

Revisión / Review

ESTUDIO PRELIMINAR DE APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

PRELIMINARY STUDY APPROACH TO THE CONCEPT OF LIMIT OF A FUNCTION

ELÍAS IRAZOQUI BECERRA^{1*}, ANTONIO MEDINA RIVILLA²

* Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile.
eirazoq@ubiobio.cl

² Departamento de Educación, Facultad de Educación, UNED, Madrid, España.
amedina@edu.uned.es

RESUMEN

Este trabajo presenta una investigación sobre el concepto de límite de una función en un punto. Dicho estudio ha merecido a través del tiempo la atención de diversos investigadores. La razón para ello radica en su importancia, la que junto con la Derivada y la Integral constituye la tríada básica del Cálculo. El objetivo final del estudio es poder generar conocimiento didáctico que permita la elaboración de Actividades Didácticas para los estudiantes, de modo tal que ellas contribuyan a una mejor comprensión de dicho concepto. Para dar respuesta al objetivo anterior, se elaboró un cuestionario, el cual se aplicó a 20 profesores de Matemáticas del ámbito universitario del país (Chile). De su aplicación se obtuvo respuesta a asuntos como: si consideran importante el concepto de límite y cuáles son las dificultades más comunes sobre su enseñanza, entre otras. A continuación, otra fuente de la investigación estuvo centrada en el análisis de los textos de Cálculo que han sido usados para su enseñanza, lo anterior permitió develar aspectos como: la importancia que le dan al concepto y cuál es la forma de abordarlo, esto es, qué aproximaciones usan para su presentación. Como consecuencia pudieron materializarse actividades didácticas de aprendizaje. Uno de los recursos usados en ellas corresponde al uso del software Winplot.

Palabras clave: Actividad didáctica, función, límite, Winplot.

ABSTRACT

This paper presents an investigation into the concept of limit of a function at a point. This topic has received attention of many researchers during decades, the reason for this lies in its importance, along with the Derivative and Integral as the basic triad of Calculus. The ultimate goal of the study is to generate knowledge to the educational development of Teaching Activities for students, so that they contribute to a better understanding of the concept. To meet the above objective, a questionnaire, which was applied to 20 mathematicians teaching at universities in our country (Chile) was developed. In response to the above mentioned inquest, this study approaches to important questions, i.e., if considered important the concept of limit and what are the common pitfalls on their teaching, among others. Then another source of research focused on the analysis of the texts of calculus that have been used to teaching. The above allowed revealing aspects as: the importance given to the concept and what is the way to approach it, that is, what approaches

used for presentation. Following these studies and appealing to the teaching experience in this subject, this study materialized Learning Activities could materialize. One of the resources used in this item was the Winplot software.

Keywords: Teaching activity, function, limit, Winplot.

Recibido: 16.05.13. Revisado: 09.06.12. Aceptado: 13.07.13.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza del Cálculo, en general y, específicamente el concepto de límite no resulta fácil de ser enseñado por los docentes universitarios. Las variables que dificultan su aprendizaje, a pesar de lo numerosas, se pueden agrupar en tres, a saber: epistemológicas, que dan cuenta del concepto en sí, didácticas, que se relacionan con la labor docente y, por último, cognitivas, las cuales se relacionan con las estructuras cognitivas que posee el estudiante para aprehender no sólo el límite de una función en un punto.

El concepto de límite ha merecido a través del tiempo, la realización de numerosos estudios de tesis doctorales (Cornu, 1983; Romero, 1991; Espinoza, 1998), hace ya treinta años de ello. Y hoy en día se sigue estudiando por diversos investigadores de diferentes lugares del mundo (Engler *et al.*, 2007; Bucari *et al.*, 2007; Claros *et al.*, 2007; Molfino y Buendía, 2010; Fernández-Plaza *et al.*, 2012). La razón fundamental estriba en que dicho concepto, junto a la derivada y la integral constituyen la tríada básica del estudio del Cálculo Diferencial e Integral de una variable.

