Jurnal Barekeng
Vol. 6 No. 1 Hal. 23 – 30 (2012)

Barekeng
jurnal ilmu matematika dan terapan

APLIKASI PETRI NET PADA SISTEM PEMBAYARAN TAGIHAN LISTRIK PT. PLN (Persero) RAYON AMBON TIMUR

(*The Application of Petri Net in Electricity Bill Payment System of PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur*)

FREYA N. WATTIMENA[1], THOMAS PENTURY[2], YOPI A. LESNUSSA[3]
[1,2,3] *Staf Jurusan Matematika FMIPA UNPATTI*
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon
e-mail: ya.lesnussa@staff.unpatti.ac.id

ABSTRACT

Petri Net is a model of Mathematics used in the system event discrit to illustrate certain event. One application of Petri Nets is to sketch the entrance occurs in a place like the public service system. This reserce will simply describe the use of Petri Net to sketch the entrance occurs in electricity bill payment system of PT.PLN (Persero) Rayon Ambon Timur by the number of place is 7 and the transition is 8, and to determine the matrix representation and the *coverability tree* of the model.

Keywords: *Eigenvalues, Equilibrium point, Jacobian-matrix, Rabies, SIR-models.*

PENDAHULUAN

Adanya keterbatasan sumber daya dalam suatu sistem ekonomi dan dunia usaha (bisnis) menyebabkan orang-orang, barang-barang maupun komponen-komponen harus menunggu untuk mendapatkan jasa pelayanan. Dalam kasus tersebut barisan tunggu yang terjadi sering disebut dengan antrian *(queues)*.

Antrian terjadi bilamana banyaknya pelanggan yang akan dilayani melebihi kapasitas layanan yang tersedia. Sistem tersebut seringkali dan hampir terlihat setiap hari, seperti antrian kendaraan mobil-mobil yang memasuki tempat usaha pencucian mobil, antrian para nasabah di bank untuk mendapatkan pelayanan dari para teller, antrian para pelanggan di suatu swalayan untuk melakukan pembayaran di kasir.

Penulis mengambil salah satu contoh sistem antrian yaitu sistem antrian pada loket pembayaran tagihan listrik. Diketahui bahwa listrik merupakan salah satu kebutuhan pokok masyarakat untuk mempermudah dalam menjalani kegiatan sehari-hari mulai dari instansi yang paling kecil yaitu rumah tangga sampai yang paling besar meliputi industri-industri terbesar sekalipun.

PT. PLN (Persero) adalah perusahaan penyedia jasa listrik yang berusaha melayani konsumen dengan sebaik-baiknya. Untuk itu masyarakat sebagai konsumen diharuskan membayar tagihan listrik setiap bulannya. Proses pembayaran tagihan listrik ini dapat dilakukan di kantor-kantor PLN terdekat atau koperasi-koperasi yang telah ditunjuk, atau bisa dilakukan di bank-bank yang telah menjamin kerjasama dengan PT. PLN bahkan sekarang pelanggan dapat melakukan pembayaran melalui ATM (Anjungan Tunai Mandiri).

Sistem pembayaran tagihan listrik pada kantor-kantor PLN tersebut mempunyai tahapan-tahapan yang dimulai dari input sampai dengan output. Sehingga penulis ingin mengubah sistem tersebut ke dalam model matematika dengan menggunakan Petri Net dan mengamati prosesnya pada PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur.

TINJAUAN PUSTAKA

Petri Net pertama kali dikembangkan oleh Carl Adam Petri pada tahun 1962. Ia adalah seorang matematikawan asal Jerman. Pada awal 1960-an ia mendefinisikan tujuan umum model matematika untuk menggambarkan hubungan antara kondisi dan peristiwa (*R.David & H.Alla*,1965).

Petri Net merupakan suatu alat bantu untuk mempelajari sistem. Dengan menggunakan teori Petri Net maka suatu sistem dapat dimodelkan menjadi suatu Jaringan Petri, yang merupakan representasi matematika dari sistem tersebut. Dengan melakukan analisis dari Jaringan Petri tersebut diharapkan dapat diperoleh

informasi penting tentang struktur dan perilaku yang dinamis dari sistem yang dimodelkan dan mengusulkan peningkatan-peningkatan serta perubahan-perubahan yang diperlukan. Jadi perkembangan dari teori Jaringan Petri didasarkan pada pemakaian Jaringan Petri dalam memodelkan dan merancang sistem (*J.L.Peterson*,1981).

Petri Net merupakan salah satu alat untuk memodelkan *system event discrete*. *System event discrete* adalah sistem dimana ruang keadaan dari sistem tersebut diuraikan oleh himpunan diskrit {0,1,2,…} dan transisi keadaan hanya diamati pada titik diskrit dalam waktu. Jadi, berubahnya keadaan pada *system event discrete* diakibatkan oleh terjadinya *event* (*Cassandras, 1993*).

Petri Net merupakan *direct bipartite graph* (graph berarah) yang memiliki 2 *node* yang dinamakan sebagai *Place* dan *Transisi*. *Arc* dilambangkan dengan anak panah (*arrow*), *Place* dilambangkan sebagai lingkaran (*circles*) dan *Transisi* dilambangkan sebagai persegi panjang (*bars*). *Arc* secara tidak langsung menghubungkan *place* dengan *place* atau transisi dengan transisi, tetapi menghubungkan *place* dengan transisi atau transisi dengan *place*. Tiap *place* dapat berisi satu atau beberapa *token* yang dilambangkan dengan bulatan kecil (*dots*) yang merupakan material atau bahan yang ditrasfer dalam satu sistem Petri Net.

