk setiap himpunan-himpunan tutup dalam ruang Hausdorff kompak masing-masing memiliki himpunan buka yang saling lepas.

Daftar Pustaka

[1] H. M. Bouselina, "On Collectionwise Hausdorff Bitopological Spaces," *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, pp. 137-145, 2012.

[2] J. R. Munkres, Topology, Edisi ke-2, Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

[3] S. Lipschutz, Theory and Problems of General Topology, New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.

[4] R. G. Bartle, Introduction to Real Analysis, Edisi ke-3, New York: John Wiley & Sons Inc., 2000.

[5] R. F. Dickman dan J. R. Porter, "θ-Closed Subsets of Hausdorff Spaces," *Pacific Journal of Mathematics*, pp. 407-416, 1975.

[6] S. T. Hu, Element of General Topology, San Fransisco: Holden-Day, 1964.