Además de lo señalado anteriormente, está el hecho que dicho concepto puede ser visto como un objeto de conocimiento que permite estudiar la continuidad de las funciones, su derivación y, por ende, la integración. De manera que, avanzar en una comprensión acabada de él se hace absolutamente necesario si lo que se desea es ir más allá de repetir procedimientos y/o al-

goritmos, como suele ser el caso común de la realización de muchos cursos en los que el aprendizaje se mide por la capacidad de resolver unos cuantos cálculos sin ningún sentido, como podría ser el estimar el valor de un límite, calcular una derivada o una integral. Hay en ello, sin duda, un cierto grado de conocimiento en esta materia pero, cuando se requiere avanzar en la solución de un problema no rutinario comienzan las verdaderas dificultades para el estudiante y también para el docente si no ha comprendido cabalmente dicho concepto.

Ahora bien, en lo que atañe a esta presentación se puede decir que en él se realiza una suerte de aproximación preliminar al tema en tres sentidos:

En la primera de ella se presentan los resultados de un Cuestionario aplicado a veinte (20) profesores de Matemáticas, actualmente en ejercicio, en Chile. Ellos se desempeñan a lo largo del país, desde la región Norte (Arica), pasando por la Región Metropolitana, para concluir en la Octava Región. Las instituciones a las cuales pertenecen dichos docentes son: la Universidad de Tarapacá, la Universidad Santo Tomás en la Región Metropolitana, la Universidad de Concepción y la Universidad del Bío-Bío, ambas de la Región del Bío-Bío.

La segunda aproximación al tema lo constituye el análisis realizado en profundidad a tres textos de Cálculo de un total de siete. El análisis se encarga de develar el grado de importancia dado al tema, asunto que queda de manifiesto por los autores al inicio de su desarrollo, qué conceptos

previos consideran para presentar el tema y, finalmente, qué recursos usan y cómo lo abordan.

Por último, lo que configura la tercera aproximación al tema y, como resultado del análisis del estudio anterior, se ha elaborado una serie de Actividades Didácticas de Aprendizaje (ADA), cuatro en total, con el claro propósito de poder usarlas en un siguiente curso de Cálculo. La exposición termina con la presentación de las Conclusiones que se derivan de lo abordado hasta ahora.

2. DESARROLLO

Hoy en día, las Instituciones de Educación Superior de manera preferencial están por privilegiar la labor investigativa de las ciencias y, entre ellas se puede mencionar a las Ciencias Básicas (Matemática, Física, Biología y Química) que son disciplinas afines con las cuales convive la Matemática en una Facultad de Ciencias, por lo general.

Desde hace un tiempo cohabita por un lado La Educación Matemática y, por otro lado, el cultivo de la Matemática como tal. Muestra de ello son los Congresos Nacionales del país (Chile). Uno de ellos es el Congreso de Matemática Capricornio (COMCA, 2013), auspiciado por las Universidades del Norte de Chile, que comprende desde la Universidad de Tarapacá hasta la Universidad de la Serena por el sur. El otro evento, más antiguo que el anterior, es el de las Jornadas de la Matemática de la Zona Sur, ya en su versión XXVII para el año 2014.

La situación descrita anteriormente de convivencia de ambas disciplinas del saber, como los son el saber disciplinar y el saber didáctico propiamente tal, están, a nuestro entender, lejos de producir resultados que puedan plasmarse en verdaderas propuestas de aprendizajes para los estudiantes,

más bien lo que se observa es una suerte de tolerancia por el saber didáctico y todo lo que ello comporta, sea para atender la formación inicial de maestros o simplemente para realizar la transposición didáctica en el área de aprendizaje que sea, pero sin mayor trascendencia institucional.