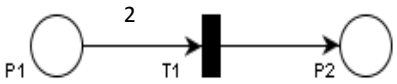
Definisi 1
Petri Net terdiri dari 4-*tuple (P, T, A, w)* dengan (*Cassandras, 1993*) :

- P : himpunan berhingga *Place*, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$
- T : himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$
- A : himpunan *arc*, $A \subseteq (\mathrm{P}x\mathrm{T}) \cup (Tx\mathrm{P})$
- w : fungsi bobot , $w : A \rightarrow \{1,2,3, \dots\}$

Dalam membahas representasi Petri Net secara grafik akan digunakan notasi $I(t_j)$ dan $O(t_j)$ yang masing-masing menyatakan himpunan *place* input dan *place* output ke transisi t_j. Secara matematis definisi tersebut dapat ditulis menjadi persamaan berikut (*Cassandras, 1993).*

$$I(t_j) = \{p_i : (p_i, t_j) \in A\}$$
$$O(t_j) = \{p_i : (t_j, p_i) \in A\}$$

Contoh 1:



Gambar 1. Petri Net Sederhana

Perhatikan gambar 1, terdapat dua *place* pada Petri Net tersebut yaitu p_1 dan p_2 ditulis $P = \{p_1, p_2\}$. Untuk menyatakan bahwa terdapat sebuah transisi yaitu t_1 maka ditulis $T = \{t_1\}$. *Arc* dinyatakan dengan pasangan berurutan, elemen pertama menyatakan asal dan elemen kedua menyatakan tujuan misalnya *arc* dari *place* $p_1$ke transisi t_1 ditulis (p_1, t_1) dan (t_1, p_2)menyatakan *arc* dari transisi t_1 ke *place* p_2 yang secara lengkap ditulis $A = \{(p_1, t_1), (t_1, p_2)\}$. Bobot *arc* dari *place* $p_1$ke transisi t_1 adalah 2 yang digambarkan dengan dua buah *arc* sehingga dapat ditulis $w(p_1, t_1) = 2$ dan bobot dari transisi t_1 ke *place* p_2 adalah 1 yaitu $w(t_1, p_2) = 1$, pada contoh ini $I(t_1) = \{p_1\}$ dan $O(t_1) = \{p_2\}$.

Perlu membedakan antara Petri Net yang *pure* dan *impure*. Petri Net disebut *pure* jika tidak ada *place* yang menjadi *input* dan *output* untuk suatu transisi. Jika terdapat *place* yang dapat menjadi input sekaligus output untuk transisi tertentu maka Petri Net dikatakan *impure*, yang secara formal ditulis

$$p_i \in P, t_j \in T \ni \{(p_i, t_j), (t_j, p_i)\} \subseteq A$$

Jelas bahwa Petri Net pada Gambar 1 adalah *pure* karena tidak ada *place* yang menjadi input sekaligus output untuk suatu transisi (*Cassandras*, 1933).

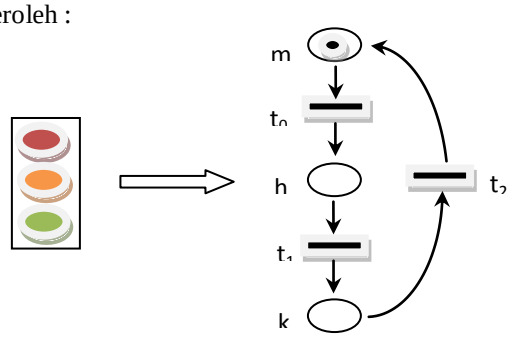
Transisi pada Petri Net menyatakan *event* pada *system event discrete* dan *place* merepresentasikan kondisi agar *event* dapat terjadi. Diperlukan mekanisme untuk mengindikasi apakah kondisi telah terpenuhi. *Token* adalah sesuatu yang diletakan di *place* yang menyatakan terpenuhi tidaknya suatu kondisi. Secara grafik *token* digambarkan dengan *dot* dan diletakan di dalam *place*.

Definisi 2.2.
Penanda (*marking*) *m* pada Petri Net adalah fungsi
m: $P \rightarrow \{0,1,2, \dots\}$ (*Cassandras*, 1993).

Penanda dinyatakan dengan vektor yang berisi bilangan bulat tak negatif yang menyatakan jumlah token yaitu $m = [m(p_1), m(p_2), \dots, m(p_n)]^T$. Jumlah elemen *m* sama dengan banyaknya *place* p_i, $m(p_i) \in \{0,1,2, \dots\}$.

Definisi 2.3
Petri Net bertanda (*marked*) terdiri dari 5-*tuple* (P,T,A,w,m_0) dimana (P,T,A,w) adalah Petri Net dan m_0 adalah penanda awal (*Cassandras*,1993).

