View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by OJS UNPATTI Publication Center (Universitas Pattimura)

Jurnal Barekeng
Vol. 7 No. 1 Hal. 29 – 30 (2013)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan
© Jurusan Matematika FMIPA Unpatti 2013

KOMUTATOR DAN IDENTITAS KOMUTATOR

Commutator and Commutator Identity

ABDUL HALIM MAHMUD[1], **ELVINUS RICHARD PERSULESSY**[2], **HENRY W. M. PATTY**[3]
[1]*Pegawai BPS Kabupaten Buru Provinsi Maluku*
Jl. Sultan Babullah No. 1, Namlea – Kabupaten Buru, Maluku
[2,3]*Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Maluku
e-mail: richardelvinus@yahoo.com, henry_4t00@yahoo.com

ABSTRAK

Senter $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{R})$ adalah himpunan semua elemen yang komutatif dengan setiap elemen dalam ring $\boldsymbol{R}$. Elemen-elemen yang saling komutatif dengan karakteristik tertentu membentuk struktur komutator. Lebih lanjut komutator merupakan dasar bagi terbentuknya identitas-identitas komutator.

Kata kunci : *Identitas komutator, komutator, ring.*

PENDAHULUAN

Himpunan $R \neq \emptyset$ merupakan ring jika terhadap operasi penjumlahan, R grup abelian, terhadap operasi pergandaan R tertutup dan asosiatif, serta memenuhi distributif kiri dan kanan. Selanjutnya elemen di R yang komutatif dengan setiap elemen di R jika dikumpulkan akan membentuk senter untuk ring R yang dinotasikan dengan $Z(R)$.

Dibutuhkan sebarang dua elemen yang komutatif di R untuk membentuk sifat komutatif. Artinya dua elemen ini mempunyai kemampuan yang sama untuk bertukar posisi satu dengan yang lain. Selanjutnya elemen-elemen ini dengan karakteristik tertentu yaitu selisih dari perkalian sebarang dua elemen yang saling komutatif membentuk struktur baru yang dinamakan komutator.

Struktur komutator merupakan landasan teori bagi terbentuknya identitas-identitas komutator. Hal-hal tersebut yang melatarbelakangi penelitian ini.

TINJAUAN PUSTAKA

Istilah ring pertama kali diperkenalkan oleh David Hilbert (1862-1943), tetapi sebatas pendekatan definisi yang masih abstrak. Himpunan R dikatakan ring jika terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan yang didefinisikan padanya, R memenuhi sifat-sifat yaitu terhadap operasi penjumlahan, R adalah grup abelian, terhadap operasi pergandaan R memenuhi sifat tertutup dan asosiatif serta terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan R memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan. (Fraleigh, 2000)

Diberikan R ring dengan senter $Z(R)$ dan $x, y \in R$. Komutator (*commutator*) $xy - yx$ dinotasikan dengan $[x, y]$. (Thaheem, 2005). Pada identitas komutator berlaku sifat-sifat penjumlahan (Atteya, 2010).

Definisi 1 (Ring)
Himpunan $R \neq \emptyset$ dengan dua operasi biner, penjumlahan "+" dan pergandaan "**.**" disebut mempunyai struktur suatu ring, selanjutnya R disebut Ring (Gelanggang) jika memenuhi aksioma-aksioma:

I. Terhadap penjumlahan $\langle R, + \rangle$ merupaka grup abelian, yaitu
   1. Tertutup
      $(\forall\, a, b \in R)\ (\exists!\, c \in R\ )\ a + b = c$
   2. Asosiatif
      $(\forall\, a, b, c \in R)\ (a + b) + c = a + (b + c)$
   3. Ada elemen netral
      $(\exists\, e \in R\ )(\forall\, a \in R)\ e + a = a + e$
   4. Setiap elemen R mempunyai invers
      $(\forall\, a \in R)(\exists - a \in R)\ a + (-a) = (-a) + a = 0$
   5. Komutatif
      $(\forall\ a, b \in R)\ a + b = b + a$