Es más, al adentrarse al interior de los Departamentos de Matemáticas de las Universidades, se evidencia una falta de creación y funcionamiento de espacios de reflexión, como podrían ser los *Talleres de Discusión Didáctica*, lugar propicio para que los temas de la enseñanza se pudiesen discutir y, junto con ello, poder generar propuestas de innovación didáctica alternativas de mejora de los procesos de enseñanza de la Matemática en los niveles que amerite. Hay aquí una labor política y de gestión para los docentes preocupados de que se produzca un verdadero conocimiento didáctico capaz de cambiar las prácticas docentes actuales en bien del conocimiento matemático actual y futuro de los estudiantes. Si bien la Matemática ha tenido un desarrollo aceptable a la Educación Matemática le queda aún bastante trecho por recorrer para alcanzar mejores niveles de logro, de modo de poder ser un referente claro y orientador respecto de qué políticas implementar a mediano y largo plazo en la enseñanza de la Matemática en todos sus niveles educativos.

Todo lo dicho, no hace otra cosa que situar el contexto donde se desarrolla el quehacer educativo de la matemática en un vasto número de Universidades Regionales del país. Sin duda, la realización anual de estos Congresos y Jornadas Nacionales representan una posibilidad cierta de exponer los avances y resultados que poco a poco se van obteniendo como fruto de las investigaciones educativas de la Matemática hoy en día, otro tanto representan las revistas, que aunque escasas de momento, sirven de tribuna para exponer dicho conocimiento.

Hechos los alcances anteriores, se está

aún lejos de concretar el funcionamiento de *Talleres de Discusión Didáctica* en el amplio sentido del término. A pesar de ello, se ha generado, con la participación de algunos docentes, la creación de un primer Cuestionario que sirve de base para avanzar en el conocimiento didáctico del concepto de Límite, y que da origen a la primera aproximación al tema que aquí se presenta. Cuestionario, debidamente validado por expertos en el tema y, que pretende indagar sobre el concepto de límite y su enseñanza. Dicho Cuestionario contó de seis preguntas y las respuestas de cada una de ellas serán analizadas una a una, como podrá apreciarse en el desarrollo de este artículo.

Ahora, en lo que dice relación con el análisis realizado a siete textos de *Cálculo* de uso frecuente entre los docentes, su elección estuvo orientada, en cierto modo, por las respuestas que los propios docentes manifestaron al contestar el Cuestionario. Para el estudio de dichos textos se puso especial cuidado en aspectos como:

- a) Los comentarios de los propios autores.
- b) Qué conceptos previos abordan.
- c) De qué recursos se valen para su presentación y, por último,
- d) Si lo abordan en términos de ϵ y δ , esto es, de manera formal y, por tanto clásica.

En virtud del espacio, que un trabajo como el presente tiene, se ha optado por analizar tan sólo tres de ellos con más detalle, ellos son: el texto de Robert Larson *et al.* (2006), el de Serge Lang (1990) y, por último, el texto escrito por el químico Erich Steiner (2005) titulado: “Matemáticas para las Ciencias Aplicadas”. Se concluye cada análisis con una valoración general en base a los puntos ya señalados y una percepción que dejan los propios autores al tratar el

concepto de “Límite”. Sin perjuicio de ello, a la hora de formular los resultados se presentarán, en dos tablas, de manera resumida el análisis comparativo de los todos los textos estudiados, en un total de siete como ya se ha señalado.

3. RESULTADOS

3.1. Sobre el cuestionario

Se ha creído conveniente, para este acápite, abordar el análisis de las respuestas dadas por los docentes a sólo tres de las seis preguntas formuladas, dejando el análisis de las restantes respuestas como parte importante de las Conclusiones, ello debido a la trascendencia que dichas respuestas tienen para el trabajo en su conjunto y como perspectiva final de este estudio.

Luego, las respuestas que se analizan, por ahora, son las relacionadas con las preguntas: P1, P2 y P4.

Con el objeto de facilitar la comprensión del lector, se enuncian cada una de las Preguntas con su correspondiente análisis.

Pregunta P1. *En el contexto de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo de una variable para carreras no Matemáticas, ¿considera importante el concepto de Límite?*

Sí: _____ No: _____ Justifique su respuesta.

Esta pregunta fue contestada con un 85% para la opción Sí. Uno de los argumentos que resume tal preferencia fue: “Central para el Cálculo Diferencial e Integral, además contribuye al desarrollo del pensamiento abstracto”. Por su parte la opción No obtuvo el 15% de las preferencias. Una de las razones esgrimidas fue: “Concepto difícil de entender para los alumnos de primer año que no sean estudiantes de Matemática”.