Contoh 2:
Lampu lalu lintas pada jalan raya yang dibuat dalam model Petri Net. Lampu berwarna Merah (m), Kuning (k), Hijau (h). Jika diubah dalam bentuk Petri Net maka diperoleh :

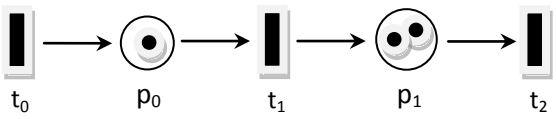


Gambar 2. Petri Net bertanda (*marked*)

Transisi Sumber dan Transisi Akhir

Suatu transisi *T* tanpa *input place* dinamakan transisi sumber (*source transition*). Suatu transisi *T* tanpa *output* dinamakan dengan transisi akhir (*sink transition*). Suatu transisi dapat di*fire* (diselesaikan prosesnya) jika sistem Petri Net mulai dijalankan. Jika suatu transisi di*fire* maka ada sejumlah *token* yang dipindahkan dari *input place*

sesuai dengan aturan dari Petri Net sendiri, tapi tidak ada *token* yang diproduksi pada *output*. Jika suatu transisi di*fire*, ada sejumlah *token* yang berpindah ke suatu *place* dan jika tidak ada token yang berpindah dari suatu place maka transisi tersebut disebut *source* (sumber).



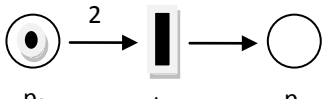
Gambar 3. Transisi sumber (t_0), transisi akhir (t_2), dan $m_0 = [1 \quad 2]$

Transisi *Enable*

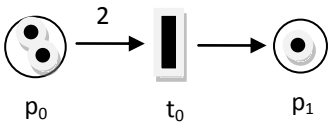
Jika semua keadaan yang diperlukan sudah terpenuhi maka transisi dapat terjadi. Dalam hal ini keadaan merupakan *place input* dari transisi. Bobot *arc* dari *place input* ke transisi menunjukan *token* minimum di *place* agar transisi *enable*. Jika semua *place input* mempunyai *token* lebih dari atau sama dengan jumlah *token* minimum yang dibutuhkan maka transisi *enable*.

Definisi 2.4.

Transisi $t_j \in T$ pada Petri Net bertanda *enable* jika, $m(p_i) \geq w(p_i, t_j), \ \forall p_i \in I(t_j)$. (*Cassandras*,1993).



Gambar 4(a). Transisi tidak *enable*



Gambar 4(b). Transisi yang *enable*

Gambar 4(a). merupakan contoh transisi yang tak *enable*. Jelas bahwa $I(t_0) = \{p_0\}$. $m(p_o) = 1$ dan $w(p_0, t_0) = 2$. Transisi t_0 tidak *enable* karena $1 = m(p_0) < w(p_0, t_0) = 2$. Transisi t_0 *enable* jika jumlah *token* pada *place* p_0 lebih dari atau sama dengan 2. Pada Gambar 4(b) terlihat bahwa $m(p_0) = 2$ sehingga transisi t_0 pada Petri Net tersebut *enable*. Maka dapat disimpulkan bahwa agar transisi t_j *enable* maka jumlah token pada *place* p_i paling sedikit sebesar bobot *arc* yang menghubungkan p_i ke t_j. Kenyataan ini sesuai dengan definisi transisi *enable* yang telah dituliskan sebelumnya.

Perlu diperhatikan bahwa jika tidak ada *arc* dari *place* p_i ke t_j maka $w(p_i, t_j) = 0$. Dan ingat jumlah *token* pada *place* merupakan bilangan bulat tak negatif yaitu $m(p_i) \geq 0$ sehingga berapapun nilai $m(p_i)$ pernyataan $m(p_i) \geq w(p_i, t_j)$ selalu benar.

Dinamika Petri Net.

Jika Petri Net digunakan untuk memodelkan sistem dinamik *event discrete*, seharusnya Petri Net dilengkapi dengan mekanisme yang mirip dengan transisi keadaan (*state transition)* pada automata. Mekanisme ini berupa menjalankan *token* melewati jaringan (*net*) ketika transisi menjadi *enable* dan proses ini mengubah keadaan Petri Net.

Hanya transisi *enable* yang dapat di*fire*. Transisi di*fire* saat *event* yang dinyatakan oleh transisi terjadi. Berikut ini adalah proses yang terjadi pada pem*fire*an transisi. Semua *token* di *place input* dikurangi atau diambil sebanyak bobot *arc* yang menghubungkannya. Berdasarkan Definisi 2.4 Jumlah *token* di *place input* setelah dikurangi adalah bilangan bulat tak negatif. *Token* di *place* ditambahkan sebanyak bobot *arc* yang menghubungkannya.

Representasi Petri Net dengan menggunakan matriks.

Pada bagian ini akan dikaji representasi Petri Net dalam notasi matriks. Hal ini bertujuan untuk memudahkan dalam implementasi, Petri Net dapat direpresentasikan dalam dua matriks yang disebut *backward incidence* dan *forward incidence.* Kedua matriks ini masing-masing berukuran *nxm* dengan *n* adalah jumlah *place* dan *m* adalah jumlah transisi. Elemen matriks ini adalah bilangan bulat tak negatif.

Elemen pada matriks *backward incidence* merupakan bobot *arc* yang menghubungkan *place* ke transisi sedangkan elemen pada matriks *forward incidence* merupakan bobot *arc* yang menghubungkan transisi ke *place*. Jika tidak ada *arc* yang menghubungkan *place* ke transisi maka *bobot arc* diisi nol.