II. Terhadap pergandaan $\langle R, \cdot \rangle$ memenuhi sifat
   6. Tertutup
      $(\forall\, a, b \in R)\ (\exists!\, c \in R\ )\ a \cdot b = c$

7. Asosiatif
   $(\forall\ a,b,c \in R)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

III. Distributif

8. Distributif kiri
   $(\forall\ a,b,c \in R)\ a \cdot (b + c) = \ a \cdot b + a \cdot c$
9. Distributif kanan,
   $(\forall\ a,b,c \in R)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Definisi 2 (Senter Dari Ring)
Jika R ring, senter dari R adalah $Z(R)$, didefinisikan oleh

$$Z(R) = \{z \in R | zx = xz, \forall\ x \in R\}$$

Definisi 3 (Ring Komutatif)
Suatu ring R dikatakan ring yang komutatif jika R memenuhi sifat komutatif terhadap operasi " $\cdot$ ", yaitu

$$(\forall\ a,b \in R)\ a \cdot b = b.a$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini disajikan definisi komutator dan identitas komutator disertai teorema pendukungnya.

Komutator

Definisi 4
Diberikan R ring dengan senter $Z(R)$ dan $x,y\ \in R$. Komutator (*commutator*) $xy - yx$ dinotasikan dengan $[x,y]$. Atau dengan simbol logika dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$(\forall\ x,y \in R)\ [x,y] = xy - yx$$

Dalam penelitian ini komutator $xy - yx$ ditulis $xy - yx$.

Identitas Komutator
Teorema 1
Jika R ring dengan pusat $Z(R)$, maka $(\ \forall\ a,b,x,y, \in R)$ berlaku identitas-identitas komutator (*commutator identities*) berikut ini :

(i) $[a,xy] = x[a,y] + [a,x]y$
(ii) $[ax,y] = a[x,y] + [a,y]x$
(iii) $[ax + xb\ ,x] = [ax,x] + [xb,x]$

Bukti
(i) Akan ditunjukkan $[a,xy] = x[a,y] + [a,x]y$

$$\begin{aligned}[a,xy] &= axy - xya \\ &= (xay - xay) + axy - xya \\ &= (xay - xya) + (axy - xay) \\ &= x(ay - ya) + (ax - xa)y \\ &= x[a,y] + [a,x]y\end{aligned}$$

(ii) Akan ditunjukkan $[ax,y] = a[x,y] + [a,y]x$

$$\begin{aligned}[ax,y] &= axy - yax \\ &= axy + (-ayx + ayx) - yax \\ &= (axy - ayx) + (ayx - yax) \\ &= a(xy - yx) + (ay - ya)x \\ &= a[x,y] + [a,y]x = 0\end{aligned}$$

(iii) Akan ditunjukkan $[ax + xb\ ,x] = [ax,x] + [xb,x]$

$$\begin{aligned}[ax + xb\ ,x] &= (ax + xb)\ x - x(ax + xb) \\ &= (axx + xbx) - (xax + xxb) \\ &= axx + xbx - xax - xxb \\ &= (axx - xax) + (xbx - xxb) \\ &= [ax,x] + [xb,x]\ \blacksquare\end{aligned}$$

Bentuk (i) dan (ii) pada Teorema 1 disebut identitas komutator dasar (*basic commutator identities*). Sedangkan (iii) merupakan identitas komutator yang ditambahkan untuk mendukung pembahasan.

KESIMPULAN

Dari pembahasan tersebut dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

Untuk membentuk sifat komutatif di R dibutuhkan dua elemen. Dua elemen dikatakan saling komutatif jika keduanya mempunyai kemampuan yang sama untuk bertukar posisi satu dengan yang lain. Selanjutnya selisih dari perkalian kedua elemen ini dapat membentuk struktur baru yang dinamakan komutator.

DAFTAR PUSTAKA

Atteya, M. J. 2010. On Generalized Derivations Of Semiprime Rings. *International Journal of Algebra*, **4**(12) : 591-598.

Fraleigh, J.B. 2000. *A First Course In Abstract Algebra.* Sixth Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Massachussets.

Thaheem, A.B. 2005. On Some Properties Of Derivation On Semiprime Rings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **29**(6) : 1143-1152.