Pregunta P2. *A su juicio, ¿qué conceptos previos considera necesarios para introducir el Límite de una función en un punto?*

Esta pregunta relacionada con los conceptos previos arrojó el siguiente resultado, por orden de preferencia:

1. Funciones (dominio, recorrido, evaluar funciones, entre otras), 44 alusiones.
2. Álgebra Básica (factorización, productos notables, uso de cuantificadores, etc.) 18 alusiones.
3. Subconjuntos de números reales (intervalos, inecuaciones y vecindades) con 8 alusiones.
4. Límite de una sucesión y series, con tan solo 4 alusiones docentes.

Pregunta P4. *¿Qué texto(s) de Cálculo o Apunte(s) usa como apoyo para su enseñanza?*

La respuesta a esta pregunta se resume en los siguientes datos:

1. James Stewart (2010), con 7 preferencias.
2. Apuntes propios (2012), con 6 preferencias.
3. Larson *et al.* (2006), con 6 preferencias.
4. Leithold (1998), con 3 preferencias.
5. Textos de autores como: Ayres y Mendelson (2004), Serge Lang (1990), y Purcel y Varberg (2000), con dos preferencias cada uno de ellos.
6. Otros autores de textos mencionados fueron: Stein (1984), Hoffmann *et al.* (2006) y Edwards y Penney (2003), con sólo una mención.

Claramente la opción de los textos escritos por: Stewart y Larson *et al.* marcan la pauta, sin desconocer el decidido uso de

Apuntes generados por los propios docentes sobre esta materia.

3.2. Sobre los textos de Cálculo

Tal como se indicó previamente, se presenta con más detalle el estudio de sólo tres textos de Cálculo, fijando la atención en cuatro aspectos en todos ellos, de modo de poder evidenciar una suerte de comparación entre ellos. Los textos que se analizan son: el de Robert Larson *et al.* (2006), el texto de Serge Lang (1990) y, por último, un texto de Erich Steiner (2005). Se concluye cada análisis con una valoración general en base a los puntos ya señalados junto a una percepción que dejan los propios autores al tratar el concepto de “Límite”.

—Sobre el texto de Larson *et al.* (2006), se puede decir en primer término, lo que expresan sus autores al inicio del Capítulo 1 sobre “Límites y sus propiedades”; se lee: “Una técnica que se puede utilizar para estimar un límite consiste en trazar la gráfica y luego determinar el comportamiento de la gráfica a medida que la variable independiente se acerca a un valor específico” (Larson *et al.*, 2006, p. 41).

Como conceptos previos consideran un Capítulo denominado Capítulo P, en él se abordan los temas: Gráficas y Modelos, Modelos lineales y ritmos o velocidades de cambio, Funciones y sus gráficas y, por último, Ajuste de modelos a colecciones de datos. Con este bagaje se disponen a considerar el Capítulo 1, dedicado al concepto de Límite propiamente tal, para ello se valen de la una función racional: $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$, con $x \neq 1$. Ello conduce al lector a una aproximación informal del Límite. A continuación examinan cinco ejemplos sobre estimación del límite, utilizando Aproximación Gráfica y Tabular simultáneamente.

te, con esto último se ha de entender la construcción de una tabla de valores donde se realizan estimaciones de valores: $(x, f(x))$, tanto por derecha como por izquierda y próximos al punto donde se desea estimar el valor de un límite.

Posterior a ello definen formalmente el concepto de límite en términos de ϵ -silon y δ . Esto les permite examinar tres ejemplos, dos de ellos referidos a funciones lineales y el último un trabajo con la función cuadrática $y=x^2$. Aquí, tanto los gráficos como el desarrollo algebraico son imprescindibles para la estimación del valor de δ , conocido ϵ -silon.

La sección termina con un listado de 76 problemas. Después de ello, se consideran los Teoremas sobre límite, asunto que permite la estimación del valor de los límites con cierta comodidad. A modo de resumen se puede afirmar que la importancia dada al concepto de límite es Alta y se avanza desde visión gráfica y tabular a su definición formal.