Definisi 2.5

Matriks *backward dan forward incidence* yang mempresentasikan Petri Net adalah matriks berukuran *nxm* dengan elemen baris ke-*i*, kolom ke-*j* adalah

$$A_b(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} w(p_i, t_j), A_f(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} w(t_j, p_i).$$

Salah satu kegunaan matriks *backward incidence* adalah menentukan transisi yang *enable*. Jika (p_i) bukan merupakan *place input* dari transisi (t_j) yaitu $p_i \notin I(t_j)$ maka *bobot arc* dari *place* (p_i) ke transisi (t_j) adalah nol karena tidak ada *arc* yang menghubungkannya, ditulis $w(p_i, t_j) = 0$. Sehingga dapat ditulis dalam notasi vektor berikut.

$$m([p_1, \dots, p_n]^T) \geq w([p_1, \dots, p_n]^T, t_j)$$

$$= A_b(:, j)$$

$$= A_b e_j \qquad (i)$$

Dengan $A_b(:, j)$ menunjukan kolom ke-*j* dari matriks A_b dan e_j merupakan kolom ke-*j* matriks identitas berorder *m*. Dari persamaan (i) maka transisi yang *enable* dapat dilakukan dengan mencari kolom dari matriks *backward incidence* yang kurang dari atau sama dengan vektor keadaan, sehingga dapat ditulis secara ringkas menjadi

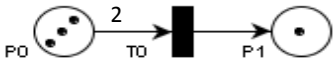
$$m \geq A_b e_j \qquad (i)$$

dan

$$m' = m + Au \qquad (ii)$$

Dengan **u** merupakan vektor kolom yang mempunyai elemen sebanyak *m* yaitu diperoleh dari kolom identitas.

Contoh 3:
Menentukan transisi yang *enable* setelah transisi t_1 di*fire* !!



Gambar 5. Sebelum transisi t_1 di*fire*

Penyelesaian :
Diketahui : i = 2 *place*, j = 1 transisi.

$$m_0 = [3 \quad 1]^T, \quad A_b = [2 \quad 0]^T, \quad A_f = [0 \quad 1]^T$$

$$A = A_f - A_b$$
$$= [0 \quad 1]^T - [2 \quad 0]^T$$
$$= [-2 \quad 1]^T$$

Dengan menggunakan persamaan *(iii)* diperoleh $m_1 = m_0 + Au$

$$m_1 = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Contoh 4 :
Terdapat 5 place dan 3 transisi pada Petri Net sehingga *n=5* dan *m=3*. Matriks *backward incidence* dan *forward incidence* masing-masing berukuran 5x3 sebagai berikut

$$A_b = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad A_f = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Keadaan awal Petri Net adalah $m_0 = [2 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$

Transisi t_1 *enable* karena $m_0 \geq A_b(:,1)$ sedangkan transisi t_2 dan t_3 tidak *enable* karena $m_0 \not\geq A_b(:,j)$ untuk *j*=2,3. Selanjutnya, dihitung matriks *incidence* yang dapat digunakan untuk menentukan keadaan berikutnya.

$$A = A_f - A_b$$
$$= \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&0&0\\-1&0&0\\1&-1&-1\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

Untuk menentukan keadaan berikutnya, gunakan persamaan (*iii*). Transisi yang di*fire* adalah t_1 karena transisi tersebut yang *enable*.

$$m_1 = m_0 + Au$$
$$= \begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1&0&0\\-1&0&0\\1&-1&-1\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $m_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$. Karena $m_1 \geq A_b(:,j), 1 \leq j \leq 3$, jadi yang *enable* adalah t_1, t_2, t_3.

Liveness* dan *Deadlocks

Jika membahas mengenai Petri Net pasti sering dijumpai istilah *deadlock* yang secara mudah berarti keadaan dimana tidak ada transisi yang *enable*. *Deadlock* dapat disebabkan persaingan memperoleh *resource.* Ketika semua pihak tidak memperoleh *resource* yang dibutuhkan maka terjadi *deadlock*. *Resource* dalam Petri net biasanya dinyatakan dengan *token* dan pihak yang bersaing memperoleh *token* adalah transisi. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa *deadlock* terjadi ketika transisi tertentu atau himpunan transisi pada Petri net tidak dapat di*fire.*

Transisi yang tidak berhubungan dengan *deadlock* disebut *live.* Perhatikan bahwa transisi yang *live* tidak harus *enable*. Istilah *liveness* dapat diartikan dengan transisi yang mungkin *enable*. Idealnya setiap transisi pada Petri net dapat di*fire* setelah beberapa pem*fire*an, hal ini menjamin *deadlock* tidak terjadi.

Coverability Tree

Coverability tree merupakan teknik yang digunakan untuk menyelesaikan beberapa aspek analisis pada *system event discrete. Coverability tree* dapat dibangun dari Petri Net dengan keadaan awal. Keadaan awal Petri Net didefinisikan sebagai *node root.* Anak dari *node root* merupakan keadaan yang dapat dicapai dari keadaan awal dengan mem*fire* sebuah transisi. Keadaan-keadaan ini dihubungkan ke *node root* dengan *edge.* Setiap *edge* pada *coverability tree* mempunyai bobot sebuah transisi yaitu transisi yang di*fire* untuk mencapai keadaan tersebut.

Coverability tree dari Petri Net (*P, T, A, w*) dapat dinyatakan dengan 3-*tuple* yaitu *(S, E, v*) yang masing-masing menyatakan himpunan keadaan, himpunan *edge* dan fungsi bobot. Anggota dari himpunan keadaan merupakan *n-tuple* dengan *n* adalah jumlah *place* pada Petri Net. Selain berupa bilangan bulat tak negatif, keadaan pada *coverability tree* juga bisa berupa *ω*. Untuk membedakan dengan Petri Net maka pada *converability tree* digunakan istilah *edge*.

Definisi 2.6

Coverability tree untuk Petri Net (*P, T, A, w*) dinyatakan dengan 4-*tuple* (*S, E, T, v*) dimana :

- S : himpunan berhingga keadaan (*state*), $S \in \{\omega, 0, 1, \ldots\}^n$
- E : himpunan berhingga *edge*, $E \in S \times S$
- T : himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$
- *v* : fungsi bobot, $v : E \rightarrow T$

Beberapa istilah yang digunakan untuk menjelaskan langkah-langkah yang dilakukan membangun *coverability tree* dengan jumlah *node* berhingga.

1. *Node root*, adalah *node* pertama dari *tree* dan merupakan keadaan awal.
2. *Node* terminal, adalah *nod*e yang menyatakan keadaan *deadlock* yaitu tidak ada transisi yang *enable*.
3. *Node duplicated*, adalah *node* yang sama dengan node yang sudah ada di *tree*.
4. Hubungan dominasi *node*. Misalkan notasi $x = [x(p_1), \ldots, x(p_n)]^T$ dan notasi $y = [y(p_1), \ldots, y(p_n)]^T$ menyatakan dua keadaan, yaitu node pada *coverability*

tree. *Node x* mendominasikan *y* yang dinotasikan *x>dy* jika kedua kondisi berikut terpenuhi.
(a). $x(p_i) \geq y(p_i)$ untuk semua *i*= 1,…,*n*
(b). $x(p_i) > y(p_i)$ untuk satu atau lebih *i*= 1,…,*n*

Untuk membangun *converability tree* dengan jumlah node berhingga dapat dituliskan sebagai berikut :

1. Inisialisasi $x = x_0$ (keadaan awal)
2. Untuk setiap *node x*, evaluasi nilai fungsi transisi *f(x, t_j)* untuk semua $t_j \in T$ seperti dibawah ini :
   (a). Jika f(x, t_j) tidak terdefinisi untuk semua $t_j \in T$ (tidak ada transisi yang enable pada keadaan *x*) maka x adalah node terminal.
   (b). Jika *f(x, t_j)* terdefinisi untuk satu atau lebih $t_j \in T$, maka hitung keadaan x' sebagai node baru dengan persamaan $x' = f(x, t_j)$.
   Jika terdapat *node y* pada path dari *node root* x_0 (termasuk) ke *x* sedemikian hingga $x' > dy$ maka $x'(p_i) = \omega$ untuk semua p_i yang memenuhi $x'(p_i) > y(p_i)$.
3. Jika semua *node* baru merupakan *node* terminal atau *duplicate*d maka berhenti.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai model Petri Net untuk salah satu layanan publik yang melibatkan antrian. Salah satu contoh layanan publik yang akan dibuat sistemnya dengan menggunakan model Petri Net adalah sistem pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur.

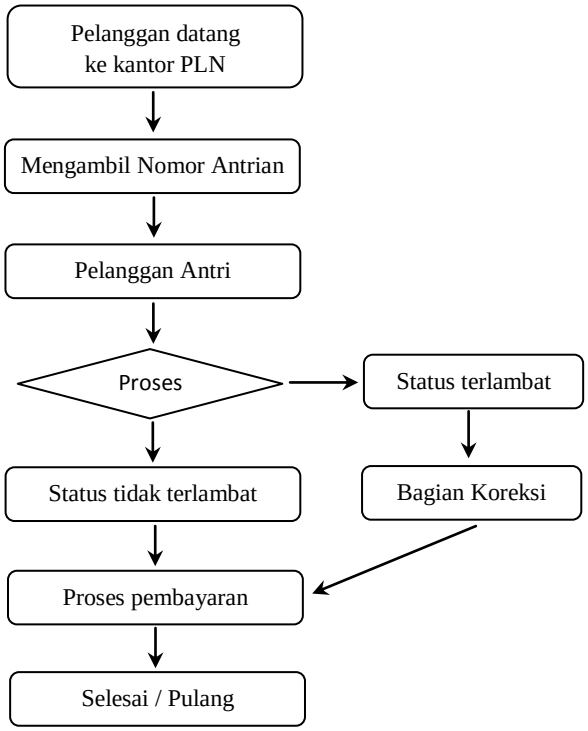
Analisis sistem pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur

Salah satu organisasi yang bergerak dalam bidang pelayanan publik adalah Perusahan Listrik Negara atau PLN. PLN adalah perusahan penyedia jasa listrik yang berusaha melayani konsumen sebaik-baiknya. Untuk itu pembayaran tagihan listrik setiap bulannya merupakan tanggung jawab atau kewajiban dari setiap pelanggan atau pengguna listrik PLN yang harus dipenuhi.

Tidak semua pelanggan yang mengetahui bagaimana membayar tagihan listrik di kantor-kantor PLN terdekat, bank atau tempat-tempat pembayar tagihan listrik lainnya. Dalam penulisan ini akan diambil salah satu contoh tempat pembayaran tagihan listrik yaitu kantor PLN (Persero) Rayon Ambon Timur. Loket pembayaran tagihan listrik yang ada pada kantor PLN (Persero) Rayon Ambon Timur berjumlah 2 loket, dimana setiap loket terdapat satu petugas (server).