—El segundo texto que se analiza corresponde al texto de *Lang* (1990), denominado simplemente “Cálculo”. Las palabras de este autor revelan la forma en la que usará el concepto en el desarrollo del texto, ellas son: “*La experiencia muestra que los estudiantes no tienen una base psicológica adecuada para aceptar un estudio teórico de los límites, y se resisten de manera formidable*”.

Agrega además: “*Mi opinión es que ϵ -silon- δ debería quedar completamente fuera de un curso normal de Cálculo*”. Esta postura inicial le permite dejar para el Apéndice el examen riguroso del concepto de límite.

Los temas previos, para este autor, los desarrolla en los Capítulos 1 y 2, dedicados a revisar temas del álgebra básica, como son los diferentes tipos de números y sus propiedades, como también el estudio de

las funciones y sus gráficas. Hecho esto, se adentra al problema de la Derivación, sin más. Así, la necesidad de deducir las reglas de Derivación implica necesariamente el uso del concepto de Límite. De manera más precisa, el concepto de límite aparece al estimar la pendiente de la recta tangente a la socorrida curva $y=x^2$, en el punto $P=(1,1)$. Concepto que considera intuitivamente claro.

Luego, después de haber tratado con la pendiente de una curva y la Derivada, definición que da como el límite del cociente de Newton, recién trata sobre “Límite” y, lo hace entre las páginas 63 a la 68, lugar donde expone una serie de propiedades de los límites (sendos Teoremas, para otros autores). Junto con ello da una técnica de cómo han de calcularse para terminar explicando qué se ha de entender por el “ $\text{Lím } F(h)=L$, cuando h tiende a cero”.

En resumen, este autor evita considerar el estudio del concepto de límite en términos formales y sólo recurre a él como un instrumento que permite estimar el concepto de Derivada. Así, la importancia dada al concepto de límite, pese a que se trata en el Apéndice del texto, es Regular.

—Finalmente, se expone el análisis realizado al texto escrito por *Erich Steiner*. Este autor declara en el Prefacio de su obra que: “Una de las características de este libro es el uso extenso de ejemplos para ilustrar todos los conceptos y métodos importantes”, además hace expresa mención que el texto se acompaña de notas históricas a pie de página, cuando la ocasión así lo amerita.

Hay un aspecto más que conviene mencionar, es el hecho que el texto está pensado para que sirva de base para las asignaturas de Matemáticas para químicos.

Este autor desarrolla un gran cantidad de temas previos antes de considerar el con-

cepto de límite propiamente tal. De hecho no es sino hasta el Capítulo cuarto cuando recién se ocupa del tema, así son su ocupación temas como: Números, variables y álgebra. Las funciones algebraicas y trascendentes, como lo son las funciones trigonométricas y sus inversas. Como también la función exponencial y logarítmica.

Por último, al tratar con la derivación y la continuidad se ve ante la necesidad de considerar el concepto de límite. Dejando para la sección 4.4 del cuarto Capítulo su tratamiento. Lo hace estudiando la función racional: $f(x)=(x^2-4)/(x-2)$, para estimar el valor del límite usa aproximación tabular izquierda y derecha, deduciendo que el límite de la función antes mencionada tiende

a dos cuando x tiende a cuatro. Aprovecha la ocasión para revisar la continuidad de $f(x)$ en $x=2$, afirmando que se trata de una discontinuidad evitable, definiendo como $y=4$, cuando x toma el valor dos.

Se limita a revisar tan sólo tres ejemplos donde se producen indeterminaciones, las que son comunes en las ciencias físicas. Lo interesante de este texto son los ejemplos distintos que en él se exponen. A pesar de ello la valoración general dada al concepto de límite por este autor resulta ser Baja.

A continuación, en una suerte de síntesis, se presentan dos Tablas que resumen el estudio hecho sobre el concepto de Límite a los siete textos analizados.

Tabla 1. Resumen del estudio realizado a cuatro textos.