Kondisi yang terjadi di kantor PLN (Persero) Rayon Ambon Timur adalah sering terjadi antrian yang panjang pada tanggal-tanggal tertentu dan besarnya jumlah pelanggan yang datang untuk melakukan pembayaran listrik bisa mencapai ratusan perharinya. Dalam membayar tagihan listrik ada beberapa *event* yang terjadi diantaranya antrian, pengecekkan meteran, pengecekkan denda, sampai proses membayar. Berikut adalah ilustrasi pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur.

Alur :

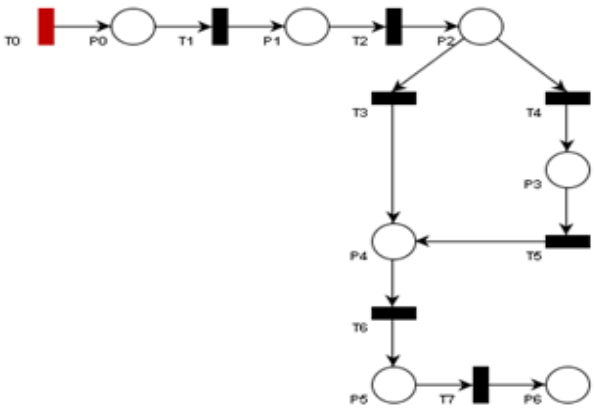


Gambar 7. Alur pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur

Model jaringan Petri Net sistem pembayaran tagihan listrik PT.PLN (Persero) Rayon Ambon Timur

Dari hasil analisis sistem pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur, maka permasalahan pembayaran tagihan listrik dapat dimodelkan dengan *softwere pipe* versi 2.5cr5 untuk memperoleh jaringan Petri Net.

Setiap *event* yang terjadi adalah berkaitan dengan transisi dan *place* yang merupakan kondisi yang harus dipenuhi agar transisi dapat terjadi. Model Petri Net dari sistem pembayaran tagihan listrik pada PLN (Persero) Rayon Ambon Timur seperti pada Gambar 8 yang terdiri dari 7 *place* dan 8 transisi.



Gambar 8. Model Petri Net sistem pembayaran tagihan listrik

Dari Gambar 8 didefinisikan bahwa pembayaran tagihan listrik dilayani pelanggan yang berstatus terlambat dan yang tidak terlambat dalam membayar tagihan listrik. Adapun penjelasan yang diberikan untuk setiap notasi *place* dan transisi sebagai berikut:

Place:
p_0 : Pelanggan datang ke kantor PLN
p_1 : Pelanggan mengantri dan siap dilayani
p_2 : Mengecek nomor tagihan
p_3 : Ke bagian koreksi
p_4 : Pengecekkan tagihan bulan lalu
p_5 : Proses pembayaran
p_6 : Pulang

Transisi:
t_0 : Sumber *(source)*
t_1 : Pelanggan mengambil nomor antrian
t_2 : Pelayanan dimulai
t_3 : Pelanggan tidak berstatus terlambat
t_4 : Pelanggan berstatus terlambat
t_5 : Hitung denda
t_6 : Siap membayar
t_7 : Proses pembayaran selesai

Penentuan keadaan awal Petri Net pada sistem pembayaran tagihan listrik dimulai dengan penempatan satu token pada *place* p_0 sebagai inisialisasi *marking*. Berdasarkan Gambar 8, setiap *place* tidak terisi token ini menyatakan bahwa loket pembayaran tagihan listrik belum dilakukan sampai waktu yang ditentukan. Dari model Petri Net yang diperlihatkan terdapat transisi t_0 yang selalu *enable*, sehingga apabila transisi t_0 di*fire* maka token akan selalu bertambah pada *place* p_0. Berikut prosedur pem*fire*-an yang akan dilakukan $[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7]$.

Jika proses dilanjutkan maka transisi yang *enable* adalah transisi t_0 dan t_1, yang menyatakan bahwa pelanggan datang ke kantor PLN dan mengambil nomor antrian. Setelah transisi t_1 di*fire*, maka token dari *place* p_0 akan dipindahkan ke *place* p_1 yaitu suatu keadaan dimana pelanggan sudah mengantri dan siap dilayani. *Place* p_0 akan tetap terisi minimal satu token yang menyatakan terjadinya proses kedatangan yang berlangsung hingga batas waktu yang disediakan. Pada keadaan *place* p_1 yang berisi satu token, maka transisi yang *enable* adalah transisi t_0, t_1 dan t_2. Setelah transisi t_2 di*fire* maka token akan berpindah ke *place* p_2 yang menyatakan suatu keadaan dimana *server* akan mengecek nomor tagihan pelanggan. Keadaan *place* p_2 akan mengakibatkan transisi yang *enable* adalah t_0, t_3 dan t_4. Transisi t_3 menyatakan bahwa status tidak terlambat yang berarti pelanggan membayar tagihan tepat waktu dan tidak dikenai denda. Transisi t_4 menyatakan status terlambat yang berarti pelanggan terlambat membayar tagihan dan akan dikenai denda.

Pada saat t_3 di*fire* maka akan menyebabkan transisi t_4 menjadi tidak *enable* dan *place* p_4 akan berisi satu token. Hal ini berarti mekanisme denda pada *place* p_3 tidak akan dilalui, *place* p_4 yang berisi satu token menyatakan keadaan pengecekkan tagihan bulan lalu. Sebaliknya jika transisi t_4 di*fire* maka akan menyebabkan transisi t_3 tidak *enable*, sehingga *place* p_3 akan berisi satu token yang menyatakan keadaan pelanggan harus menuju ruang koreksi. Pada *place* p_4 akan tetap kosong sampai transisi t_3 atau t_5 di*fire*. Ini berarti proses perhitungan tagihan bulan lalu akan siap jika denda keterlambatan selesai dihitung. Jika transisi t_6 di*fire* maka token akan berpindah dari *place* p_4 ke *place* p_5.

Place p_5 yang berisi satu token ini berarti pelanggan akan melakukan proses pembayaran, dan transisi yang *enable* adalah t_6. Jika transisi t_6 di*fire* maka satu token akan berpindah dari *place* p_5 ke *place* p_6 yang menyatakan bahwa proses pembayaran telah selesai dan pelanggan boleh pulang. Proses yang serupa akan berulang untuk pelanggan berikutnya.

Model matematika dalam bentuk representasi matriks.

Untuk merepresentasikan Petri Net dalam bentuk matriks yang dinyatakan dalam matriks *incidence*. Ada dua matiks *incidence* yaitu matriks *forwards incidence* dan matriks *backward incidence*. Elemen matriks *forwards incidence* adalah bobot *arc* yang menghubungkan transisi ke *place*, dan elemen matriks *beckwards incidence* adalah bobot *arc* yang menghubungkan *place* ke transisi.

Berdasarkan model Petri Net pada Gambar 8 terdapat 7 *place* dan 8 transisi, sehingga banyak baris (n) = 7 dan banyaknya kolom (m) = 8. Dengan demikian akan terbentuk matriks *forward dan bacwards incidence* dengan ordo 7x8. Representasi dalam bentuk matriks *incidence* adalah sebagai berikut:

- Matriks *forwards incidence* (A_f)

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriks *backwards incidence* (A_b)

$$A_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Keadaan awal Petri Nat dari Gambar 8 adalah $m_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$. Transisi t_0 *enable* karena memenuhi $m_0 \geq A_b(:,0)$. Untuk matriks *incidence* akan dihasilkan dari persamaan $A = A_f - A_b$ dan menghasilkan matriks *incidence*nya sebagai berikut :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan keadaan berikutnya maka digunakan persamaan : $m_1 = m_0 + Ae_1$ dengan e_1 menyatakan vektor kolom yang mempunyai elemen sebanyak *m* yaitu diperoleh dari kolom matriks identitas.

Petri Net pada Gambar 8 keadaan awalnya adalah

$$m_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

sehingga akan dihasilkan keadaan setelah transisi t_1 di*fire* sebagai berikut :

$$m_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Dari perhitungan tersebut diperoleh

$$m_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Hal ini berarti bahwa keadaan yang baru transisi yang *enable* adalah t_0 dan t_1. Untuk penentuan keadaan yang baru selanjutnya, maka m_1 menjadi keadaan awal untuk m_2, demikian seterusnya.

Model *Coverability Tree*

Untuk membangun *coverability tree* pada Gambar 8, terlebih dulu ditentukan *node root* dari Petri Net yaitu keadaan awal

$$m_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Keadaan ini menandakan bahwa *place* p_0 belum terisi oleh token sampai transisi t_0 difire. Untuk menentukan *child* dari *node* tersebut berdasarkan keadaan yang dihasilkan setelah transisi sumber t_0 di*fire*, yaitu pada saat transisi t_0 dan t_1 *enable*. Dari bentuk *coverability tree* yang dihasilkan setelah transisi t_0 di*fire*, maka *place* p_0 akan terisi satu token sehingga transisi t_1 menjadi *enable* dan diperoleh

$$m_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Pada saat transisi t_1 *difire* maka token akan berpindah dari *place* p_0 ke *place* p_1 sehingga transisi yang enable adalah t_0 dan t_2 dan diperoleh

$$m_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

ketika transisi t_2 di*fire* maka token akan berpindah dari *place* p_1 ke p_2 dan diperoleh

$$m_3 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

hal ini berarti node root mempunyai satu child. Pada keadaan *place* p_2 berisi satu token maka transisi t_3 dan t_4 menjadi *enable*, m_2 menjadi keadaan awal untuk menghitung keadan