	Serge Lang	Tom Apostol	Zill y Wright	Erich Steiner
Comentarios	Límite abordado de manera intuitiva.	Aborda el límite desde una concepción topológica.	Es un texto recomendable por su buena presentación.	Texto enfocado a los estudiantes donde la química es fundamental.
Conocimientos previos	Números y funciones. Gráficas y curvas.	Integración y continuidad.	Funciones y Gráficas. Función exponencial y logarítmica.	Número, Variables y Algebra. Funciones Algebraicas. Funciones trascendentes Derivación
Formas de abordarlo	Pendiente de una curva en un punto.	Concepto de entorno. Definición del Límite en base a entornos.	De manera informal. Ap. Gráf. y Ap. Tab (D e I). Límites laterales, continuidad. Definición formal.	Uso de una función racional. Ap. Tab (D e I).
Importancia del tema	BAJA	REGULAR	ALTA	BAJA

Tabla 2. Resumen del estudio realizado a los tres textos restantes.

	Larson <i>et al.</i>	J. Stewart	L. Leithold
Comentarios.	Usa tan sólo 3 ejemplos para abordar la definición formal $\varepsilon - \delta$	No usa aproximación analítica $\varepsilon - \delta$	Excelente texto para revisar la definición formal del Límite $\varepsilon - \delta$
Conocimientos previos	Gráficas y Modelos. Funciones y sus gráficas.	Funciones y modelos. Distintas formas de representar funciones	Funciones y sus gráficas. Funciones como modelos matemáticos
Formas de abordarlo	Problema de la recta tangente y uso de función racional.	Problema de la tangente y de la velocidad. Ap. Graf y Ap. Tabular (D /I).	Pendiente a una curva en un punto. Ap. Gráf. y Ap. Tab (D e I). Estudio de las desigualdades del límite.
Importancia del tema	ALTA	ALTA	ALTA

3.3. Sobre las actividades didácticas de aprendizaje

La generación de actividades didácticas de aprendizaje es el objetivo final de estos dos estudios realizados. Entendiendo por actividades didácticas una colección de problemas diseñados para los estudiantes como fruto de ambos estudios y en conjunción con la propia experiencia docente acumulada a través de los años de dictación del Cálculo de una variable.

Por otro lado, no se pretende descubrir ahora que una de las actividades más relevantes para aprender Matemáticas consiste en la Resolución de problemas, sean estos rutinarios o no. Conscientes de ello, el objetivo primordial se ha centrado en producir posibilidades para los estudiantes, a decir verdad, es el único designio como educadores. Lo anterior justifica entonces plenamente la generación y puesta en escena de las Actividades Didácticas de Aprendizaje (ADA), referidas al concepto de Límite y, de paso también, al de la continuidad de una función.

Sin perjuicio de lo anterior, hay dos aspectos que se espera tener presente a la hora de implementar dichas Actividades, ellos son: por un lado la incorporación del software Winplot (de dominio público y fácil de usar) y, por otro lado, el trabajo de cada una de las actividades de manera individual en un comienzo, para continuar de manera grupal en su desarrollo final.

Ahora, en materia de enseñanza, es interesante el último modelo planteado por Charnay (1994), que es el *Modelo apropiativo*, centrado en la construcción del saber por parte del estudiante y, más aún, como resultado de la interacción entre sus pares y el apoyo docente. Al adscribir a esta postura se está en perfecta armonía con el Modelo Educativo Institucional, el cual pone el foco en el estudiante más que en el docente a la hora de adquirir el conocimiento (Modelo educativo, 2013).

Este cambio de paradigma educativo, sin duda que demandará de tiempo para que sea asimilado e instaurado por el cuerpo docente.

Así, el presente estudio y su concreción

en la implementación y evaluación de las mencionadas Actividades de Aprendizaje, representan un claro ejemplo en este sentido en materia de enseñanza del Cálculo, aunque referida, de momento, a la enseñanza del concepto de Límite de una función.

4. CONCLUSIONES

De las dos aproximaciones abordadas en la exposición de este trabajo, se pueden adelantar conclusiones en dos aspectos de él, el primero referido a la aplicación del Cuestionario a los docentes universitarios y, el segundo al análisis hecho a los textos de Cálculo. La aplicación y posterior evaluación de las Actividades será materia de otro trabajo.

En lo que guarda *relación con el análisis del Cuestionario*, las conclusiones se centran de manera específica en las preguntas **P3**, **P5** y **P6**, por la trascendencia que el análisis de estas respuestas significa para conformar conclusiones.

Así, la *pregunta P3*, *¿Cómo Introduce el concepto de límite? ¿Qué tipo de recursos y/o ejemplos usa?*, fue contestada, por orden de preferencias, en los siguientes términos:

Uso de aproximación gráfica, con 13 alusiones.

Uso de aproximación tabular por izquierda y derecha, con 8 alusiones.

Uso de recursos informáticos, con 6 menciones.

Uso de funciones definidas a trozos o donde se producen indeterminaciones, con 3 menciones.

Uso de la definición formal, con tres alusiones.

La simple ordenación de esta secuencia por orden de preferencia, genera la conclu-

sión obvia de cuáles son los recursos más usados por los docentes encuestados para introducir el concepto de Límite.

La forma anterior de presentar el concepto, no dista mucho de lo que sucede en otros sitios universitarios al momento de impartir un curso de Cálculo regular.

Por su parte *la pregunta P5*, *¿Cuáles son las dificultades que usted ha identificado, sobre la enseñanza del límite? Explíctelas.*

Las respuestas se situaron en distintos ámbitos, a saber:

- Relacionadas con el propio concepto, dada la dificultad intrínseca que éste posee.
- En lo que concierne al estudiante, se requiere de él un mayor grado de conocimiento tanto del álgebra básica como de las funciones.
- En materia de recursos, se advierte una carencia de material bibliográfico que contemple ejercicios de aplicación a situaciones contextualizadas.

Por último, la *pregunta P6*, *Algún comentario que desee hacernos, sobre la enseñanza del Cálculo de una variable, no sólo sobre el concepto de Límite, será bien recibido.*

Pregunta abierta que pretendió recoger, con un sentido amplio, las impresiones de los encuestados ya no sólo sobre el concepto de Límite. Ella permitió recoger contribuciones como:

- La necesidad de conocimientos previos de parte de los estudiantes es absolutamente necesaria, tanto en el álgebra básica como en el tema de las funciones y todo lo que ello comporta.
- Al docente le cabe centrar su enseñanza en lo esencial, no usar ejemplos demasiado complejos, que en nada facilitan la comprensión de los conceptos matemáticos.

- Algunas líneas de acción docente podrían ser: la generación de material didáctico, la creación de talleres donde la participación de los estudiantes sea un pilar fundamental de modo de poder ayudarlos para una mejor comprensión de la Matemática que deben aprender.
- Incorporar las TICs y, por último, conectar la disciplina con la Historia de la Matemática, asunto que está siempre latente pero que sin embargo se deja de lado.

Respecto de *los textos examinados*, siete en total y en esta exposición tan sólo tres por motivos de espacio, se pueden adelantar las siguientes conclusiones:

- Dentro de los textos más usados por los docentes se sitúan el de Stewart, y el de Larson. También merecen consideración los Apuntes que los propios docentes elaboran para realizar su tarea.
- No hay textos mejores que otros, la elección de uno de ellos está en función de los Objetivos que se persigan al dictar un curso y la carrera para la cual se imparte.
- De la presentación que hacen del concepto de Límite, se desprende que transitar de aproximaciones gráficas y tabulares a una aproximación analítica, esto es, algebraica, es lo más aconsejable, y de sentido común, si el objetivo final es abordar el concepto de Límite en términos de ϵ y δ .
- Los listados de ejercicios que los textos exhiben al finalizar cada una de sus secciones, por lo general, son demasiado numerosos y repetitivos, lo que obliga al docente a realizar una selección de dichos ejercicios.
- Lo anterior, entonces, justifica plenamente la elaboración de Actividades Didácticas de Aprendizaje en cada uno de los temas que contempla el aprendi-

zaje del Cálculo y, el concepto de Límite, por tanto, no es la excepción.