$$m_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

dan

$$m_5 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$$

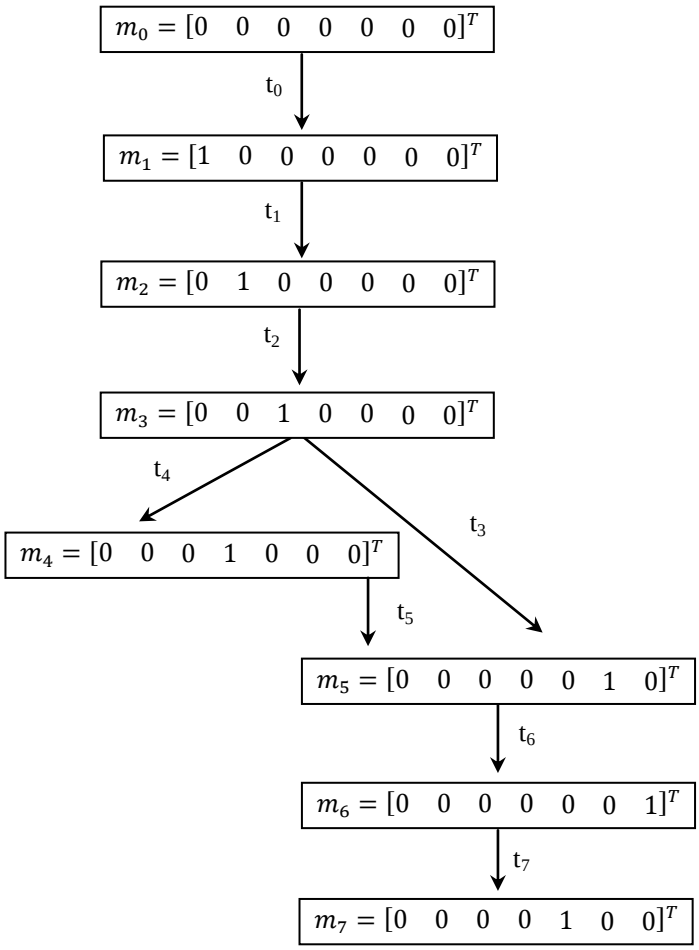
dengan demikian m_2 mempunyai dua *child*. Untuk keadaan m_4 akan menyebabkan transisi t_5 menjadi *enable*, sedangkan pada m_5 menyebabkan transisi t_6 *enable* dan jika tranisi t_5 di*fire* maka akan menghasilkan m_5. Jadi m_5 merupakan *child* dari m_3 sekaligus m_4. Selanjutnya m_5 digunakan sebagai keadaan awal untuk memperoleh m_6 dan diperoleh

$$m_6 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$$

yaitu keadaan dimana transisi t_6 di*fire*. Dalam hal ini m_5 mempunyai satu *child* yaitu m_6. Pada saat transisi t_7 *enable* diperoleh dengan memasukkan m_6 sebagai keadaan awal, sehingga diperoleh

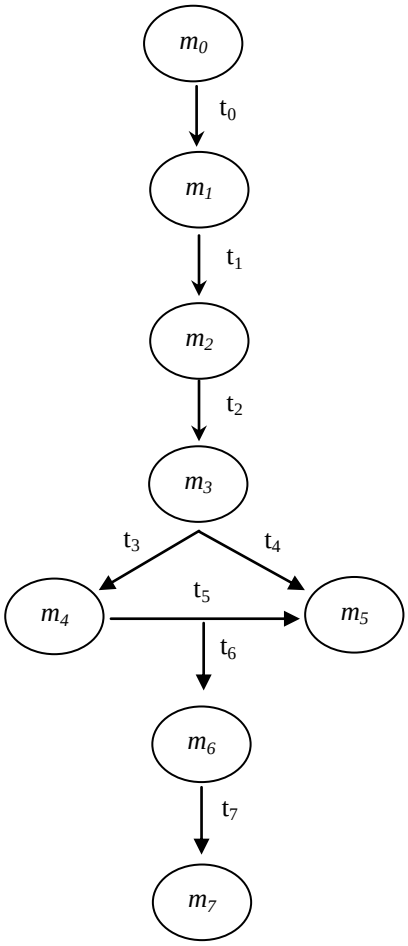
$$m_7 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T.$$

Dengan demikian akan muncul keadaan awal yang membuat t_0 kembali *enable* dan prosesnya akan berulang seterusnya. Secara lengkap *coverability tree* dari Petri Net pada gambar 7 adalah sebagai berikut:



Gambar 9. *Coverability Tree* dari model jaringan Petri Net Sistem pembayaran tagihan listrik

Atau dapat juga digambarkan sebagai berikut :



Gambar 10. Bentuk lain dari *Coverability Tree*.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab 4 di atas, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Penggunaan model Petri Net sangat baik untuk menganalisis sistem antrian pada sistem pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur sehingga dapat diperoleh model matematikanya.
2. Petri Net merupakan suatu alat bantu untuk memodelkan suatu *system event discrete* dalam kasus sistem pembayaran tagihan listrik yang dapat dinyatakan secara matematis dalam bentuk jaringan Petri Net dan Matriks *incidence*.
3. *Coverability tree* merupakan suatu teknik untuk menganalisis beberapa aspek *system even discrete* dan dapat dibangun dari Petri Net untuk kasus sistem pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur.

DAFTAR PUSTAKA

Cassandras, C.G. 1993. *Discret Event System : Modeling and Performance Analysis,* Aksen Assosiates Incorporated Publishers, Boston.

David, R dan H. Alla. 1992. *Discret, Continuous and Hybrid Petri Nets.* Springer. Germany.

Kordache, M dan P.J.Antsalis. 2006. *Supervisiory Control of Concurrent System.* Birkhauser. Amerika.

Moen. A. 2003. *Introduction to Petri Nets-Part 1*. Berlin.

Murata, T. 1989. *Petri Nets : Properties, Analysis and Aplication*. Proceeding of the IEEE.

Nurwan dan Subiono. 2008. *Model Petri Net Antrian Klinik Kesehatan Serta Kajian Dalam Aljabar Max Plus.* ITS, Surabaya.

Peterson.J.L. 1981. *Teori Petri Net dan Pemodelan Sistem*. Pretince Hall. New York.

Tjahyono, H. 1998. *Aplikasi Jaringan Petri dan Manufaktur Sistem; Pemodelan, Pengendalian dan Analisis Kinerja.* IEEE press. http://daimi.au.dk/Petrinets, Tgl 30 Mei 2011, Pkl.23.15.