- Haber hecho este análisis sobre los textos de Cálculo, en lo que al tema de Límite se refiere, ha permitido no sólo examinar el conocimiento disciplinar, sino también el conocimiento didáctico del tema. En ello radica la mayor virtud del presente estudio y, por tanto, permite avanzar en la profesionalización de la acción docente en pos de mejores aprendizajes de parte de los estudiantes.

A modo de corolario, se puede señalar que, espacios de reflexión y análisis que se han denominado Talleres de Discusión Didáctica son absolutamente necesarios al interior de los Departamentos de Matemáticas. Es dable pensar en las bondades, proyecciones e implicancias que un buen funcionamiento de estos Talleres pueden significar para una mejor labor educativa presente y futura. Así, lo mejor está por venir.

BIBLIOGRAFÍA

- APOSTOL, T. (1990), Cálculo. Volumen I. México: Editorial Reberté.
- AYRES F, MENDELSON E. (2004), Cálculo Schaum. Mc Graw-Hill, Interamericana de España, S. A.
- BUCARI N, BERTERI F, TRIPOLI M (2007), Distintos enfoques para la enseñanza de la noción de límite en un primer curso de Cálculo. Jornadas de enseñanza e investigación educativa en el campo de las ciencias exactas y naturales.
- CLAROS F J, SÁNCHEZ M T, CORIAT M (2007), Fenómenos que organizan el Límite. PNA, I(3), 125-137.
- CORNU, B. (1983), Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. Tesis doctoral. Universidad de Grenoble.
- CHARNAY, R. (1994), Aprender por medio de la resolución de problemas, en Didácti-

- ca de Matemáticas. Aportes y Reflexiones. Cecilia Parra e Irma Saiz (Comp.) Paidós Educador, pp. 51-63.
- EDWARDS y PENNY (2003), Cálculo con geometría analítica. México: Pearson/ Prentice –Hall.
- ENGLER A, VRANCKEN S, HECKLEIN M, MÜLLER D, GREGORINI (2007), Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de una variable. UNIÓN. Número 11, pp. 113-132, ISSN: 1815-0640.
- ESPINOZA, L. (1998), Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto límite de función. Del pensamiento del profesor a la gestión de los momentos del estudio. Tesis doctoral. UAB.
- FERNÁNDEZ-PLAZA, J A, CASTRO E, RICO L, RUIZ-HIDALGO J F (2012), Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Odóñez (Eds.) Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 229-237). Jaén: SEIEM.
- HOFFMANN L, BRADLEY G, ROSEN K (2006), Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales. México: Mac_Graw-Hill.
- LANG, S. (1990), Cálculo. México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- LARSON R., HOSTETLER R, EDWARDS B. (2006), Cálculo I. Octava edición. México: Editorial Mc Graw-Hill, Iberoamericana.
- LEITHOLD, L. (1998), El Cálculo. VII edición. México: Editorial Oxford University Press.
- MODELO EDUCATIVO UBB (2013), Recuperado de: http://ubb.cl/w/#Modelo_Educativo. Fecha de consulta: 19 de mayo de 2013.
- MOLFINO V, BUENDÍA G. (2010), El límite de funciones en la escuela: Un análisis de su institucionalización. REIEC Año 5 Número 1, p. 27-41.
- PURCEL E, VARBERG D. (2000), Cálculo diferencial e integración.. México: Prentice Hall Hispanoamericana S. A.
- ROMERO, L. (1991), Un modelo didáctico para la adquisición del concepto de Límite. Tesis doctoral. Universidad de Murcia.
- STEIN, S. (1984), Cálculo y geometría analítica. Bogotá: Editorial McGraw-Hill.
- STEINER, E. (2005), Matemáticas para las ciencias aplicadas. Barcelona: Editorial Reverté, S. A.
- STEWART, J. (2010), Cálculo de una variable. Conceptos y contextos. IV edición. México: Editorial Cengage Learning.
- ZILL D, WRIGHT W. (2011), Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. IV edición. México: Editorial McGraw-Hill. Iberoamericana editores S.A. de C.V.